文章编号:1007-6735(2018)01-0005-03 DOI:10.13255/j.cnki.jusst.2018.01.002

涉及差分分担值的整函数唯一性

赵子鹏， 刘晓俊
（上海理工大学 理学院，上海 200093）

摘要： 研究了Brücke猜想的差分模拟.利用Borel引理以及Nevanlinna值分布理论中关于周期函数的性质，将满足条件的整函数级大于等于1时可能出现的各类情况一一排除，再通过已证明的有限级整函数唯一性结论，得到了超级小于1且具有Picard例外函数的整函数及其差分CM分担0时这个整函数所具有的形式.此外，还利用了Nevanlinna值分布理论关于级的一些结论，从而使Borel引理可以在定理证明中反复应用，此方法适用于分担值以及某些差分分担周期函数的情况.

关键词： Brücke猜想；整函数；差分；分担；Picard例外值
中图分类号： O 714.52 **文献标志码：** A

Uniqueness of the Entire Function Concerned with Difference Sharing Value

ZHAO Zipeng， LIU Xiaojun
(*College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China*)

Abstract: The difference counterpart of the Brücke conjecture was investigated. By virtue of the Borel lemma and the property about periodic functions in the Nevanlinna's value distribution theory to exclude all cases which may occurr when the order of an entire function satisfying some conditions is greater than or equal to 1, and utilizing some proved conclusions about the uniqueness of entire function of finite order, it is proved that if an entire function of hyper-order, which has a small Picard exceptional function, shares the value of 0 with its difference operator, then the form of this entire function can be obtained. In addition, some results about the order in Nevanlinna's value distribution theory have been also adopted, so that Borel lemma can be applied repeatedly in the theorem proving. The method is suited to the sharing value and some cases of difference sharing periodic functions.

Keywords: *Brücke conjecture*; *entire function*; *difference*; *share*; *Picard exceptional value*

收稿日期： 2017-07-29
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(11401381)
第一作者： 赵子鹏(1992-)，男，硕士研究生.研究方向：复分析.E-mail:nargrus@126.com
通信作者： 刘晓俊(1982-)，男，副教授.研究方向：复分析.E-mail:xiaojunliu2007@hotmail.com

1 问题的提出

本文中若不加其他说明,亚纯函数 $f(z)$通常指在复平面$\mathbb{C}$ 亚纯,常数 $c\in\mathbb{C}$ 泛指常数. 采用文献[1-3]中 Nevanlinna 值分布理论中的记号及基本结论.

定义 1 $\lambda(f),\sigma(f),\sigma_2(f)$分别表示 f 的零点收敛指数、级以及超级,对应表达式为

$$\lambda(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log^+ N(r,1/f)}{\log r}$$

$$\sigma(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log^+ T(r,f)}{\log r}$$

$$\sigma_2(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log^+ T(r,f)}{\log r}$$

定义 2 设 $a(z)$在$\mathbb{C}$ 上亚纯,若 $T(r,a)=o(T(r,f))$,则称 $a(z)$是 $f(z)$的小函数.

定义 3 设 $f(z)$亚纯,a 为任一复数,若 $f(z)-a$ 在$\mathbb{C}$ 上没有零点,则称 a 为 $f(z)$的 Picard 例外值.

定义 4 若 η 为非零常数,定义差分和 n 阶差分算子

$$\Delta_\eta f=f(z+\eta)-f(z)$$

$$\Delta_\eta^n f=\sum_{j=0}^{n}C_n^j\,(-1)n-jf(z+j\eta)$$

定义 5 设 $f(z)$与 $g(z)$是区域 D 内的 2 个亚纯函数,a 是一个复数. 若 $f(z)-a$ 与 $g(z)-a$ 在 D 内有相同的零点,则称 f 与 g 在区域 D 内分担 a,或称 IM 分担 a. 更进一步,若 $f(z)-a$ 与 $g(z)-a$ 在 D 内有相同的零点,并且所有的零点重级也相同,则称 f 与 g 在区域 D 内 CM 分担 a.

1996 年,Brücke[4]提出了著名的猜想.

猜想 设 $f(z)$为非常值整函数,超级有穷且不为正整数,若 $f(z)$与 $f'(z)$CM 分担有限值 $a\in\mathbb{C}$,则存在某常数 $c\neq 0$,使得

$$\frac{f'-a}{f-a}=c$$

Brücke 证明了 $a=0$ 时的特殊情况[4],有穷级[5]以及超级小于 1/2[6]的情况也已经被证明. 2009 年,Heittokangas 等[7]研究了涉及差分算子的 Brücke 猜想,得到了定理 1.

定理 1 设 $f(z)$为级小于 2 的亚纯函数,$c\in\mathbb{C}$ 为非零常数. 若 $f(z)$与 $f(z+c)$CM 分担 $a\in\mathbb{C}$ 与 ∞,则存在常数 τ,使得

$$\frac{f(z+c)-a}{f-a}=\tau$$

2015 年,Shi 等[8]将上述定理中的条件"分担常数 a"推广为"分担小函数 $\alpha(z)$",并考虑 n 阶差分情形,得到了定理 2.

定理 2 设 $f(z)$为级小于 2 的超越整函数,$\alpha(z)\neq 0$ 为整函数,满足 $\sigma(\alpha)<\sigma(f)$和 $\lambda(f-\alpha)<\sigma(f)$. 若 $\Delta^n f(z)-\alpha(z)$和 $f(z)-\alpha(z)$CM 分担 0,则 $\alpha(z)$为一个次数不超过 $n-1$ 的多项式,$f(z)$具有如下的形式:

$$f(z)=\alpha(z)+H(z)\mathrm{e}^{dz}$$

式中:$H(z)$是一个多项式,满足 $cH(z)=-\alpha(z)$;c,d 是非零常数,满足 $\mathrm{e}^d=1$.

随后 Chen 等[9]又将定理 2 中级小于 2 的条件放宽为有穷级,得到了定理 3.

定理 3 设 $f(z)$是一个有穷级的超越整函数,且 $\lambda(f-a)<\sigma(f)$,这里,$a(z)$是一个级小于 1 的整函数. 若 $f(z)$与 $\Delta_\eta^n f(z)$分担一个整函数 $b(z)(b\not\equiv a,\sigma(b)<1)$,$\eta\in\mathbb{C}$,$n\in\mathbb{Z}^+$,使得 $\Delta_\eta^n f(z)\not\equiv 0$,则有

$$f(z)=a(z)+c\mathrm{e}^{c_1 z}$$

式中,c,c_1 是非零常数.

最近,Liao 等[10]又考虑了 $a(z)$是 Borel 例外值小函数的情形,得到了定理 4.

定理 4 设 $f(z)$是一个有穷级的超越整函数,$a(z)$是它的一个 Borel 例外小函数,满足 $\sigma(a)<1$. 若 $\Delta_\eta^n f$ 与 f CM 分担函数 d,这里,$d(z)$是级小于 $f(z)$的整函数,则

$$\frac{\Delta^n f-d}{f-d}=\frac{d-\Delta^n a}{d-a}$$

从而 $f(z)$具有如下形式:

$$f(z)=a(z)+c\mathrm{e}^{\beta z}$$

式中,c,β 是非零常数,满足

$$\frac{d-\Delta^n a}{d-a}=(\mathrm{e}^\beta-a)^n$$

在此基础上,作者考虑将上述结论推广到超级小于 1 的超越整函数,得到了定理 5.

定理 5 设 $f(z)$是$\mathbb{C}$ 上的超越整函数,$\sigma_2(f)<1$,且具有 Picard 例外周期小函数 $a(z)$. 若 $f(z)$与 $\Delta f(z)$CM 分担 0,那么,$f(z)=a(z)+s\mathrm{e}^{tz}$,其中,$s,t$ 是非零常数.

2 引理证明

引理 1[11] 假设 $f_1,f_2,\cdots,f_n\ (n\geqslant 2)$是亚纯函数,$g_1,g_2,\cdots,g_n$ 是满足下列条件的整函数:

a. $\sum_{j=1}^{n} f_j e^{g_j} \equiv 0$；

b. $g_j - g_k$ 不是常数，$1 \leqslant j < k \leqslant n$；

c. 对于 $1 \leqslant j \leqslant n$，$1 \leqslant h < k \leqslant n$，$T(r, f_j) = o\{T(r, e^{g_h - g_k})\}(r \to \infty, r \notin E)$.

则 $f_j = 0, j = 1, 2, \cdots, n$.

引理 2[3]　若 $f(z)$ 是非常值的周期亚纯函数，则 $f(z)$ 的级 $\sigma(f)$ 与下级 $\mu(f)$ 都大于等于 1.

引理 3[3]　若 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数，则 $f(z)$ 和它的导函数有相同的级与下级.

引理 4[3]　若 $f(z)$ 与 $g(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的 2 个非常值的亚纯函数，级分别为 $\sigma(f)$，$\sigma(g)$，则

$$\sigma(f \cdot g) \leqslant \max\{\sigma(f), \sigma(g)\} \tag{1}$$

3　定理 5 证明

现证明定理 5.

证明　由于 α 是 f 的 Picard 例外小函数，故 $f(z) = \alpha(z) + e^{h(z)}$，$h(z)$ 是整函数，$\sigma(h(z)) < 1$.

现分两种情况讨论.

情况 1　$h(z)$ 是超越整函数.

$0 \leqslant \sigma(h) < 1$，由于 f 与 Δf CM 分担 0，因此，存在整函数 $p(z)$ 使得 $\frac{\Delta f}{f} = e^{p(z)}$，将 $f(z)$ 代入，可得

$$e^{h(z+1)} - e^{h(z)} = \alpha e^{p(z)} + e^{h(z)+p(z)} \tag{2}$$

现将排除 3 个相关的断言.

断言 1　$\sigma(p(z)) > \sigma(h(z))$.

由式(2)可得

$$(e^{h(z+1)} - e^{h(z)})e^0 - (\alpha + e^{h(z)})e^{p(z)} \equiv 0 \tag{3}$$

由断言 1 可得，$\sigma(p(z)) > \sigma(h(z+1))$，于是

$$T(r, e^{h(z)}) = o(T(r, e^{p(z)})) \tag{4}$$

由引理 1 可得，$f(z) \equiv 0$，与 $f(z)$ 为超越整函数矛盾.

断言 2　$\sigma(p(z)) = \sigma(h(z))$.

若 $h(z) = p(z) + c$，则

$$e^{h(z+1)-p(z)} - e^{h(z)-p(z)} - \alpha - e^{h(z)} \equiv 0 \tag{5}$$

将中间两项合并，可得

$$e^{h(z+1)-p(z)} - e^{h(z)} = e^c + \alpha \tag{6}$$

记 $e^c + \alpha = b$. 若 $b = 0$，有 $e^{h(z+1)-p(z)} = e^{h(z)}$，于是，

$$h(z+1) - p(z) = h(z) + 2k\pi i \tag{7}$$

与 $h(z) = p(z) + c$ 联立，可得

$$h(z+1) = 2h(z) + 2k\pi i - c$$

有

$$\begin{cases} h'(z+1) = 2h'(z) \\ h''(z+1) = 2h''(z) \end{cases}$$

将两式相除，即得

$$\frac{h'(z+1)}{h''(z+1)} = \frac{h'(z)}{h''(z)}$$

容易发现函数 $\frac{h'(z)}{h''(z)}$ 为周期函数，因此，由引理 2 可得，$\sigma\left(\frac{h'(z)}{h''(z)}\right) \geqslant 1$. 但是，由于 $h(z)$ 为级小于 1 的函数，由引理 3 可得 $h'(z)$，$h''(z)$ 的级也小于 1，由引理 4 可得，$\sigma\left(\frac{h'(z)}{h''(z)}\right) < 1$，与之前矛盾.

于是，$b \neq 0$，又有 $h(z+1) - p(z) \neq p(z) + h(z) + c$. 否则，类似式(7)得到矛盾. 排除上述假设后，根据引理 1 即得矛盾.

再若 $h(z+1) - p(z) - h(z) \equiv c$，则 $\Delta h(z) = p(z) + c$，于是，

$$e^{\Delta h(z)-p(z)} - e^{-p(z)} - \alpha e^{-h(z)} - 1 \equiv 0 \tag{8}$$

将第一项与最后一项合并为常数，同式(7)的证明方法，可以得到矛盾.

若上述情况未发生可直接由引理 1 得到矛盾.

断言 3　$\sigma(p(z)) < \sigma(h(z))$.

则由式(2)可得

$$e^{h(z+1)} - e^{h(z)} - \alpha e^{p(z)} - \alpha e^{h(z)+p(z)} \equiv 0$$

$$e^{h(z+1)} - e^{h(z)}(1 + \alpha e^{p(z)}) - \alpha e^{p(z)} \equiv 0 \tag{9}$$

由引理 1 可以得到矛盾.

这时 3 个断言皆不成立，已经可以判定 $h(z)$ 非超越整函数，情况 1 不成立.

情况 2　$h(z)$ 为多项式.

情况 2 的证明参见文献[12].

参考文献：

[1] CHEN C X. Complex differences and difference equations[M]. Beijing: Science Press, 2014.

[2] LAINE I. Nevanlinna theory and complex differential equation[M]. Berlin: Walter de Gruyter, 1993.

[3] YANG CC, YI H X. Uniqueness theory of meromorphic functions[M]. Beijing: Science Press, 2006.

[4] BRÜCKE R. On entire functions which share one value CM with their first derivative [J]. Results in Mathematics, 1996, 30(1/2): 21-24.

[5] GUNDERSEN GG, YANG L Z. Entire functions that share one value with one or two of their derivatives [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1998, 223(1): 88-95.

（下转第 39 页）

［33］ BAE K H，KANG J K，LIM C W. The value of durable bank relationships：evidence from Korean banking shocks［J］. Journal of Financial Economics，2002，64(2)：181－214.

［34］ KORAJCZYK R A，LEVY A. Capital structure choice：macroeconomic conditions and financial constraints［J］. Journal of Financial Economics，2003，68(1)：75－109.

［35］ 王克敏，姬美光，赵沫. 宏观经济环境、公司治理与财务困境研究［J］. 经济与管理研究，2006(9)：18－25.

［36］ 吴华强，才国伟，徐信忠. 宏观经济周期对企业外部融资的影响研究［J］. 金融研究，2015(8)：109－123.

［37］ BEAUDRY C. Entry，growth and patenting in industrial clusters：a study of the aerospace industry in the UK［J］. International Journal of the Economics of Business，2001，8(3)：405－436.

［38］ 王义中，宋敏. 宏观经济不确定性、资金需求与公司投资［J］. 经济研究，2014(2)：4－17.

［39］ 王昌荣，马红，王元月. 基于宏观经济政策视角的我国企业负债融资研究［J］. 中国管理科学，2016，24(5)：158－167.

［40］ 喻坤，李治国，张晓蓉，等. 企业投资效率之谜：融资约束假说与货币政策冲击［J］. 经济研究，2014(5)：106－120.

［41］ 贾俊雪，郭庆旺. 政府间财政收支责任安排的地区经济增长效应［J］. 经济研究，2008(6)：73－94.

［42］ 孙瑾，刘文革，郭文杰. 欧元区主要国家间财政政策协调与经济周期协动性关系研究［J］. 宏观经济研究，2014(4)：135－143.

［43］ BECK T，DEMIRGÜÇ-KUNT A，LEVINE R. Law and finance：why does legal origin matter?［J］. Journal of Comparative Economics，2003，31(4)：653－675.

［44］ QUAGLIARIELLO M. Stress-testing the banking system［M］. Cambridge：Cambridge University Press，2009.

［45］ 饶品贵，张会丽. 通货膨胀预期与企业现金持有行为［J］. 金融研究，2015(1)：101－116.

［46］ 张明. 通货膨胀下公司的投融资行为研究［D］. 上海：东华大学，2014.

（编辑：石　瑛）

（上接第 7 页）

［6］ CHEN Z X，SHON K H. On conjecture of R. Brück concerning the entire function sharing one value CM with its derivative［J］. Taiwanese Journal of Mathematics，2004，8(2)：235－244.

［7］ HEITTOKANGAS J，KORHONEN R，LAINE I，et al. Value sharing results for shifts of meromorphic functions，and sufficient conditions for periodicity［J］. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2009，355(1)：352－363.

［8］ ZHANG J，KANG H Y，LIAO L W. Entire functions sharing a small entire function with their difference operators［J］. Bulletin of the Iranian Mathematical Society，2015，41(5)：1121－1129.

［9］ CHEN C X，CHEN Z X. Entire functions and their higher order differences［J］. Taiwanese Journal of Mathematics，2014，18(3)：711－729.

［10］ LIAO L W，ZHANG J. Shared values and Borel exceptional values for high order difference operators［J］. Bulletin of the Korean Mathematical Society，2016，53(1)：49－60.

［11］ HALBURD R，KORHONEN R，TOHGE K. Holomorphic curves with shift-invariant hyperplane preimages［J］. Transactions of the American Mathematical Society，2014，366(8)：4267－4298.

［12］ SHI X J，LIAO L W，ZHANG J. On a polynomail p such that $p(\Delta^n f)$ and $p(f)$ sharing a small function［J］. Houston Journal of Mathmatics，2017，43(2)：345－361.

（编辑：石　瑛）