

复杂二维几何模型等几何形状优化

吕帅帅, 陈龙, 李天箭

(上海理工大学机械工程学院, 上海 200093)

摘要: 针对传统有限元方法在形状优化方面存在形状描述误差、模型格式转换冗余的问题, 提出一种基于等几何分析的二维参数化多片模型形状优化方法。在建模阶段, 采用“尺寸参数+全四边形分块”的参数化框架, 将复杂二维模型分割构建为适配等几何分析的多片模型, 规避传统方法的模型转换环节。优化计算阶段, 构建“灵敏度引导+面片连接约束”的调控机制, 通过设计变量-柔度的灵敏度解析推导, 指导控制点和权重的迭代优化; 同时在面片连接处, 实现灵敏度的连续性调整, 保证相邻面片优化结果的连续和平滑; 优化过程中, 动态更新设计变量界限, 确保优化结果的可行性和稳定性, 避免优化模型生成失效。通过 3 个数值算例验证, 所提方法可有效降低模型柔度, 最大降幅达 30.8%。本文方法为复杂二维几何模型的高效形状优化提供一种新的方案和思路, 且可以进一步推广到三维体参数化模型的形状优化算法中, 进而为实现造型仿真优化的一体化奠定理论基础。

关键词: 形状优化; 柔度; 参数化模型; 等几何分析

中图分类号: TP 182 文献标志码: A

Isogeometric shape optimization of complex 2D geometric model

LÜ Shuaishuai, CHEN Long, LI Tianjian

(School of Mechanical Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: Traditional finite element methods suffer from issues such as geometric description errors and redundant model format conversion. To address these problems, a 2D parametric multi-patch model shape optimization method based on isogeometric analysis was proposed. In the modeling phase, a parametric framework integrating dimension parameters and all-quadrilateral partitioning was adopted. Complex 2D models were divided and constructed into multi-patch models compatible with isogeometric analysis, thus avoiding the model conversion step required by traditional methods. In the

收稿日期: 2025-01-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (52075340)

第一作者: 吕帅帅(1999—), 男, 硕士研究生。研究方向: CAD/CAE。E-mail: 18325720228@163.com

通信作者: 陈龙(1978—), 男, 教授。研究方向: 产品智能计算设计、机器视觉与机器人。E-mail: cl@usst.edu.cn

引文格式: 吕帅帅, 陈龙, 李天箭. 复杂二维几何模型等几何形状优化[J]. 上海理工大学学报, 2026, 48(1): 78-88.

Citation: LÜ Shuaishuai, CHEN Long, LI Tianjian. Isogeometric shape optimization of complex 2D geometric model[J]. Journal of University of Shanghai for Science and Technology, 2026, 48(1): 78-88.

optimization calculation phase, a control mechanism combining sensitivity guidance and patch connection constraints was established. The analytical derivation of design variable-compliance sensitivity was performed to guide the iterative optimization of control points and weights. Meanwhile, continuity adjustment of sensitivity was implemented at patch interfaces to ensure the continuity and smoothness of optimization results for adjacent patches. During the optimization process, the bounds of design variables were dynamically updated to guarantee the feasibility and stability of optimization results, thus preventing the failure of optimized model generation. Validated by three numerical examples, the proposed method could effectively reduce model compliance, with a maximum reduction rate of 30.8%. This method provides a novel approach for the efficient shape optimization of complex 2D geometric models. Furthermore, it can be further extended to the shape optimization algorithms of 3D parametric solid models, laying a theoretical foundation for the integration of modeling, simulation and optimization.

Keywords: *shape optimization; compliance; parametric model; isogeometric analysis*

结构优化根据其设计阶段的不同, 可分为多个层次, 如尺寸优化、形状优化和拓扑优化。尺寸优化是通过调整结构的尺寸(如厚度、长度、半径)来优化结构的性能; 而形状优化通过系统地调整结构的边界形态及其内部几何特性来实现; 拓扑优化则涉及对结构内部材料布局的根本性改变^[1]。本文重点研究二维多片结构应用的形状优化方法。结构应用中的形状优化方法旨在给定的设计空间内, 通过调整结构的几何边界或轮廓, 寻找最佳的形状配置, 以优化特定的性能指标, 如最小化柔度、减轻体积等^[2]。

在基于传统有限元方法的形状优化中, 边界节点坐标常作为设计变量, 但会导致不规则边界和过多变量, 多项式边界表示虽平滑, 但高阶时会出现振荡且缺乏局部控制^[3]。Hughes 等^[4]于 2005 年提出等几何分析, 用 NURBS 构建几何模型作为计算域和形函数, 提供局部控制和平滑边界。该方法逐渐成为当前形状优化领域中的重要选择, 研究已取得一定进展^[5]。Wall 等^[6]提出基于等几何分析的形状优化框架, 推导 NURBS 离散化的解析灵敏度, 使得高效的梯度优化算法得以应用。Seo 等^[7]将等几何分析应用于形状与拓扑优化, 推导以控制点坐标作为设计变量的相关灵敏度方程, 解决传统有限元法在参数化及网格重构方面的不足。陈龙等^[8]将权重系数引入设计变量, 提出基于灵敏度的形状优化计算方法处理简单单片模型。Qin 等^[9]使用 NURBS 解决曲率加强板的形状和材料优化, 推导敏感度公式, 通过控制加强肋坐标和 FGMs 材料分布以最小化体积分

数, 提升参数化和网格重构的效率。Wang 等^[10]提出基于 Bezier 三角形的等几何形状优化方法, 使用相同基函数表示几何和物理场, 导出形状灵敏度, 优化过程中保证网格质量, 减少重构次数, 提升优化效率。Chen 等^[11]针对流体冷却通道的形状优化问题, 提出基于 Darcy 降阶等几何分析的灵敏度计算方法。陈龙等^[12]给出多种目标灵敏度推导结果, 基于 Coons 体插值方法, 实现三维单片模型的形状优化。凌然等^[13]提出基于等几何分析的超弹性材料形状优化方法, 实现高效精准的结构设计与分析。

上述方法主要针对边界点进行形状优化, 无法对模型内部控制点的变化进行精确控制。分析复杂模型时, 等参线易出现分布不均, 影响等几何分析优化的结果。此外, 主要进行单片优化, 未讨论多片模型中片与片交界点处的连续性。

本文针对复杂二维形状, 建立适用于等几何分析的多片参数化模型。这种建模方法允许设计者通过调整少量的关键参数来修改产品模型, 实现参数化建模与形状优化的有效结合。对面片重合处的相关控制点进行处理, 实现考虑连续性的形状优化。通过等几何分析方法建立优化模型, 并对灵敏度方程进行推导, 最终通过实例验证多片模型形状优化的可行性。

1 NURBS 与等几何分析基础

1.1 NURBS 基础

非均匀有理 B 样条 (non-uniform rational B-

splines, NURBS)是一种通过加权控制点和多项式基函数来构建复杂几何形状的数学模型^[14]。因其高精度和灵活性, NURBS 广泛应用于计算机图形学、工程设计和数值模拟, 特别是在计算机辅助设计(CAD)、计算机辅助制造(CAM)和计算机辅助工程(CAE)领域。对于B样条基函数有以下分段常数递推公式:

$$\begin{cases} p=0 \text{ 时, } N_{i,0}(r) = \begin{cases} 1, r_i \leq r < r_{i+1} \\ 0, \text{其他} \end{cases} \\ p>0 \text{ 时, } N_{i,p}(r) = \frac{r-r_i}{r_{i+p}-r_i} N_{i,p-1}(r) + \frac{r_{i+p+1}-r}{r_{i+p+1}-r_{i+1}} N_{i+1,p-1} \end{cases} \quad (1)$$

式中: p 表示基函数的次数; $N_{i,p}(r)$ 表示第 i 个 p 次基函数; r_i 表示节点向量中的节点值, $i=1, \dots, n$ 为控制点的索引。

以二维平面结构力学问题为例, 其几何函数使用 NURBS 曲面来表示, 这种表示方式通过张量积形式定义为

$$S(r, s) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{N_{i,p}(r) M_{j,q}(s) w_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(r) M_{j,q}(s) w_{i,j}} \mathbf{P}_{i,j} \quad (2)$$

式中: r 、 s 分别为曲面第一、第二参数方向的参数值; $w_{i,j}$ 为第一、第二参数方向权重; $\mathbf{P}_{i,j}$ 为第一、第二参数方向控制点; i 、 j 分别为第一、第二参数方向的控制点索引, n 、 m 分别为对应方向的控制点总数; $M_{j,q}(s)$ 为第二参数方向第 j 个 q 次基函数。

引入分段有理基函数 $R_{i,j}$:

$$R_{i,j}(r, s) = \frac{N_{i,p}(r) M_{j,q}(s) w_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(r) M_{j,q}(s) w_{i,j}} \quad (3)$$

式(2)可整理为

$$S(r, s) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}(r, s) \mathbf{P}_{i,j} \quad (4)$$

1.2 二维线弹性的等几何分析

对于线弹性问题, 依据最小势能原理和虚功原理, 可以推导出离散化整体平衡方程:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (5)$$

式中: \mathbf{K} 为刚度矩阵; \mathbf{u} 为施加外力作用下的位移矢量; \mathbf{F} 为外力组成矩阵。

单元刚度矩阵 \mathbf{K}_e 表示如下:

$$\mathbf{K}_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\xi d\eta = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D} \mathbf{B}_e |\mathbf{J}_1| |\mathbf{J}_2| w_e \quad (6)$$

其中,

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial R_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial R_k}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial R_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial R_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial R_k}{\partial y} \\ \frac{\partial R_1}{\partial y} & \frac{\partial R_1}{\partial x} & \frac{\partial R_2}{\partial y} & \frac{\partial R_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial R_k}{\partial y} & \frac{\partial R_k}{\partial x} \end{bmatrix} \\ |\mathbf{J}_1| = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \\ |\mathbf{J}_2| = (r_{i+1} - r_i)(s_{j+1} - s_j)/4 \end{cases} \quad (7)$$

式中: \mathbf{B} 为应变-位移矩阵, 其元素由式(3)所示的有理基函数对物理坐标 x 和 y 的偏导数构成; R_k 中下标 k 为当前单元对应的控制点数; \mathbf{D} 为本构矩阵, 含材料弹性模量 E 与泊松比 ν ; $|\mathbf{J}_1|$ 、 $|\mathbf{J}_2|$ 分别实现物理单元到参数坐标系、参数坐标系到母单元坐标系(参数坐标 ξ 、 η , 范围 $[-1, 1]$) 的转换, 二者乘积为总雅可比行列式 $|\mathbf{J}|$; 数值积分中, n_e 为积分点总数, e 为积分点索引 ($e=1, \dots, n_e$), w_e 为积分点权重。

1.3 等几何形状优化方法流程

对于二维模型, 该结构的形状优化数学模型表达式如下:

$$\begin{cases} \min f(\mathbf{c}) = \mathbf{F}^T \mathbf{u}(\mathbf{c}) \\ \text{s.t.} \\ S \leq S^* \\ c_{\min,i} \leq c_i \leq c_{\max,i} \end{cases} \quad (8)$$

式中: \mathbf{c} 为设计变量向量, c_i 为第 i 个设计变量, $c_{\min,i}$ 和 $c_{\max,i}$ 分别为其下限和上限; $f(\mathbf{c})$ 表示柔度方程; $\mathbf{u}(\mathbf{c})$ 为位移函数, 受设计变量的影响; S 表示模型总面积; S^* 为约束面积上限。

二维多片几何形状优化流程按以下步骤执行:

a. 参数化建模与导数获取。输入等几何多片混合参数化模型, 得到控制点设计变量导数。

b. 灵敏度计算与变量更新。通过几何分析程序计算上述导数的灵敏度数值与响应, 将结果输入 MMA(method of moving asymptotes) 优化算法, 更新设计变量。

c. 迭代终止判断。检查是否满足优化终止条件: 若满足, 则停止优化; 若不满足, 依据迭代

步骤更新设计变量界限。重复步骤 a~b, 直至得到最优设计变量。

不同于传统单片模型形状优化的整体分析思路, 本文方法通过精细化切分复杂模型, 聚焦关键区域, 结合参数化建模与特征框架技术, 在优化过程中精准管理重合控制点, 显著减少无效计算, 提升形状优化的效率与结果可靠性。

2 复杂等几何形状优化模型构建

2.1 特征框架与特征构建

本文采用一种结合参数化建模与特征框架的方法, 以满足等几何形状优化建模需求。该方法将特征框架分为语义和几何两部分, 通过3层参数映射简化建模流程, 实现高层参数对底层参数的控制。

构建语义特征框架旨在通过对特征进行参数化并分层控制模型参数, 解决传统方法中存在的维度灾难和参数冗余问题^[15]。该框架通过将模型参数分为3个层次(高层参数、中层参数和低层参数), 减少用户输入的尺寸参数, 简化建模过程, 同时保留模型的关键特征。存在式(9)形式的语义特征框架:

$$\Psi = \{V, Z, Q\} \quad (9)$$

式中: V 表示为特征点、特征线、特征面3种特征元素集合, 如 $V = \{V_{i,0}, \dots, V_{i,n}\}$; Z 表示高(长度、宽度等)、中(圆弧半径等)、低(面片上角点、曲线上拐点等)3层各自尺寸参数集合; 如 $Z = \{Z_{1,k}, Z_{2,k}, \dots, Z_{n,k}\}$; Q 表示参数层的映射。

在构建几何特征框架时, 特征点作为关键元素, 通过多层映射确定, 每个特征点在二维模型中具有坐标 (x_i, y_i) , 其中 $i=1,2,\dots,n$, n 为特征点的总数。特征线连接各层, 体现高层次对低层次的影响, 并保持局部特征形态。创建特征线前需根据 NURBS 特性和尺寸参数确定特征点位置, 通过插值或拟合形成轮廓。直线型特征线的形状由尺寸与角度参数共同约束, 其几何构成如图1所示。图中: P_0 为起始控制点; α 为直线与 X 轴的夹角; L 是直线长度; P_1 、 P_2 是中间控制点与端点。由 P_0 、 L 、 α 确定 P_2 , 再取 P_0 与 P_2 的中点得到 P_1 , 形成直线控制点集, 对应到语义特征框架。直线的具体集合为: 特征元素集 $V = \{V_{L,0}\}$; 尺寸参数集 $Z = \{P_0, L, \alpha\}$; 映射集 $Q: Z \rightarrow \{P_0, P_1, P_2\}$, 其

中, $P_2 = P_0 + (L \cos \alpha, L \sin \alpha)$, $P_1 = (P_0 + P_2)/2$ 。

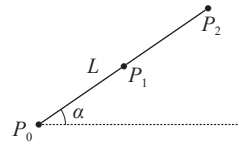


图1 特征直线

Fig.1 Characteristic straight line

圆弧在模型中通过 NURBS 使用3个控制点实现精确表达, 如图2所示。图中: ρ 为圆弧半径; O 为圆弧圆心; θ 为圆弧对应的圆心角; β 为辅助角度; P_0 、 P_2 是圆弧端点, P_1 是弧顶控制点。对应式(9)的语义特征框架: V 对应特征圆弧元素; Z 对应圆弧半径、圆心角等尺寸参数集合; Q 对应其控制点的生成映射。

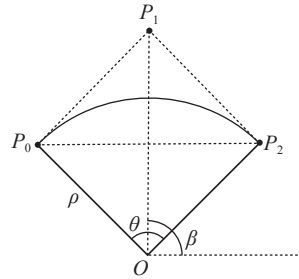


图2 二次 NURBS 特征圆弧

Fig.2 Quadratic NURBS feature arc

对于自定义的曲线通过参数驱动法, 由定位特征点拟合成 NURBS 曲线, 如图3所示: $P_0 \sim P_4$ 为定位特征点; $H_{i,j}$ 和 $L_{i,j}$ 分别表示第 i 与第 j 特征点间的高度与水平距离; L 为曲线总长。自定义曲线沿用前述语义特征框架, 其尺寸参数含定位特征点、高宽参数 $\{H_{i,j}\}$ 、 $\{L_{i,j}\}$ 及总长 L , 映射关系由定位点参数驱动生成 NURBS 控制点。

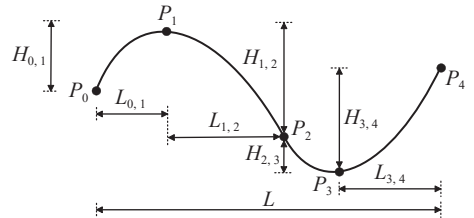


图3 自定义特征曲线

Fig.3 Custom feature curve

特征面构建中, 外部特征线界定轮廓, 内部约束线决定形状。构建步骤包括: 定义框架尺寸参数; 获取特征线草图并提取细节特征; 通过拓扑组合形成封闭区域。例如, 通过端点相连构建矩形或圆形特征。常用形状可预存于特征库, 减少重复工作。创建新特征时, 基于已有特征库, 通过交互添加和拓扑操作进行组合, 以适应复杂需求。

2.2 模型分割

在处理复杂的二维多片模型时,通过模型分割提高设计和建模效率,增强灵活性和可维护性。基于特征框架,通过给定尺寸及其参数关系生成关键点,确定四边形子域的边界曲线,各子域采用NURBS曲面表示。

对于二维模型,通过路径分割实现模型子片的建立。具体步骤如下:首先,逐步插入多个节点,直至在非首末位置检测到重复度为2的节点。例如,假设初始节点矢量为 $U=\{0,0,0,1,1,1\}$,

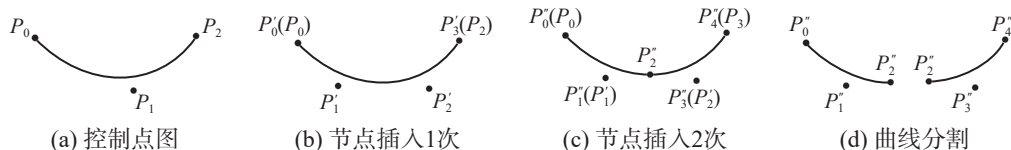


图4 曲线分割步骤

Fig.4 Curve segmentation steps

2.3 参数化模型生成

在形状优化中,部分优化策略可以在保证模型整体性和稳定性的同时,提高计算效率和实际应用的可行性。因此,在最终参数化模型输出前需要进行优化区域的确定,最终实现数值与参数控制点的设定。整个建模过程如图5所示。

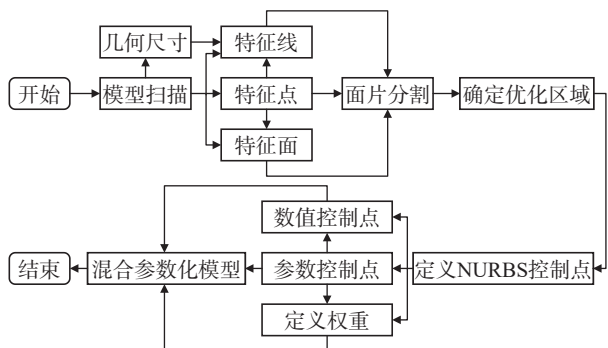


图5 基于等几何分析的多片建模流程

Fig.5 Multi-patch modeling process based on isogeometric analysis

在等几何多片模型的形状优化中,保持模型的连续性对于确保物理准确性和数值稳定性至关重要。为确保各面片之间的连续性,在模型共享边界上设定参数控制点。这些控制点同时属于前后两个面片,从而确保片与片之间平滑的连接。而对于模型内部控制点,通过相邻边界控制点的中点位置进行合理设定,实现内部控制点的参数化。通过将这些控制点参数化的方式,当一个面片被修改时,相邻的面片也能随之作出相应的调整。进一步地,本文采用具有高阶连续性的

曲线次数为2。为了在 $u=0.5$ 处进行分割,需要在该位置插入两次节点,新的节点矢量变为 $T=\{0,0,0,0.5,0.5,1,1,1\}$ 。最后,在 $u=0.5$ 处将曲线一分为二,完成路径的精确分割。通过这些步骤,可以确保二维多片模型的各个部分能够独立处理,适用于路径上有明显变化的模型,保证每个部分的几何特征被准确表示和优化。曲线分割过程如图4所示,其中控制点名称后的单撇号(')和双撇号('')分别表示第一次和第二次节点插入后生成的新控制点,括号内标注其对应的原始控制点。

NURBS曲线来增强面片间的平滑度,并通过参数化定义优化区域内的控制点权重,确保在优化过程中保持几何连续性。在构建本文所述的二维多片模型时,每片均基于 3×3 的控制点网格。如果需要对节点模型进行更精细的优化,则需按照上述流程重新生成模型。

3 形状优化算法

3.1 灵敏度公式推导

灵敏度分析用于评估系统响应对输入参数变化的敏感程度,通过计算偏导数确定输入参数对输出的影响。本文采用等几何分析方法,以最小化柔度为目标进行形状优化研究。在本节中,基于1.3节中给出的优化问题数学模型,推导目标函数式(8)关于优化变量的灵敏度:

$$\frac{df(c)}{dc} = \frac{d[F]^\top}{dc} [u] + [F]^\top \frac{d[u]}{dc} = [F]^\top \frac{d[u]}{dc} \quad (10)$$

式中, F 的偏导为0。

$$[K] \frac{d[u]}{dc} + \frac{d[K]}{dc} [u] = 0 \quad (11)$$

$$\frac{d[u]}{dc} = -[K]^{-1} \frac{d[K]}{dc} [u] \quad (12)$$

式(11)由平衡方程对设计变量偏导求得,进一步通过等式变换推导出式(12)。将式(12)代入式(10),得到灵敏度推导简化式(13),在式中计算的必要项目是 $\frac{dK}{dc}$ 。

$$\frac{df(\mathbf{c})}{d\mathbf{c}} = [\mathbf{F}]^T \frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathbf{c}} = -\mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{K}}{d\mathbf{c}} \mathbf{u} \quad (13)$$

对于多片模型, 由式(6)可以得到如下方程:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{c}} = \sum_{t=1}^{n_t} \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{g=1}^{n_g} \left(\frac{\partial \mathbf{B}_e^T}{\partial \mathbf{c}} \mathbf{D} \mathbf{B}_e | \mathbf{J}_{|e} + \mathbf{B}_e^T \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{B}_e}{\partial \mathbf{c}} | \mathbf{J}_{|e} + \mathbf{B}_e^T \mathbf{D} \mathbf{B}_e \frac{\partial | \mathbf{J}_{|e}}{\partial \mathbf{c}} \right) w_g \quad (14)$$

式中: t 为模型片数, n_t 为模型总片数; g 为高斯点的编号, n_g 为总的高斯点数量; w_g 为第 g 个高斯点变换后的积分权重系数。

为了推导 $\frac{\partial \mathbf{B}_e}{\partial \mathbf{c}}$ 与 $\frac{\partial | \mathbf{J}_{|e}}{\partial \mathbf{c}}$, 需要求解应变矩阵

$$\mathbf{B}$$
中对应形函数的偏导。设 $\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_k}{\partial r} \\ \frac{\partial R_k}{\partial s} \end{bmatrix}$, $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_k}{\partial x} \\ \frac{\partial R_k}{\partial y} \end{bmatrix}$,

为方便计算, 使用 R_k 代表对应的有理基函数, 则有:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_k}{\partial r} \\ \frac{\partial R_k}{\partial s} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_1 \begin{bmatrix} \frac{\partial R_k}{\partial x} \\ \frac{\partial R_k}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_1 \mathbf{H} \quad (15)$$

由式(15)可得 $\mathbf{H} = \mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{\Gamma}$, 对于式中雅可比矩阵, 通过 NURBS 曲面公式可得:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_k}{\partial r} \\ \frac{\partial R_k}{\partial s} \end{bmatrix} \mathbf{P} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{P} \quad (16)$$

令控制点总数为 n , 每个控制点具有坐标 (x_i, y_i) 和权重 w_i , $i=1, 2, \dots, n$ 。定义 $\mathbf{c}_g = [x_1, y_1, \dots, x_n, y_n]^T$, $\mathbf{c}_w = [w_1, \dots, w_n]^T$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_g \\ \mathbf{c}_w \end{bmatrix}$, 当仅将几何坐标 \mathbf{c}_g 作为设计变量时, 求解 \mathbf{H} 和 $\mathbf{\Gamma}$ 对其的偏导数。则有:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{c}_g} = \frac{\partial \mathbf{J}_1^{-1}}{\partial \mathbf{c}_g} \mathbf{\Gamma} = -\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{c}_g} \mathbf{H} \quad (17)$$

对于单元雅可比矩阵行列式 $| \mathbf{J}_{|e}$, 可表示为 $| \mathbf{J}_{|e} = | \mathbf{J}_1 | e | \mathbf{J}_2 | e$, 则其对设计变量 \mathbf{c}_g 的偏导为

$$\frac{\partial | \mathbf{J}_{|e}}{\partial \mathbf{c}_g} = | \mathbf{J}_{|e} \cdot \text{tr} \left(\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{c}_g} \right) \quad (18)$$

式(18)中利用矩阵迹的循环不变性, 获得最终单元雅可比矩阵行列式对应的偏导。当 \mathbf{c} 为设计变量时, 求解 $\mathbf{\Gamma}$ 与 \mathbf{H} 的相应偏导, 则有:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{c}} = \frac{\partial \mathbf{J}_1^{-1}}{\partial \mathbf{c}} \mathbf{\Gamma} + \mathbf{J}_1^{-1} \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial \mathbf{c}_w} = -\mathbf{J}_1^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial \mathbf{c}_w} \mathbf{P} + \mathbf{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{c}_g} \right) \mathbf{H} + \mathbf{J}_1^{-1} \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial \mathbf{c}_w} \quad (19)$$

由式(19), 存在偏导数项 $\frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial \mathbf{c}_w}$, 对其进行进一步计算, 根据式(4)有理基函数, 设

$$\Lambda = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(r) M_{j,q}(s) w_{i,j},$$

$$w' = \frac{\partial w_{i,j}}{\partial \mathbf{c}_w}, \quad \Lambda' = \frac{\partial \Lambda}{\partial r},$$

$$\Phi = N_{i,p}(r) M_{j,q}(s), \quad \Phi' = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

则有:

$$\frac{\partial^2 R_k}{\partial r \partial \mathbf{c}_w} = \frac{\Phi' w'}{\Lambda} - \frac{\Phi w' \Phi'}{\Lambda^2} + \frac{\Phi w w' \Phi'}{\Lambda^3} - \frac{\Phi' w w' + \Phi w w'}{\Lambda^2} \quad (20)$$

式(20)利用商规则获得对应偏导数, 其中参数 r 与 s 等价, 进而获得变量 $\mathbf{\Gamma}$ 对权重偏导等式的整体求解。对于单元雅可比行列式 $| \mathbf{J}_{|e}$, 其对设计变量 \mathbf{c} 的偏导, 由式(18)同理可得:

$$\frac{\partial | \mathbf{J}_{|e}}{\partial \mathbf{c}} = | \mathbf{J}_2 | e \frac{\partial | \mathbf{J}_1 | e}{\partial \mathbf{c}} = | \mathbf{J}_{|e} \text{tr} \left(\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{c}_g} + (\mathbf{J}_1)_e^{-1} \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial \mathbf{c}_w} \right) \quad (21)$$

对约束函数中关于模型面积 S 的设计变量导数表示为

$$\frac{dS}{d\mathbf{c}} = \sum_{t=1}^{n_t} \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{g=1}^{n_g} \frac{\partial | \mathbf{J}_{|e}}{\partial \mathbf{c}} w_g \quad (22)$$

3.2 形状优化算法实现

在多片模型的形状优化中, 通过定义独立参数确保控制点的灵活性。优化过程中, 共享边界上的控制点及内部控制点在多个面片间同步更新, 以维持平滑过渡。确保即使单个面片的边界控制点变动, 相邻面片也能自动适应, 保持模型的连续性和协调性。

由于面片连接处存在控制点重合, 需进行参数化模型控制点处理。利用相邻面片已有的导数信息来替代重合控制点的导数, 确保计算过程中的维度一致性和数值稳定性。这种方法避免因控制点重合导致的计算异常, 保障优化过程的顺利进行。为更具体地展示在二维多片模型中对重合控制点的操作, 本文选择一个具有代表性的二维拱形多片结构模型作为案例。该模型由两个相邻的面片组成, 其控制点分布如图6所示。其中, a_1, a_2, a_3, a_4 是设计变量。每个面片由 3×3 控制点组成, 模型的内圈为设计区域, 中间圈的控制

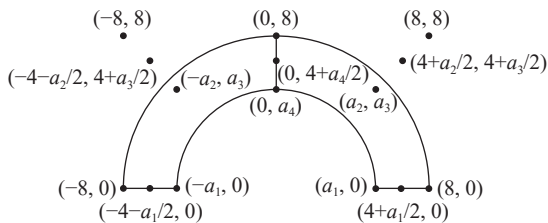


图6 拱形多片结构控制点分布

Fig.6 Control point distribution for arched multi-patch structure

点为相邻边界的中点，外层的控制点为固定数值。

为便于说明，对面片控制点坐标进行提取，并在表1中列出相关操作。拱形模型的左侧面片标记为面片1，右侧标记为面片2。

表1适用于处理两个相邻面片的控制点。在由多个面片组成的二维模型中，需对所有相邻面片重复这一流程，通过算法获得最终所有控制点。随后，计算模型控制点关于设计变量的导数，以便进行后续优化流程。

在优化过程中采用MMA算法时，通过设定明确的目标函数来有效优化模型形状。算法中的KKT条件检测函数用于评估每次迭代是否满足最优性条件，并根据评估结果调整优化策略。具体而言，利用检测结果更新设计变量，确保每次迭代都在合理边界内进行。此外，每当设计变量发生变化时，依据上述重合控制点处理策略，即时

表1 控制点处理前后对比

Tab.1 Comparison of control points before and after processing

| 控制点处理阶段 | 控制点坐标 |
|---------|--|
| 初始控制点 | $(-a_1, 0), (-a_2, a_3), (0, a_4)$ |
| | $(-4-a_1/2, 0), (-4-a_2/2, 4+a_3/2), (0, 4+a_4/2)$ |
| | $(-8, 0), (-8, 8), (0, 8)$ |
| 重合控制点 | $(0, a_4), (a_2, a_3), (a_1, 0)$ |
| | $(0, 4+a_4/2), (4+a_2/2, 4+a_3/2), (4+a_1/2, 0)$ |
| | $(0, 8), (8, 8), (8, 0)$ |
| 最终控制点 | $(0, a_4), (0, 4+a_4/2), (0, 8)$ |
| | 保持不变 |
| 面片1 | $(-a_1, 0), (-a_2, a_3), (0, a_4)$ |
| | $(-4-a_1/2, 0), (-4-a_2/2, 4+a_3/2), (0, 4+a_4/2)$ |
| | $(-8, 0), (-8, 8), (0, 8)$ |
| 面片2 | $(a_1, 0), (a_2, a_3), (0, a_4)$ |
| | $(4+a_1/2, 0), (4+a_2/2, 4+a_3/2), (4+a_1/2, 0)$ |
| | $(8, 0), (8, 8), (8, 0)$ |

更新和校正控制点数据，以维持模型几何形状的合理性并避免失真。监测设计变量的变化趋势，并据此适时调整其上下限，以此来缩小搜索空间，加快收敛速度，同时避免生成无效方案。采用双循环迭代架构：外层循环驱动设计变量的全局更新，内层循环实施多片模型的刚度耦合计算，同步处理几何连续性约束与柔度泛函评估。通过参数空间重网格化技术动态优化控制点分布，在规避物理网格畸变的同时显著提升敏度计算效率，等几何二维多片模型形状优化流程如图7所示。

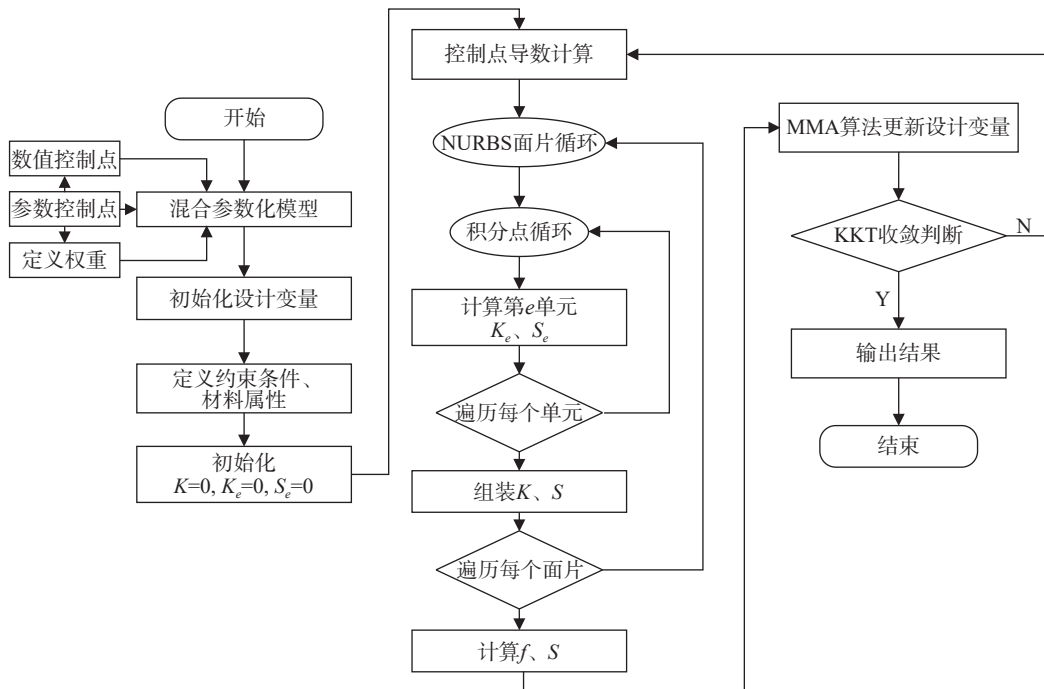


图7 等几何二维多片模型形状优化流程

Fig.7 Shape optimization process for a 2D multi-patch isogeometric model

4 形状优化算例与讨论

4.1 算例 1

为验证提出方法的有效性, 本文选取由 Seo 等^[7]提出的板孔模型作为基准模型。由于该文献模型在形状优化中被广泛使用并表现出优异性能, 因此, 被认为是当前研究中最可靠的参考之一^[6-7,16]。通过实验验证, 确立本文方法的可靠性, 为后续复杂模型的研究提供坚实的数据支持。文献中进行了单片(1/4带孔平板)模型的优化分析, 通过调整控制点位置来改善结构性能: 初始控制点导致柔度过高和较大变形, 而优化后的控制点因重新

分布而有效降低了柔度, 减少关键区域的材料冗余, 从而显著改善模型的几何形状和性能。图 8展示了从 Seo 等^[7]工作中引用的 1/4 带孔平板(单片)模型的形状优化案例。其中, 图 8(a)为初始设计模型, 可清晰观察到板孔的初始直线型轮廓及控制点(图中红色点)的均匀分布状态, 这一初始布局对应前文所述“柔度过高、变形较大”的结构特征。图 8(b)为形状优化结果图, 在控制点位置调整后, 板孔轮廓呈现贴合性能需求的平滑曲线形态, 这一轮廓形态的调整, 与前文“优化后柔度降低、关键区域材料冗余减少”的结构性能改善形成对应。

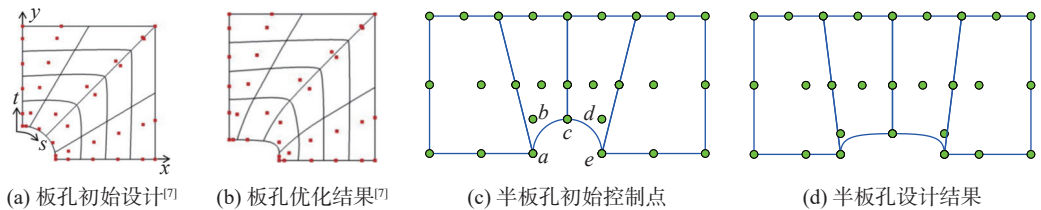


图 8 板孔模型^[7]与半板孔模型形状优化结果

Fig.8 Shape optimization results of plate hole model^[7] and half plate hole model

本文使用半板孔模型(即板孔模型的一半), 以控制点与权重为设计变量进行等几何形状优化。模型采用 4 片组合结构, 每片使用 3×3 控制点网格离散, 节点向量为 $U = \{000111\}$ 和 $V = \{000111\}$, 次数 $p = q = 2$, 初始权重 $w = 1$ 。在模型右侧控制点上施加 $F = 200 \text{ N}$ 的点力, 左侧固定约束。材料参数: 杨氏模量为 210 GPa, 泊松比为 0.3。选取图 8(c)中 a~e 这 5 个控制点进行设计优化, 其余边界控制点为非设计区域。优化之后原初始的优化区域半圆形轮廓经历了一定程度的变形, 最

终呈现出近似半椭圆的形态(图 8(d))。

对比图 8(b)、(d)的结果可知, 本方法以柔度降低为目标, 与文献 [7] 中位移降低和等效应力降低来评估优化效果的研究相比, 其结果显示出相似的趋势。这不仅验证了形状优化对于提高结构整体性能的普遍正面影响, 也证明本研究提出的优化方法在实际应用中的有效性和可行性。半板孔模型优化前后的柔度与面积收敛曲线如图 9 所示, 数值对比见表 2。结果表明, 在满足面积约束时, 柔度显著降低。

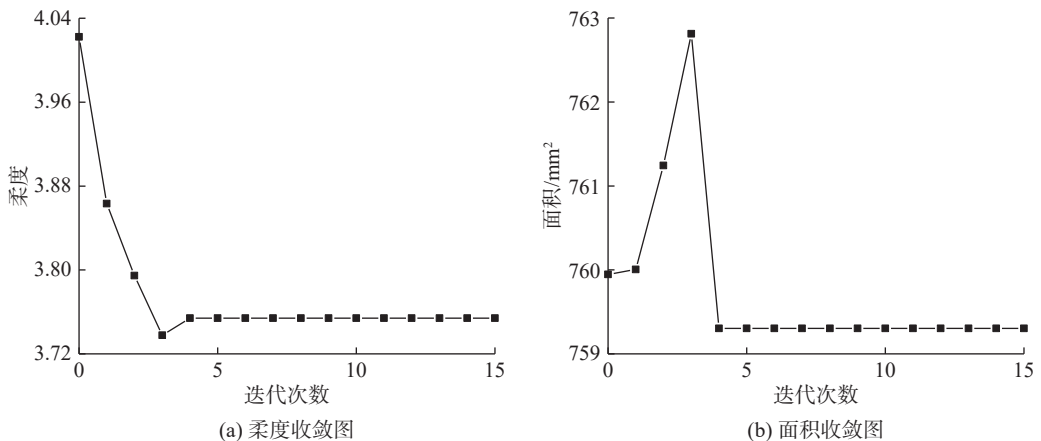


图 9 优化目标与约束收敛图

Fig.9 Convergence chart of optimization objectives and constraints

表2 半板孔多片模型优化前后对比

Tab.2 Comparison of the multi-patch model for a half plate hole before and after optimization

| 优化阶段 | 柔度 | 面积/mm ² |
|------|---------|--------------------|
| 优化前 | 4.02229 | 759.947 |
| 优化后 | 3.75411 | 759.304 |

4.2 算例2

在通过算例1的基准测试模型验证新方法的基础上,探讨同时优化控制点位置和权重的可行性与所提出方法的有效性。为全面分析各因素对优化结果的影响并揭示不同优化策略的效果,在算例2中,采用一个简单的吊钩模型来进行优化分析。通过对比两种不同的设计变量方案,展示这些方法在基础结构优化中的应用效果,并提供易于理解的结果对比,突出不同设计变量的影响。

吊钩模型底部施加50 N的集中力,顶部固定,尺寸如图10(a)所示: $R_1=2\text{ mm}$, $R_2=7\text{ mm}$, $R_3=15\text{ mm}$, $R_4=20\text{ mm}$, $b=42\text{ mm}$ 。节点向量、次数与材料参数同算例1。图10(b)显示了控制点的初始分布,后续将对其中 $a\sim i$ 共9个标号控制点进行优化。

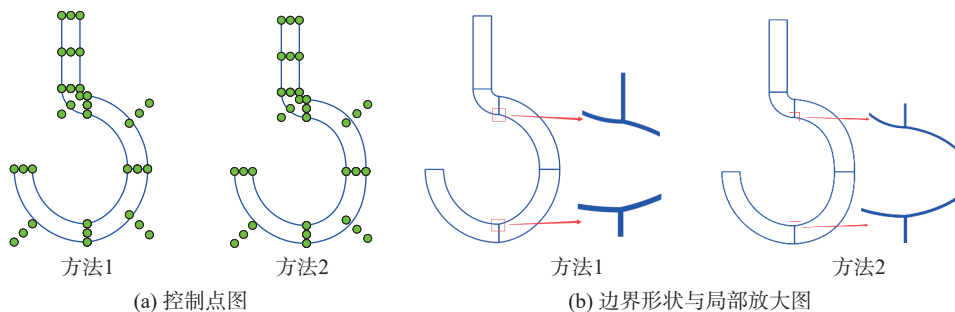


图11 吊钩模型形状优化结果图

Fig.11 Shape optimization result diagram of the hook model

图11中,方法1以控制点为单一设计变量,方法2以“控制点+权重”为设计变量,二者均为最终优化形状。对比可见:方法1的面片衔接处存在弯折、突起等几何缺陷;而方法2有效改善这些问题,优化后模型边界呈现更光滑的连续曲线。图12中(a)、(b)为方法1柔度面积收敛图,(c)、(d)为方法2柔度面积收敛图。从图中可直观看出,两种方法的柔度与面积均随迭代次数增加逐渐收敛,但收敛速率与最终稳定值存在差异,其数据对比如表3所示。

在满足面积约束条件下,模型优化结果显示方法1使柔度降低6.7%,方法二则使柔度降低

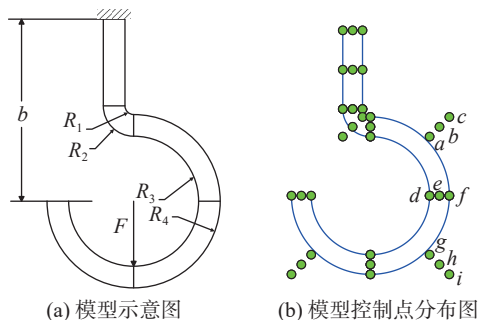


图10 吊钩初始多片模型尺寸及控制点分布图

Fig.10 Dimensions and control point distribution diagram of the initial multi-patch model for a hook

进行优化。

本文以降低柔度(提升刚度)为优化目标。工程中,应力集中与大变形区域的优化对提升结构性能至关重要;局部优化可提高计算效率,且受制造、空间及功能限制,固定边界与受力点等区域不适合全域优化,局部策略可验证方法可行性并提供理论支撑。案例中通过调整该吊钩模型 $a\sim i$ 控制点的位置实现设计优化,为简化变量数量,将 b 、 e 、 h 这3个控制点以相邻边界中点的形式参数化。约束总面积不超过 547.706 mm^2 ,优化结果如图11所示。

11.8%,这说明方法2更符合目标函数的要求。仅以控制点作为设计变量进行形状优化时(图11(b)左),面片连接处容易出现不光滑现象,是由于控制点权重未适当调整,导致结果与实际模型不符。因此,后续模型优化将主要探讨以控制点及其权重作为设计变量的形状优化。

4.3 算例3

为了深入验证方法的普适性和解决实际工程问题的能力,本文引入一个几何复杂度更高的连杆模型。该模型细分为14个形状和尺寸各异的面片,显著增加了优化变量的数量和难度。通过施加适当的边界条件(如固定端)和载荷分布,确保

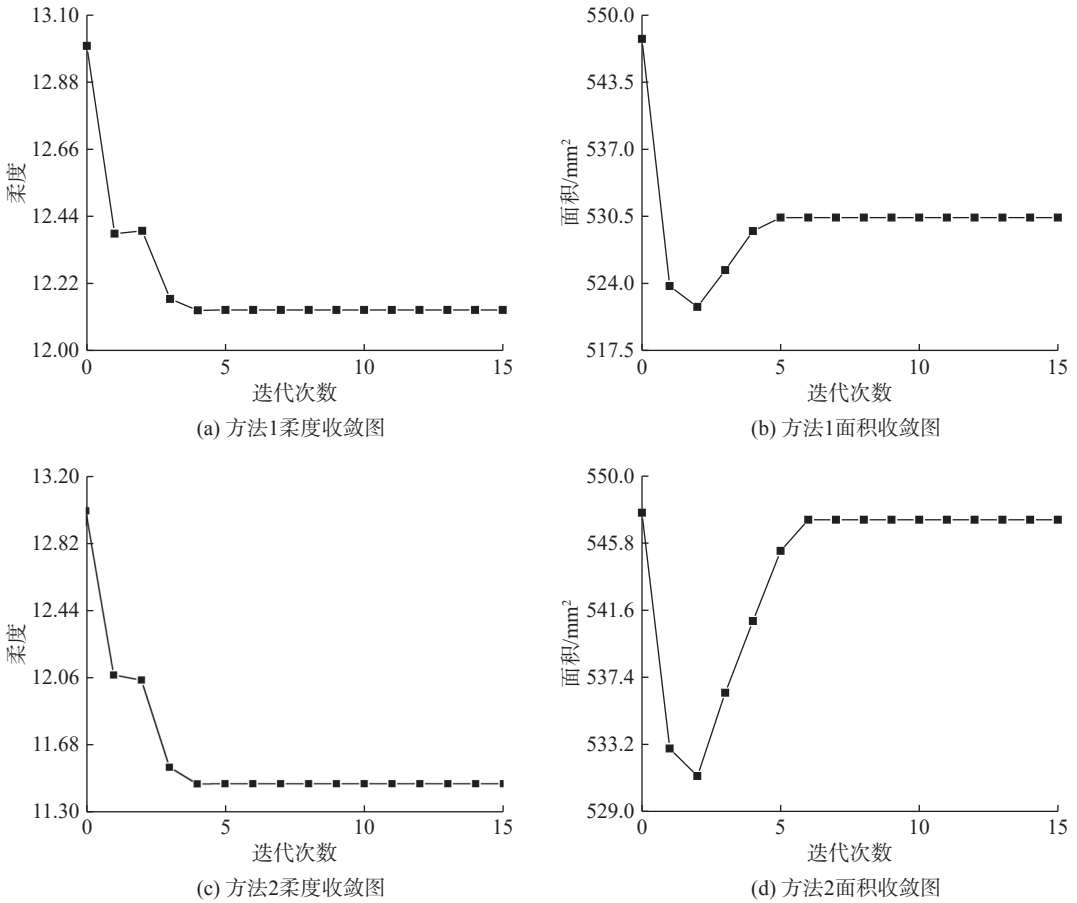


图 12 优化目标与约束收敛图

Fig.12 Convergence chart of optimization objectives and constraints

表 3 吊钩模型优化对比

Tab.3 Comparison of hook model optimization

| 方法 | 柔度 | 面积/mm ² |
|------|---------|--------------------|
| 初始模型 | 12.9991 | 547.706 |
| 方法1 | 12.1325 | 530.375 |
| 方法2 | 11.4622 | 547.263 |

模拟结果能够真实反映实际受力情况, 从而全面考验所提方法处理复杂结构的有效性。由于连杆模型的参数化设计较为直观, 这里不再赘述其具体细节。模型的尺寸图及初始控制点分布情况如图 13 所示。

图 13 展示连杆模型的初始状态与控制点分布: 图 (a) 为二维连杆多片模型示意图; 应用上文的自动分割技术得到四边多片模型, 图 (b) 为初始控制点分布, 用于后续整体形状优化。通过调整控制点的位置与权重, 模型边界可实现平滑连续, 最终优化结果如图 14 所示。

优化结果显示, 模型的柔度在满足面积约束条件下降低 30.8%(图 15 和表 4)。优化前, 连杆较高的柔度导致较大弹性变形, 影响结构刚性和工作精度。优化后, 柔度显著降低, 减少弹性变形, 增强结构刚性, 提高连杆的工作精度和稳定性。具体而言, 柔度降低使得连杆在相同载荷下

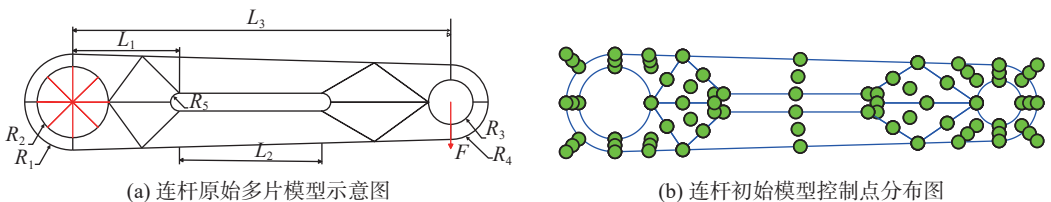


图 13 模型初始尺寸与控制点分布图

Fig.13 Initial dimensions and control point distribution diagram of the model

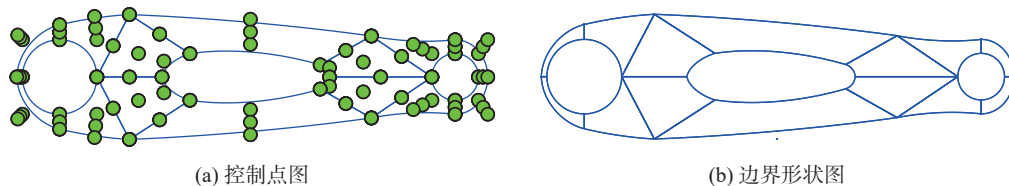


图 14 连杆形状优化图

Fig.14 Shape optimization diagram of the connecting rod

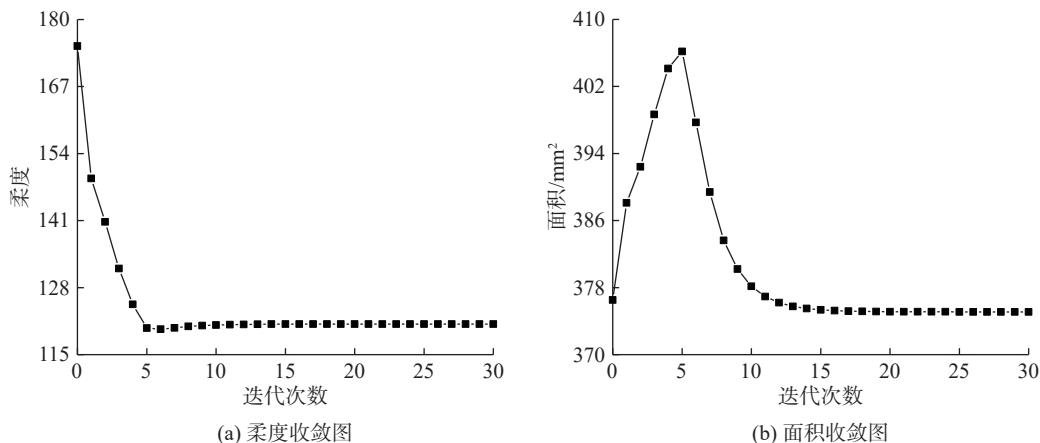


图 15 优化目标与约束收敛图

Fig.15 Convergence chart of optimization objectives and constraints

变形量减小,更好地保持了预期的工作状态和几何形状,确保性能符合设计要求。

表 4 连杆模型优化对比

Tab.4 Comparison of connecting rod model optimization

| 优化对比 | 柔度 | 面积/mm ² |
|------|---------|--------------------|
| 优化前 | 174.846 | 376.510 |
| 优化后 | 120.928 | 375.103 |

5 结论

本文以实现柔度最小化作为形状优化的目标,并以面积为约束条件,对多片模型两种设计变量的灵敏度公式进行推导,利用 MMA 算法进行优化迭代,并依据迭代过程动态更新设计变量界限,获得模型最终形状优化结果。

a. 提出一种结合参数化建模的等几何形状优化方法,该方法适用于复杂二维结构,使建模、分析与优化阶段统一在同一个模型格式中。通过内部控制点的精准控制,有效防止边界控制点变形过大导致的复杂模型生成困难,进而提高建模效率和优化精度。

b. 推导设计变量灵敏度公式,为优化算法提

供理论指导。通过增加对面片连接处控制点的替换处理,实现设计变量导数的准确计算,确保整个模型在多片连接处的平滑连续特性。

c. 通过 3 个具体算例,验证所提方法的有效性和可行性。第一个算例验证本文方法的精确度和可信度,后两个算例分别对局部和整体模型进行形状优化,展示了该方法在二维复杂结构中的应用潜力。

本文提出的方法并不局限于二维模型的优化,未来还将推广至三维模型,实现三维模型的等几何形状优化,从而最终实现结构造型仿真优化的一体化设计。

参考文献:

- [1] HASSANI B, TAVAKKOLI S M, MOGHADAM N Z. Application of isogeometric analysis in structural shape optimization[J]. *Scientia Iranica*, 2011, 18(4): 846–852.
- [2] SOKOLOWSKI J, ZOLESIO J P. Introduction to shape optimization[M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 1992.
- [3] QIAN X P. Full analytical sensitivities in NURBS based isogeometric shape optimization[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(29/32): 2059–2071.

