

考虑恐惧效应和人为捕获或投放的 食饵-捕食者模型

张明辉, 马纪英, 徐沈龙

(上海理工大学理学院, 上海 200093)

摘要: 研究了一类具有常数捕获(投放)率的食饵-捕食者模型, 并考虑食饵种群的恐惧效应对系统动力学行为的影响。首先, 分析了系统的平衡点及其稳定性, 验证了边界平衡点在一定条件下会退化为鞍结点。其次, 通过对系统做相应变换, 应用正规型理论严格证明系统在一定条件下会发生鞍结点分支、Hopf分支和退化Hopf分支。研究结果表明, 该系统在某些参数条件下恰好有两个极限环, 其中外部的极限环是稳定的。最后, 借助MATLAB软件, 绘制系统对应不同参数取值的相图。数值模拟显示, 恐惧程度过低会导致种群灭亡, 即食饵种群适度的恐惧效应有利于两种群的共存。

关键词: 食饵-捕食者模型; 恐惧效应; 常数捕获(投放)率; Hopf分支; 相图

中图分类号: O 175.1 文献标志码: A

A predator-prey model with fear effect and anthropogenic harvesting or stocking

ZHANG Minghui, MA Jiyong, XU Shenlong

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The predator-prey model with constant harvesting (or stocking) was investigated, and the impact of fear effect on the dynamical behavior of the system was considered. Firstly, the equilibrium points and their local stability were analyzed, and the boundary equilibrium would become a degenerate saddle-node under certain conditions was verified. Secondly, by introducing a series of transformations and utilizing normal form theory, it was proved that the system could undergo saddle-node bifurcation, Hopf bifurcation and degenerate Hopf bifurcation under certain conditions. The theoretical results

收稿日期: 2024-12-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11501364); 上海理工大学科技发展项目(2020KJFZ161)

第一作者: 张明辉(1999—), 男, 硕士研究生. 研究方向: 生物数学. E-mail: 2031812758@qq.com

通信作者: 马纪英(1986—), 女, 副教授. 研究方向: 生物数学. E-mail: majiyong100@126.com

引文格式: 张明辉, 马纪英, 徐沈龙. 考虑恐惧效应和人为捕获或投放的食饵-捕食者模型[J]. 上海理工大学学报, 2026, 48(1): 98-108.

Citation: ZHANG Minghui, MA Jiyong, XU Shenlong. A predator-prey model with fear effect and anthropogenic harvesting or stocking[J]. Journal of University of Shanghai for Science and Technology, 2026, 48(1): 98-108.

indicate that for some parameter values the system has exactly two limit cycles, of which the outer limit cycle is stable. Finally, the phase portraits of the system were depicted by MATLAB. Numerical simulations show that a low level of fear can lead to the extinction of populations, that is, an appropriate fear effect is beneficial for the coexistence of two populations.

Keywords: predator-prey model; fear effect; constant harvesting (stocking); Hopf bifurcation; phase portrait

1 模型的建立

食饵-捕食者模型是描述捕食者与其被捕食者(食饵)之间相互作用的种群动力学模型, 捕食与被捕食关系是数学生态学中研究的一个重要关系^[1-3]。1925年, 数学家 Volterra 和生物学家 D'ancona 在研究鱼类数目变化时, 发现一战期间地中海一带港口捕获的掠肉鱼的比例增加而食用鱼的比例下降, 并分析了掠肉鱼与食用鱼之间的捕食关系。1931年, 著名生态学家 Lotka 在其书中提出了类似的问题。生物数学中把经典的食饵-捕食者模型或者其他更一般的模型称为 Lotka-Volterra 模型^[4-5]。由于生物种群及其所生活的环境都极具复杂性, 为了解释种群之间复杂的动力学现象, 许多学者引入了可能影响生态系统的多种实际因素, 例如恐惧效应、噪声、捕获率、传染病等。这些结果极大地丰富和发展了食饵-捕食者模型的研究。

2023年, 数学生态学家阮士贵教授和肖冬梅教授研究了一类具有 Holling II 型反应函数的食饵-捕食者模型^[6], 其中, 捕食者种群考虑人为捕获或投放, 模型具体形式如下:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{sxy}{a+x} \\ \frac{dy}{dt} = y\left(-d + \frac{\mu sx}{a+x}\right) \pm h \end{cases} \quad (1)$$

式中: $x = x(t)$ 和 $y = y(t)$ 分别为食饵和捕食者种群在 t 时刻的密度; r 为食饵种群的自然增长率; K 为环境容纳量; d 为在没有食饵种群的情况下捕食者种群的自然死亡率; s 为捕食者对食饵的捕获率; a 为捕食者处理食饵的时间; μ 为捕食者通过捕获食饵后孕育出下一代的比率; h 为常数捕获(投放)率, 当系统(1)中第二个方程取“-”时, 表示人为捕获, 而取“+”时, 表示人为投放。所有参数均为正数。对捕食与被捕食系统考虑人为捕获或投放时, 系统的边界平衡点和正平衡点的数量及

其稳定性都会随着捕获(投放)率的变化而变化, 并且可能产生更丰富的分支现象。例如, 此时系统会发生不完备分支等^[6]。人为捕获或投放在林业、渔业和野生动物管理等领域应用广泛, 在此基础上进行建模可帮助生态学家制定合适的捕获或投放策略。

在自然界中, 受惊的食饵会减少觅食时间或觅食频率, 这能在一定程度上躲避天敌的追杀。同时, 这种挨饿机制将伴随着出生率和存活率的降低。更高的捕食风险会导致食饵暂时离开栖息地或觅食点, 只有在风险降低、食饵相对安全的时候, 食饵才会返回^[7-11]。因此, 在捕食模型中考虑恐惧因素是十分必要的。例如, 2023年, Wang 等^[12] 研究了一类食饵种群具有恐惧效应的食饵-捕食者模型, 具体形式如下:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{rx}{1+ky} - dx - ax^2 - \frac{pxy}{1+cx} \\ \frac{dy}{dt} = -my^2 + \frac{qxy}{1+cx} \end{cases} \quad (2)$$

式中: $\frac{1}{1+ky}$ 为食饵种群的恐惧效应; k 为受恐惧程度; p 为捕食者的捕食率; q 为转化系数, $1/c$ 为半饱和常数, m 为密度制约效应参数; 其他参数的生物学意义可参看文献 [12]。

受上述工作启发, 为了直观反映食饵种群的恐惧效应对捕食系统的影响, 本文在模型(1)的基础上考虑如下模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{r_1x}{1+ky} - \delta x^2 - \frac{\alpha xy}{1+\beta x} \\ \frac{dy}{dt} = -r_2y + \frac{\alpha\theta xy}{1+\beta x} \end{cases} \quad (3)$$

式中: r_1 为食饵种群的自然增长率; k 为食饵对捕食者的恐惧程度; r_2 为捕食者种群的自然死亡率; δ 为种内竞争系数; α 为捕食者对食饵的捕获率; β 为捕食者处理食饵的时间; θ 为捕食者通过捕获食饵后孕育出下一代的比率。以上参数均为正数。

为简化模型, 首先对系统(3)进行无量纲变换:

$$X = \beta x, Y = ky, \tau = r_2 t$$

于是系统(3)等价于如下系统(仍用 x, y, t 表示 X, Y, τ):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \left(\frac{p}{1+y} - qx - \frac{cy}{1+x} \right) \\ \frac{dy}{dt} = y \left(-1 + \frac{mx}{1+x} \right) \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$p = \frac{r_1}{r_2}, q = \frac{\delta}{\beta r_2}, c = \frac{\alpha}{kr_2}, m = \frac{\alpha\theta}{\beta r_2}$$

此外, 在渔业以及农业生产等环境下, 食饵种群的数量往往远大于捕食者的数量, 并且食饵数量易受到人类捕获或投放行为的影响。因此, 本文在系统(4)中对食饵种群引入常数捕获(投放)率, 得到如下模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \left(\frac{p}{1+y} - qx - \frac{cy}{1+x} \right) \pm h \\ \frac{dy}{dt} = y \left(-1 + \frac{mx}{1+x} \right) \end{cases} \quad (5)$$

鉴于模型的生物学意义, 系统(1)~(5)的初值条件为

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$$

其中 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$ 。本文将对系统(5)进行动力学分析, 包括分析系统的平衡点及其稳定性, 以及系统可能存在的分支现象等。最后, 通过 MATLAB 进行数值模拟, 以验证理论结果的正确性。

2 平衡点及稳定性

本节讨论系统(5)的平衡点及其稳定性, 考虑到模型的生物学意义, 仅在区域 $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$ 上进行分析^[13-14]。

2.1 对食饵人为捕获

先考虑对食饵种群进行人为捕获的情况, 模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \left(\frac{p}{1+y} - qx - \frac{cy}{1+x} \right) - h = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = y \left(-1 + \frac{mx}{1+x} \right) = g(x, y) \end{cases} \quad (6)$$

定理 2.1 设 $m > 1$ 且 $p(m-1) - q > 0$ 。记 $h^* = \frac{p^2}{4q}$,

$h^c = \frac{p(m-1) - q}{(m-1)^2}$, 则

I. 当 $0 < h < h^c$ 时, 系统(6)有 2 个边界平衡点 $E_1(x_1, 0)$, $E_2(x_2, 0)$ 和 1 个正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$, 此时 $E_1(x_1, 0)$ 和 $E_2(x_2, 0)$ 为双曲鞍点, $E^*(x^*, y^*)$ 为初等平衡点;

II. 当 $h^c \leq h < h^*$ 时, 系统(6)有 2 个边界平衡点 $E_1(x_1, 0)$ 、 $E_2(x_2, 0)$, 无正平衡点。此时, $E_1(x_1, 0)$ 是稳定结点, $E_2(x_2, 0)$ 是不稳定结点。特别地, 当 $h = h^c$ 时, $E_1(x_1, 0)$ 为鞍结点;

III. 当 $h = h^*$ 时, 系统(6)有 1 个边界平衡点 $E_1(x_1, 0)$, 无正平衡点, 此时 $E_1(x_1, 0)$ 是退化平衡点;

IV. 当 $h > h^*$ 时, 系统(6)无平衡点。

证明 $h^c - h^* = -\frac{((m-1)p - 2q)^2}{4(m-1)^2 q} \leq 0$, 所以 $h^c \leq h^*$ 。为求解平衡点, 令 $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ 。由 $g(x, y) = 0$, 可以解得 $y = 0$ 或者 $x = \frac{1}{m-1}$, 为了满足生物学意义, 取 $m > 1$ 。将 $y = 0$ 代入 $f(x, y) = 0$, 则 $qx^2 - px + h = 0$, 由韦达定理可知, 若 $\Delta = p^2 - 4qh > 0$, 即 $h < h^*$, 此方程具有 2 个正根, $x_1 = \frac{p + \sqrt{\Delta}}{2q}$, $x_2 = \frac{p - \sqrt{\Delta}}{2q}$ 。当 $x^* = \frac{1}{m-1}$ 时, y^* 满足关系式:

$$y^{*2} + \frac{qm + c(m-1)^2 + mh(m-1)^2}{c(m-1)^2} y^* + \frac{qm + mh(m-1)^2 - pm(m-1)}{c(m-1)^2} = 0$$

由韦达定理可知, 若 $\frac{qm + mh(m-1)^2 - pm(m-1)}{c(m-1)^2} < 0$, 即 $h < h^c$, 此时系统(6)有 1 个正平衡点。综上分析, 当参数满足条件 I 时, 系统(6)有 2 个边界平衡点 $E_1(x_1, 0)$ 、 $E_2(x_2, 0)$ 和 1 个正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$ 。同理, 当参数满足条件 II、III 和 IV 时, 平衡点个数的分析与 I 类似。

下面首先讨论平衡点 E_1 的稳定性。系统(6)在平衡点 $E_1(x_1, 0)$ 处的雅可比矩阵为

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} p - 2qx_1 & -\frac{cx_1}{1+x_1} - px_1 \\ 0 & -1 + \frac{mx_1}{1+x_1} \end{bmatrix}$$

其对应的行列式和迹分别为

$$\text{Det}(J(E_1)) = (p - 2qx_1) \left(-1 + \frac{mx_1}{1+x_1} \right)$$

$$\text{Tr}(J(E_1)) = p - 1 - 2qx_1 + \frac{mx_1}{1+x_1}$$

由于 $x_1 = \frac{p + \sqrt{\Delta}}{2q}$, 所以 $p - 2qx_1 < 0$, 当 $x_1 >$

$\frac{1}{m-1}$, 即 $h < h^c$ 时, $\text{Det}(\mathbf{J}(E_1)) < 0$, 则平衡点 $E_1(x_1, 0)$ 为系统 (6) 的双曲鞍点; 当 $0 < x_1 < \frac{1}{m-1}$ 时, 即 $h^c < h < h^*$ 时, 可得 $\text{Det}(\mathbf{J}(E_1)) > 0$ 且 $\text{Tr}(\mathbf{J}(E_1)) < 0$, 则平衡点 $E_1(x_1, 0)$ 为系统 (6) 的稳定结点。

同理, 可得系统 (6) 在平衡点 $E_2(x_2, 0)$ 处的雅可比矩阵为

$$\mathbf{J}(E_2) = \begin{bmatrix} p - 2qx_2 & -\frac{cx_2}{1+x_2} - px_2 \\ 0 & -1 + \frac{mx_2}{1+x_2} \end{bmatrix}$$

其对应的行列式和迹分别为

$$\text{Det}(\mathbf{J}(E_2)) = (p - 2qx_2) \left(-1 + \frac{mx_2}{1+x_2} \right)$$

$$\text{Tr}(\mathbf{J}(E_2)) = p - 1 - 2qx_2 + \frac{mx_2}{1+x_2}$$

由于 $x_2 = \frac{p - \sqrt{\Delta}}{2q}$, 所以 $p - 2qx_2 > 0$ 。当 $x_2 > \frac{1}{m-1}$, 即 $h^c < h < h^*$ 时, 可得 $\text{Det}(\mathbf{J}(E_2)) > 0$, $\text{Tr}(\mathbf{J}(E_2)) > 0$, 则平衡点 $E_2(x_2, 0)$ 为系统 (6) 的不稳定结点; 当 $0 < x_2 < \frac{1}{m-1}$, 即 $h < h^c$ 时, 可得 $\text{Det}(\mathbf{J}(E_2)) < 0$, 则平衡点 $E_2(x_2, 0)$ 为系统 (6) 的双曲鞍点。

最后讨论正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$ 的稳定性, 系统 (6) 在 $E^*(x^*, y^*)$ 处的雅可比矩阵为

$$\mathbf{J}(E^*) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

其中 $a_{11} = \frac{p}{1+y^*} - \frac{2q}{m-1} - \frac{cy^*(m-1)^2}{m^2}$, $a_{12} = -\frac{p}{(m-1)(1+y^*)^2} - \frac{c}{m}$, $a_{21} = \frac{(m-1)^2 y^*}{m}$, $a_{22} = 0$ 。则雅可比矩阵的行列式 $\text{Det}(\mathbf{J}(E^*)) = -a_{12}a_{21} > 0$, 所以 E^* 为初等平衡点。定理证毕。

在定理 2.1 的参数条件 II 中, 当 $h = h^c$ 时, $E_1(x_1, 0)$ 为鞍结点, 总结为下述定理。

定理 2.2 若 $m > 1$ 且 $\Delta = p^2 - 4qh > 0$, 方程 $qx^2 - px + h = 0$ 有 2 个正根 $x_1, x_2 (x_1 > x_2)$, 并且当 $x_1 = \frac{1}{m-1}$ 时, 即 $h = h^c$ 时, 平衡点 $E_1(x_1, 0)$ 是鞍结点。

证明 当 $x_1 = \frac{1}{m-1}$ 时, 系统 (6) 在平衡点 $E_1(x_1, 0)$ 处的 2 个特征根, 一个具有负实部, 另一个为零, 其雅可比矩阵为

$$\mathbf{J}(E_1) = \begin{bmatrix} \frac{pm-p-2q}{m-1} & -\frac{cm-c+pm}{m(m-1)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

先将系统 (6) 在平衡点 $E_1(x_1, 0)$ 处进行线性

化, 令 $X = x - \frac{1}{m-1}$, $Y = y$ 。再对平移后的式子在原点处进行泰勒展开, 则得到如下系统:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \frac{pm-p-2q}{m-1}X - \frac{cm+pm-c}{m(m-1)}Y - qX^2 - \frac{c(m-1)^2+pm^2}{m^2}XY + \frac{p}{m-1}Y^2 + O(|X, Y|^3) \\ \frac{dY}{dt} = \frac{(m-1)^2}{m}XY + O(|X, Y|^3) \end{cases} \quad (7)$$

接着对系统 (7) 进行对角化变换, 即变换 $X = \frac{cm-c+pm}{m(m-1)}u + v$, $Y = \frac{pm-p-2q}{m-1}u$, 得到系统 (8)

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{(m-1)(cm-c+pm)}{m^2}u^2 + \frac{(m-1)^2}{m}uv + O(|u, v|^3) \\ \frac{dv}{dt} = \frac{pm-p-2q}{m-1}v + a_{20}u^2 + a_{11}uv + a_{02}v^2 + O(|u, v|^3) \end{cases} \quad (8)$$

由于 $m > 1$, 显然 $\frac{(m-1)(cm-c+pm)}{m^2} \neq 0$, 由 Zhang 等^[15] 的定理, 可知 $E_1(x_1, 0)$ 是鞍结点。定理证毕。

2.2 对食饵人为投放

考虑对食饵种群进行人为投放的情况, 模型如下

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \left(\frac{p}{1+y} - qx - \frac{cy}{1+x} \right) + h = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = y \left(-1 + \frac{mx}{1+x} \right) = g(x, y) \end{cases} \quad (9)$$

定理 2.3 设 $m > 1$ 且 $q - p(m-1) > 0$ 。记 $h^d = \frac{q - p(m-1)}{(m-1)^2}$, 则

I. 当 $h > h^d$ 时, 系统 (9) 有 1 个边界平衡点 $E'_1(x'_1, 0)$ 和 1 个正平衡点 $E'(x', y')$, 此时 $E'_1(x'_1, 0)$ 为双曲鞍点, $E'(x', y')$ 为初等平衡点;

II. 当 $h \leq h^d$ 时, 系统 (9) 有 1 个边界平衡点 $E'_1(x'_1, 0)$, 无正平衡点, 此时 $E'_1(x'_1, 0)$ 为稳定结点, 且当 $h = h^d$ 时, $E'_1(x'_1, 0)$ 是鞍结点。

证明 同样令 $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ 。由 $g(x, y) = 0$, 可以解得 $y = 0$ 或 $x = \frac{1}{m-1} > 0$ 。将 $y = 0$ 代入 $f(x, y) = 0$, 则 $qx^2 - px - h = 0$, 根据韦达定理可知该方程有且只有 1 个正根, 可以解得 $x'_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4h}}{2q}$ 。将 $x = \frac{1}{m-1}$ 代入 $f(x, y) = 0$, 则 $y'^2 + \frac{qm + c(m-1)^2 + mh(m-1)^2}{c(m-1)^2}y' + \frac{qm - mh(m-1)^2 - pm(m-1)}{c(m-1)^2} = 0$

若 $\frac{qm - mh(m-1)^2 - pm(m-1)}{c(m-1)^2} < 0$, 即 $h > h^d$, 此时系统 (9) 有 1 个正平衡点。由此可得, 当参数满足条件 I 时, 系统 (9) 的 2 个平衡点分别为 1 个边界平衡点 $E'_1(x'_1, 0)$ 以及 1 个正平衡点 $E'(x', y')$, 其中 $x' = \frac{1}{m-1}$ 。而当 $h \leq h^d$ 时, 系统 (9) 有 1 个边界平衡点 $E'_1(x'_1, 0)$, 无正平衡点。

下面计算 2 个平衡点处的雅可比矩阵, 系统 (9) 在平衡点 $E'_1(x'_1, 0)$ 处的雅可比矩阵为

$$J(E'_1) = \begin{bmatrix} p - 2qx'_1 & -\frac{cx'_1}{1+x'_1} - px'_1 \\ 0 & -1 + \frac{mx'_1}{1+x'_1} \end{bmatrix}$$

其对应的行列式和迹分别为

$$\text{Det}(J(E'_1)) = (p - 2qx'_1) \left(-1 + \frac{mx'_1}{1+x'_1} \right)$$

$$\text{Tr}(J(E'_1)) = p - 1 - 2qx'_1 + \frac{mx'_1}{1+x'_1}$$

由于 $x'_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4qh}}{2q}$, 所以 $p - 2qx'_1 < 0$, 当 $x'_1 > \frac{1}{m-1}$, 即 $h > h^d$ 时, 可得 $\text{Det}(J(E'_1)) < 0$, 则平衡点 $E'_1(x'_1, 0)$ 为系统 (9) 的双曲鞍点; 当 $0 < x'_1 < \frac{1}{m-1}$, 即 $h < h^d$ 时, 可得 $\text{Det}(J(E'_1)) > 0$ 且 $\text{Tr}(J(E'_1)) < 0$, 则平衡点 $E'_1(x'_1, 0)$ 为系统 (9) 的稳定结点。

当 $x'_1 = \frac{1}{m-1}$, 即 $h = h^d$ 时, 平衡点 $E'_1(x'_1, 0)$ 是鞍结点, 证明方法与定理 2.2 类似, 这里略去具体的证明过程。

下面考虑正平衡点的稳定性, 系统 (9) 在正平衡点 $E'(x', y')$ 处的雅可比矩阵为

$$J(E') = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

其中 $a_{11} = \frac{p}{1+y'} - \frac{2q}{m-1} - \frac{cy'(m-1)^2}{m^2}$, $a_{12} = -\frac{p}{(m-1)(1+y')^2} - \frac{c}{m}$, $a_{21} = \frac{(m-1)^2 y'}{m}$, $a_{22} = 0$ 。则雅可比矩阵的行列式 $\text{Det}(J(E')) = -a_{12}a_{21} > 0$, 所以 E' 为初等平衡点。定理证毕。

$$D^2F_m(E_1)(V, V) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} v_1^2 + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} v_1 v_2 + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} v_2^2 \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} v_1^2 + 2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} v_1 v_2 + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} v_2^2 \end{bmatrix}_{E_1} = \begin{bmatrix} \frac{mq(mc - c + pm)^2 + (pm^2 + c(m-1)^2)(mc - c + pm)(pm - p - 2q) - pm^3(m-1)}{m^3(m-1)^2} \\ \frac{(mc - c + pm)(mp - p - 2q)}{m^2} \end{bmatrix}$$

定理 2.1 和 2.3 的结果表明, 对食饵的人为捕获或投放会直接影响系统的边界平衡点和正平衡点的数量及稳定性。当对食饵的捕获率小于某一阈值时, 两种群的数量趋于正的平衡态而共存, 但随着捕获率的增大会导致捕食者种群灭绝。当对食饵的投放率大于某一阈值时, 有利于两种群的共存。

3 分支分析

本节对系统 (6) 进行分支分析, 主要包括鞍结点分支和 Hopf 分支, 通过做适当的系统变换, 证明鞍结点分支的存在, 并给出产生退化 Hopf 分支的参数条件。

3.1 鞍结点分支

定理 3.1 若 $m > 1$ 且 $\Delta = p^2 - 4qh > 0$, 方程 $qx^2 - px + h = 0$ 有 2 个正根 $x_1, x_2 (x_1 > x_2)$, 则当 $x_1 = \frac{1}{m-1}$, 即 $(m-1)^2 h - p(m-1) + q = 0$ 时, 平衡点 $E_1(x_1, 0)$ 是鞍结点, 系统会发生鞍结点分支。

证明 取 m 为分支参数, 系统 (6) 在 $E_1(x_1, 0)$ 处的雅可比矩阵为

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} \frac{pm - p - 2q}{m-1} & -\frac{cm - c + pm}{m(m-1)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

设 $J(E_1)$ 和 $J(E_1^T)$ 关于 0 特征值的特征向量分别为 V 和 W , 可以求出 V 和 W 分别为

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{cm - c + mp}{m(m-1)} \\ \frac{mp - p - 2q}{m-1} \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

通过简单的计算, 可得

$$F_m(E_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{x_1 y_1}{1+x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$DF_m(E_1)V = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{cm - c + mp}{m(m-1)} \\ \frac{mp - p - 2q}{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{mp - p - 2q}{m(m-1)} \end{bmatrix}$$

因此, 可以得到

$$W^T F_m(E_1) = 0$$

$$W^T [DF_m(E_1)V] = \frac{mp - p - 2q}{m(m-1)} \neq 0$$

$$W^T [D^2 F_m(E_1)(V, V)] = \frac{(mc - c + pm)(mp - p - 2q)}{m^2} \neq 0$$

所以, 根据 Sotomayor^[16] 定理可知, 系统 (6)

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} \frac{p}{1+y^*} - \frac{2q}{m-1} - \frac{cy^*(m-1)^2}{m^2} & -\frac{p}{(m-1)(1+y^*)^2} - \frac{c}{m} \\ \frac{(m-1)^2 y^*}{m} & 0 \end{bmatrix}$$

若系统满足

$$y^{*2} + \frac{qm + c(m-1)^2 + mh(m-1)^2}{c(m-1)^2} y^* +$$

$$\frac{qm + mh(m-1)^2 - pm(m-1)}{c(m-1)^2} = 0$$

和 $\frac{p}{1+y^*} - \frac{2q}{m-1} - \frac{cy^*(m-1)^2}{m^2} = 0$ 的条件, 则可能发生 Hopf 分支, 通过这两个条件可以解出参数 p 、 q 的值为

$$p = \frac{(y^* + 1)(m-1)(cm y^* + 2hm^2 + cy^*)}{m^2}$$

$$q = \frac{(m-1)^2(hm^2 + cy^*)}{m^2}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & (-4m^8 + 8m^7)h^3 + (-8cm^7 y^* - 4cm^7 + 14cm^6 y^* + 10cm^6 + 16cm^5 y^* - 4cm^4 y^*)h^2 + (-4c^2 m^6 y^{*2} \\ & - 4c^2 m^6 y^* + 6c^2 m^5 y^{*2} - c^2 m^6 + 9c^2 m^5 y^* + 24c^2 m^4 y^{*2} + 3c^2 m^5 + 13c^2 m^4 y^* + 4c^2 m^3 y^{*2} - 2cm^5 y^* \\ & - 2c^2 m^3 y^* - 4c^2 m^2 y^{*2})h + 8c^3 m^3 y^{*3} + 8c^3 m^3 y^{*2} + 6c^3 m^2 y^{*3} - c^2 m^4 y^{*2} + 2m^3 c^3 y^* + 3m^2 c^3 y^{*2} \\ & - mc^3 y^{*3} - c^2 m^3 y^{*2} - mc^3 y^{*2} - c^3 y^{*3} \end{aligned}$$

证明 首先, 通过变换 $X = x - x^*$, $Y = y - y^*$, 将平衡点由 (x^*, y^*) 平移到坐标原点, 再对其进行泰勒展开, 得到

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = b_{01}Y + b_{11}XY + b_{20}X^2 + b_{02}Y^2 + b_{21}X^2Y + b_{12}XY^2 + b_{30}X^3 + b_{03}Y^3 + b_{40}X^4 \\ \quad + b_{31}X^3Y + b_{13}XY^3 + b_{04}Y^4 + o(|X, Y|^4) \\ \frac{dY}{dt} = c_{10}X + c_{20}X^2 + c_{11}XY + c_{30}X^3 + c_{21}X^2Y + c_{40}X^4 + c_{31}X^3Y + o(|X, Y|^4) \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{其中 } b_{01} = -\frac{(2cm y^* + 2hm^2 + cm + cy^*)}{m^2(y^* + 1)}, b_{11} = -\frac{(m-1)(2cm y^* + 2hm^2 + cm - c)}{m^2(y^* + 1)},$$

$$b_{20} = -\frac{(m-1)^2(hm^3 + cy^*)}{m^3}, b_{02} = \frac{(cm y^* + 2hm^2 + cy^*)}{m^2(y^* + 1)^2}, b_{21} = \frac{(m-1)^3 c}{m^3}, b_{12} = \frac{(m-1)(cm y^* + 2hm^2 + cy^*)}{m^2(y^* + 1)^2},$$

$$b_{30} = -\frac{(m-1)^4 cy^*}{m^4}, b_{03} = -\frac{(cm y^* + 2hm^2 + cy^*)}{m^2(y^* + 1)^3}, b_{40} = \frac{(m-1)^5 cy^*}{m^5}, b_{31} = -\frac{(m-1)^4 c}{m^4},$$

存在鞍结点分支。

3.2 Hopf 分支

参考 Xu 等^[17-18] 的方法, 分析对食饵人为捕获情形下的 Hopf 分支与退化 Hopf 分支动力学行为。

系统 (6) 在正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$ 处的雅可比矩阵为

定理 3.2 设参数条件满足 $\text{Det}(J(E^*)) > 0$ 和

$\text{Tr}(J(E^*)) = 0$, 则

I. 如果 $\sigma_{11} < 0$, 那么 E^* 是一个一阶的稳定细焦点, 系统发生超临界 Hopf 分支产生一个稳定极限环;

II. 如果 $\sigma_{11} > 0$, 那么 E^* 是一个一阶不稳定细焦点, 系统发生亚临界 Hopf 分支产生一个不稳定极限环;

III. 如果 $\sigma_{11} = 0$, 那么 E^* 是一个至少二阶的细焦点, 系统 (6) 会发生退化的 Hopf 分支, 这里 σ_{11} 为

$$b_{13} = -\frac{(m-1)(cm^*y^* + 2hm^2 + cy^*)}{m^2(1+y^*)^3}, b_{04} = \frac{(cm^*y^* + 2hm^2 + cy^*)}{m^2(1+y^*)^4}, c_{10} = \frac{y^*(m-1)^2}{m}, c_{11} = \frac{(m-1)^2}{m},$$

$$c_{20} = -\frac{y^*(m-1)^3}{m^2}, c_{21} = -\frac{(m-1)^3}{m^2}, c_{30} = \frac{y^*(m-1)^4}{m^3}, c_{40} = -\frac{(m-1)^5 y^*}{m^4}, c_{31} = \frac{(m-1)^4}{m^3}$$

令 $w = \sqrt{\frac{(2cm^*y^* + 2hm^2 + cm + cy^*)(m-1)^2 y^*}{m^3(y^* + 1)}}$, 取

则有

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = y_1 + S(x_1, y_1) \\ \frac{dy_1}{dt} = -x_1 + R(x_1, y_1) \end{cases}$$

变换 $x_1 = \frac{b_{01}}{w} Y, y_1 = X, \tau = -wt$

其中

$$S(x_1, y_1) = -\frac{(m-1)^2}{wm} x_1 y_1 - \frac{(2cm^*y^* + 2hm^2 + cm + cy^*)y^*(m-1)^3}{w^2 m^4 (y^* + 1)} y_1^2 + \frac{(m-1)^3}{w m^2} x_1 y_1^2 +$$

$$\frac{(2cm^*y^* + 2hm^2 + cm + cy^*)y^*(m-1)^4}{w^2 m^5 (y^* + 1)} y_1^3 - \frac{(m-1)^4}{m^3 w} x_1 y_1^3 -$$

$$\frac{(2cm^*y^* + 2hm^2 + cm + cy^*)y^*(m-1)^5}{m^6 (1+y^*) w^2} y_1^4 + o(|x_1, y_1|^4)$$

$$R(x_1, y_1) = -\frac{w m^2 (cm^*y^* + 2hm^2 + cy^*)}{(2cm^*y^* + 2hm^2 + cm + cy^*)^2} x_1^2 - \frac{(m-1)(2cm^*y^* + 2hm^2 + cm - c)}{2cm^*y^* + 2hm^2 + cm + cy^*} x_1 y_1 + \frac{(m-1)^2 (hm^3 + cy^*)}{m^3 w} y_1^2 -$$

$$\frac{(cm^*y^* + 2hm^2 + cy^*) m^4 w^2}{(2cm^*y^* + 2hm^2 + cm + cy^*)^3} x_1^3 - \frac{w m^2 (m-1)(cm^*y^* + 2hm^2 + cy^*)}{(2cm^*y^* + 2hm^2 + cm + cy^*)^2} x_1^2 y_1 +$$

$$\frac{(m-1)^3 c (y^* + 1)}{m(2cm^*y^* + 2hm^2 + cm + cy^*)} x_1 y_1^2 + \frac{(m-1)^4 c y^*}{m^4 w} y_1^3 - \frac{w^3 m^6 (cm^*y^* + 2hm^2 + cy^*)}{(2cm^*y^* + 2hm^2 + cm + cy^*)^4} x_1^4 -$$

$$\frac{w^2 m^4 (m-1)(cm^*y^* + 2hm^2 + cy^*)}{(2cm^*y^* + 2hm^2 + cm + cy^*)^3} x_1^3 y_1 - \frac{(1+y^*)(m-1)^4 c}{m^2 (2cm^*y^* + 2hm^2 + cm + cy^*)} x_1 y_1^3 - \frac{(m-1)^5 c y^*}{m^5 w} y_1^4 + o(|x_1, y_1|^4)$$

利用形式级数法^[15]可得第一、二李雅普诺夫系数分别为

$$\sigma_1 = \frac{(m-1)^3 \sigma_{11}}{4wm^4(2cm^*y^* + 2hm^2 + cm + cy^*)^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{(m-1)^3 \sigma_{22}}{24m^8 w^2 (1+y^*)^3}$$

这里 σ_{11} 和 σ_{22} 均可通过 Maple 计算求得, 由于 σ_{22} 的具体表达式过于复杂, 这里将其省略。从 σ_1 的表达式可以看出, σ_{11} 的符号决定了 Hopf 分支的方向, 若 $\sigma_{11} > 0$, 则 Hopf 分支是亚临界的, 在平衡点 E^* 附近出现一个不稳定的极限环; 反之, 则 Hopf 分支是超临界的, 在平衡点 E^* 附近出现一个稳定的极限环^[19]。若 $\sigma_{11} = 0$, 则 $E^*(x^*, y^*)$ 是一个至少二阶的细焦点, 系统 (6) 会经历退化的 Hopf 分支^[20]。

对于退化 Hopf 分支有如下定理。

定理 3.3 设 $\text{Det}(J(E^*)) = 0$ 和 $\text{Tr}(J(E^*)) = 0$ 都满足, 且 $\sigma_{11} = 0$, 则

I. 如果 $\sigma_{22} < 0$, 那么 E^* 是一个二阶的稳定细焦点, 系统发生退化 Hopf 分支产生两个极限环, 其中外部的极限环是稳定的;

II. 如果 $\sigma_{22} > 0$, 那么 E^* 是一个二阶不稳定细焦点, 系统发生退化 Hopf 分支产生两个极限环, 其中外部的极限环是不稳定的;

III. 如果 $\sigma_{22} = 0$, 那么 E^* 是一个至少三阶的细焦点, 系统 (6) 可能发生至少余维 3 的退化 Hopf 分支。

4 数值模拟

本节对系统 (5) 进行数值模拟, 主要验证人为捕获、人为投放以及恐惧效应对两个生物种群的影响。

4.1 鞍结点相图

上文已经证明了当 $(m-1)^2 h - p(m-1) + q = 0$ 时, $E_1(x_1, 0)$ 是系统 (6) 的鞍结点; 当 $(m-1)^2 h + p(m-1) - q = 0$ 时, $E'_1(x'_1, 0)$ 是系统 (9) 的鞍结点。通过 MATLAB 绘制鞍结点的相图。

先考虑人为捕获的情况。对于系统 (6), 当 $x'_1 = \frac{1}{m-1}$, 即 $h = \frac{p}{m-1} - \frac{q}{(m-1)^2}$ 时, 固定参数取值 $p = 0.6$ 、 $q = 0.2$ 、 $c = 0.1$ 、 $h = 0.4$ 、 $m = 1.5$, 可以得到图 1 (a)。

再考虑人为投放的情况。对于系统 (9), 当 $x'_1 = \frac{1}{m-1}$, 即 $h = \frac{q}{(m-1)^2} - \frac{p}{m-1}$ 时, 固定参数取值 $p = 0.8$ 、 $q = 0.5$ 、 $c = 0.1$ 、 $h = 0.4$ 、 $m = 1.5$, 可以得到图 1 (b)。

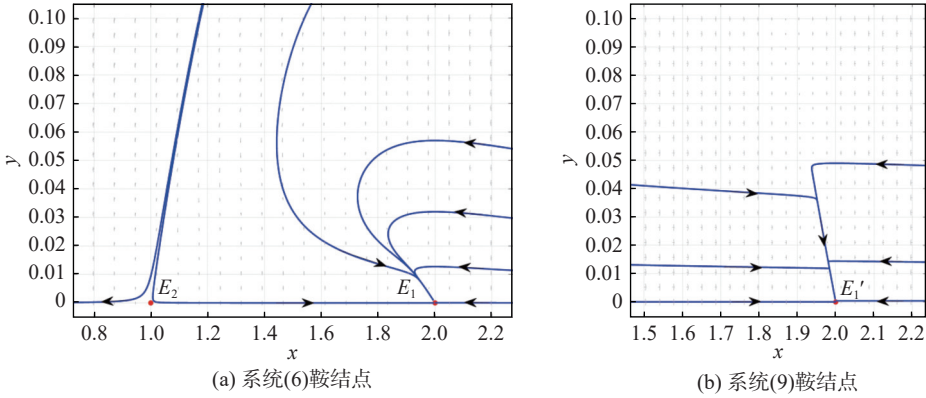


图 1 系统(5)在鞍结点附近的相图

Fig.1 Phase portraits of system (5) around saddle-node

4.2 Hopf 分支数值验证

选取 p 为分支参数, 固定 $q = 0.036\ 111\ 111\ 11$, $c = 0.2$ 、 $h = 0.1$ 、 $m = 1.5$, 解得 $p_H = 0.233\ 333\ 333\ 3$, 此时 $\sigma_{11} = 0.477\ 828\ 125 > 0$, 所以发生超临界 Hopf 分支。固定参数 q 、 c 、 m 、 h 的值不变, 当分支参数 $p > p_H$ 时, 系统 (6) 中 E^* 是一个不稳定的焦点, 如图 2(a); 当 p 减小为 $p = p_H$ 时, 不稳定焦点成为中心型平衡点, 如图 2(c); p 继续减小为 $p < p_H$ 时, 中心型平衡点成为了稳定的焦点, 如图 2(b)。为了更加直观地体现中心型平衡点附近的极限环, 给出图 2(c) 在 $(x, y) \in [1.96, 2.04] \times [0.48, 0.52]$ 时的放大相图, 如图 2(d)。当固定参数 $p = 1.163\ 415\ 128$ 、 $q = 0.607\ 849\ 589\ 4$ 、 $c = 1$ 、 $m = 10$ 、 $h = 0.000\ 65$ 时, $\sigma_{11} = 0$, 此时 E^* 是一个二阶的细焦点。首先对参数 p 进行扰动, 使其减少至 $p = 1.163\ 415\ 128 - 0.001$, 则 E^* 成为一阶不稳定细焦点, 并出现一个稳定的极限环(图 2(e) 中外极限环); 再对参数 q 进行扰动, 使其减少至 $q = 0.607\ 849\ 589\ 4 - 0.000\ 5$, 此时 E^* 成为稳定的双曲焦点, 另外产生一个不稳定的极限环(图 2(f) 中内极限环)。图 2(e)~(f) 显示了 E^* 附近两个极限环的存在性。

4.3 模型的时间序列图

可以通过绘制模型的时间序列图(简称时序图)来进一步说明其生物学意义, 这里用上述人为捕获情况下的参数设置。在无量纲变换的过程中, 注意到当参数 p 、 q 、 m 固定不变时, 恐惧因

子 k 只与参数 c 有关, 且 c 越大, k 越小。因此, 取 $p = \frac{20}{3}$ 、 $q = \frac{7}{3}$ 、 $m = 3$ 、 $h = 0.190\ 5$, 进行时序图的绘制, 将两个种群初始密度设置为 $x(0) = 0.5$ 、 $y(0) = 0.3$ 。

通过对比两张不同参数取值下的时序图, 可以发现: 在其余初始条件均相同的情况下, 当分支参数 c 超过临界值时, 正平衡点失去稳定性。设该临界值为 c_H , 当 $c < c_H$ 时, 如图 3(a), 两种群密度会趋于一个稳定的数值; 但随着参数 c 逐渐减小, 超过临界值变为 $c > c_H$ 时, 如图 3(b), 种群密度出现周期振荡。

进一步调整参数 c , 令 $c = 5.8$, 在恐惧程度系数 k 进一步减小的情况下, 两种群的振荡幅度都会增大。不难发现, 随着 k 进一步减小(即 c 进一步增大到 8.359), 振荡幅度会逐渐增大, 直到出现食饵种群灭绝。恐惧程度过低会导致种群灭亡, 由此可见, 适度的恐惧效应有利于两种群的共存。

5 总结与展望

本文研究了一类具有恐惧效应的 Holling II 型食饵-捕食者模型的动力学行为, 其中恐惧效应和常数捕获率对模型的影响是主要的研究内容。首先, 在系统具有生物学意义的前提下, 研究了系统的平衡点及其稳定性, 常数捕获率 h 主要影响平衡点的个数: 在人为捕获条件下, 系统至多有

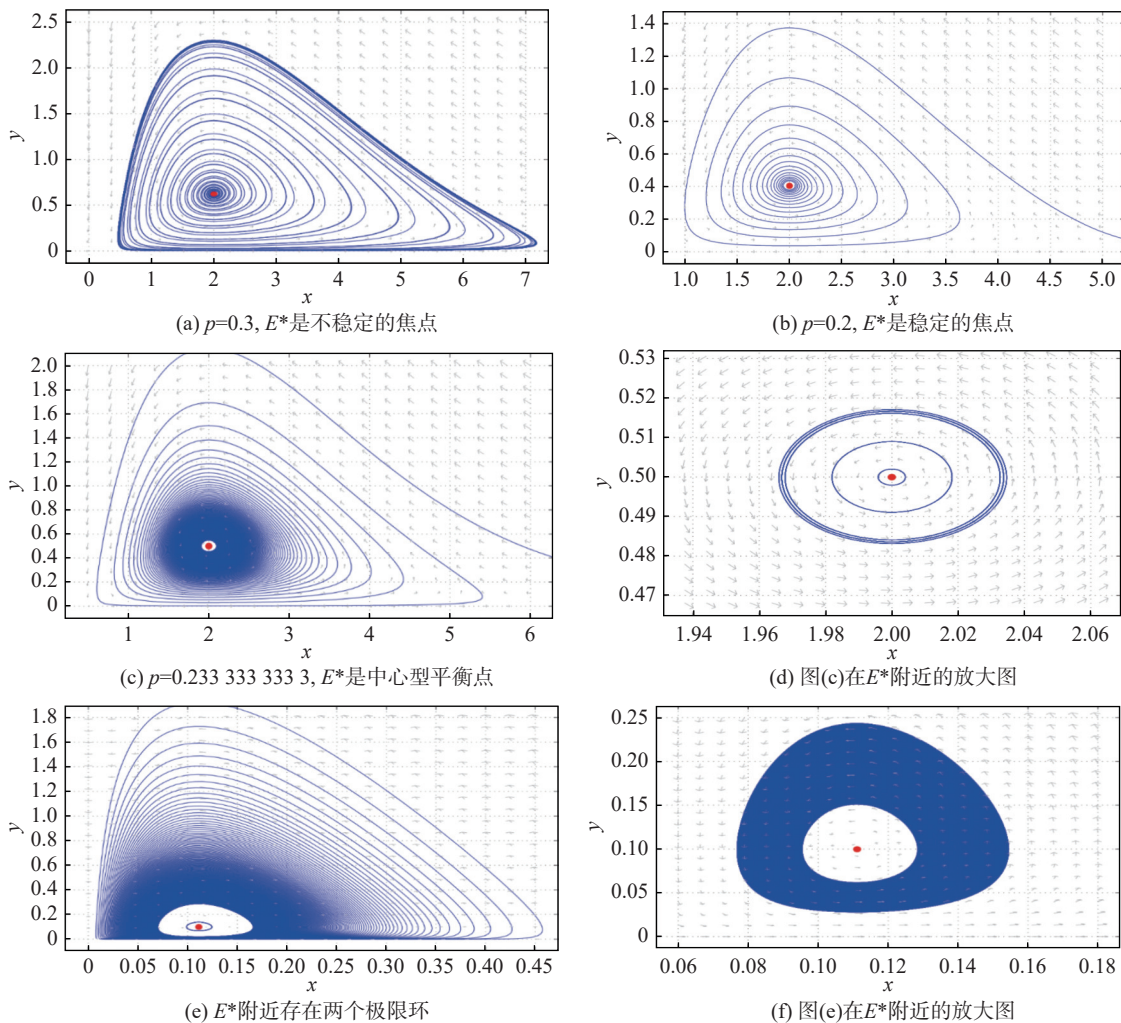
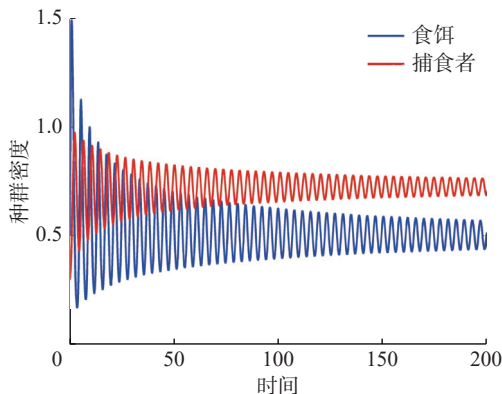
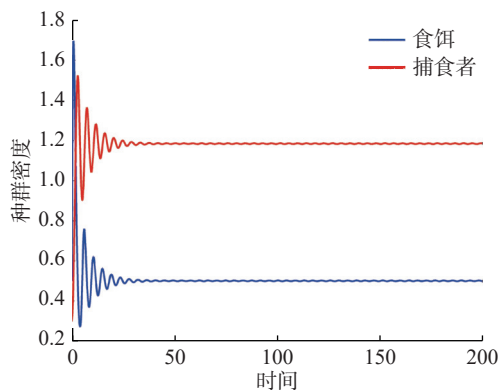


图2 系统(6)在 E^* 附近的相图

Fig.2 Phase portraits of system (6) around E^*

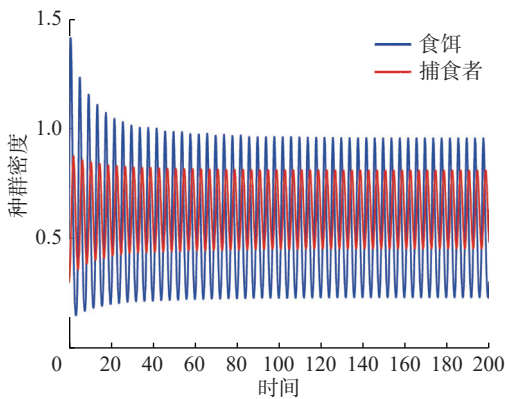
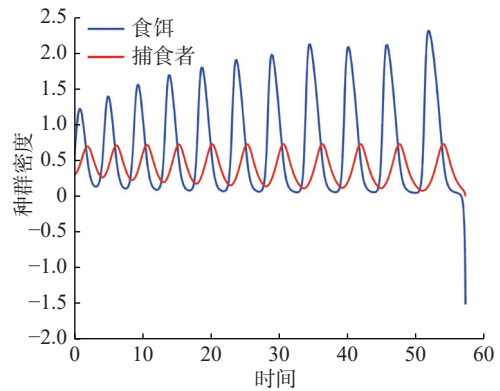
2个边界平衡点；在人为投放条件下，系统有且只有1个边界平衡点。系统有唯一正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$ ，这在人为捕获或者人为投放的条件下都成立。而当参数满足一定的条件时，系统会存在鞍结点。其次，通过对模型进行适当的变换，总结了系统

可能发生Hopf分支，并且当 $\sigma_{11} = 0$ 时，会发生退化Hopf分支。最后，通过数值模拟，绘制了鞍结点的相图、Hopf分支的相图和种群的时间序列图，验证了理论结果，并得出恐惧效应有利于食饵和捕食者的共存。当恐惧效应过低时，食



(a) 系统(6)时序图，其中 $c=1.9048$

(b) 系统(6)时序图，其中 $c=4.8$

(c) 系统(6)时序图, 其中 $c=5.8$ (d) 系统(6)时序图, 其中 $c=8.359$ 图3 系统(6)中参数 c 在不同值下的时序图Fig.3 Time series graph with different values of c in system (6)

饵和捕食者种群趋于灭绝。

本文研究的具有恐惧效应和常数捕获率的食饵-捕食模型所得的结论有助于理解恐惧效应和人工干预对生物种群的影响, 进而做出合适的决策来维持生物种群间的动态平衡。此外, 对模型考虑 Allee 效应和不同的功能反应函数, 种群的动力学行为影响也值得分析, 期望在后续工作中对这些问题深入研究。

参考文献:

- [1] LI B T, KUANG Y. Heteroclinic bifurcation in the Michaelis-Menten-type ratio-dependent predator-prey system[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2007, 67(5): 1453-1464.
- [2] MURRAY J D. *Mathematical biology: I. An introduction*[M]. 3rd ed. New York: Springer, 2007.
- [3] HUANG J C, GONG Y J, CHEN J. Multiple bifurcations in a predator-prey system of Holling and Leslie type with constant-yield prey harvesting[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2013, 23(10): 1350164.
- [4] LOTKA A J. *Elements of physical biology*[M]. London: Williams and Wilkins Company, 1925.
- [5] VOLTERRA V. Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically[J]. *Nature*, 1926, 118(2972): 558-560.
- [6] RUAN S G, XIAO D M. Imperfect and Bogdanov-Takens bifurcations in biological models: from harvesting of species to isolation of infectives[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2023, 87(1): 17.
- [7] WU H Q X, LI Z, HE M X. Dynamic analysis of a Leslie-Gower predator-prey model with the fear effect and nonlinear harvesting[J]. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2023, 20(10): 18592-18629.

- [8] LI Y J, HE M X, LI Z. Dynamics of a ratio-dependent Leslie-Gower predator-prey model with Allee effect and fear effect[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2022, 201: 417-439.
- [9] ZHANG X B, AN Q, WANG L. Spatiotemporal dynamics of a delayed diffusive ratio-dependent predator-prey model with fear effect[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2021, 105(4): 3775-3790.
- [10] WANG X Y, ZANETTE L, ZOU X F. Modelling the fear effect in predator-prey interactions[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2016, 73(5): 1179-1204.
- [11] CHEN M M, TAKEUCHI Y, ZHANG J F. Dynamic complexity of a modified Leslie-Gower predator-prey system with fear effect[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2023, 119: 107109.
- [12] WANG C H, WANG H, YUAN S L. Complex bifurcations and noise-induced transitions: a predation model with fear effect in prey and crowding effect in predators[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B*, 2023, 28(7): 3837-3867.
- [13] XIAO D M, RUAN S G. Bogdanov-Takens bifurcations in predator-prey systems with constant rate harvesting[J]. *Fields Institute Communications*, 1999, 21: 493-506.
- [14] STROGATZ S H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*[M]. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2018.
- [15] ZHANG Z F, DING T R, HUANG W Z, et al. *Qualitative theory of differential equation*[M]. LEUNG A W K, trans. Providence: American Mathematical Society, 1992.
- [16] PIRAYESH B, PAZIRANDEH A, AKBARI M. Local bifurcation analysis in nuclear reactor dynamics by Sotomayor's theorem[J]. *Annals of Nuclear Energy*, 2016, 94: 716-731.
- [17] XU Y C, YANG Y, MENG F W, et al. Degenerate

codimension-2 cusp of limit cycles in a Holling-Tanner model with harvesting and anti-predator behavior[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2024, 76: 103995.

- [18] XIANG C, HUANG J C, WANG H. Bifurcations in Holling-Tanner model with generalist predator and prey refuge[J]. *Journal of Differential Equations*, 2023, 343: 495–529.
- [19] YU R J, YU H G, DAI C J, et al. Bifurcation analysis of

Leslie-Gower predator-prey system with harvesting and fear effect[J]. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2023, 20(10): 18267–18300.

- [20] XIANG C, HUANG J C, WANG H. Linking bifurcation analysis of Holling-Tanner model with generalist predator to a changing environment[J]. *Studies in Applied Mathematics*, 2022, 149(1): 124–163.

(编辑: 董 伟)

(上接第 88 页)

- [4] HUGHES T J R, COTTRELL J A, BAZILEVS Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194(39/41): 4135–4195.
- [5] 吴紫俊, 黄正东, 左兵权, 等. 等几何分析研究概述 [J]. *机械工程学报*, 2015, 51(5): 114–129.
- [6] WALL W A, FRENZEL M A, CYRON C. Isogeometric structural shape optimization[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008, 197(33/40): 2976–2988.
- [7] SEO Y D, KIM H J, YOUN S K. Shape optimization and its extension to topological design based on isogeometric analysis[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, 47(11/12): 1618–1640.
- [8] 陈龙, 张高朋. 基于灵敏度分析的三维结构等几何形状优化方法 [J]. *中国机械工程*, 2017, 28(14): 1723–1729.
- [9] QIN X C, DONG C Y. NURBS-based isogeometric shape and material optimization of curvilinearly stiffened plates with FGMs[J]. *Thin-Walled Structures*, 2021, 162: 107601.
- [10] WANG C F, XIA S T, WANG X L, et al. Isogeometric shape optimization on triangulations[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, 331: 585–622.
- [11] CHEN L, WANG K, LI B T, et al. Shape optimization of fluid cooling channel based on Darcy reduced-order isogeometric analysis[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2022, 411: 114262.
- [12] 陈龙, 朱颖, 徐力, 等. 基于权重灵敏度分析的结构形状等几何优化方法 [J]. *中国机械工程*, 2020, 31(11): 1306–1314.
- [13] 凌然, 王宁, 徐岗, 等. 面向等几何分析的超弹性材料模型形状优化 [J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2025, 37(5): 753–762.
- [14] PIEGL L, TILLER W. *The NURBS book*[M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 1997.
- [15] CHEN L, ZHANG L L, WU Y N, et al. Isogeometric size optimization design based on parameterized volume parametric models[J]. *Computer-Aided Design*, 2024, 169: 103672.
- [16] 王宁. 基于等几何分析的超弹性三维模型动力学仿真及形状优化研究 [D]. 杭州: 杭州电子科技大学, 2023.

(编辑: 丁红艺)