

文章编号:1007-6735(2010)05-0427-06

一类含积分边界条件的三阶微分方程正解的存在性

田应强, 贾梅, 柳树
(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 利用锥上不动点定理, 研究了一类含积分边界条件的三阶微分方程正解的存在性, 并给出了至少一个正解和两个正解存在的充分条件, 同时还讨论了正解不存在的充分条件.

关键词: 积分边界条件; 不动点定理; 锥; 正解

中图分类号: O 175.8 **文献标志码:** A

Existence of positive solutions for a class of third-order ordinary differential equations with integral boundary conditions

TIAN Ying-qiang, JIA Mei, LIU Shu
(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: By using the fixed point theorem in a cone, the existence and multiplicity of positive solutions for a class of third-order ordinary differential equations with integral boundary conditions were investigated. The sufficient conditions for existence of at least one or two positive solutions were obtained. Meanwhile, the nonexistence of positive solution was also studied.

Key words: *integral boundary conditions; fixed-point theorem; cone; positive solutions*

1 问题的提出

常微分方程边值问题在力学、电学及生物学等众多领域有着广泛的应用, 是常微分方程的重要组成部分. 目前, 由于理论和实际应用的需要, 常微分非局部边值问题的多个解存在性问题被广泛研究, 并取得了一定的成果^[1-5].

文献[1]利用上下解的方法讨论了三阶三点边值问题

$$\begin{cases} x'''(t) + f(t, x, x', x'') = 0, & t \in (0, b) \\ x(0) = x'(0) = 0, & x'(b) = \delta x'(\eta) \end{cases}$$

的 3 个正解的存在性. 文献[2]利用锥上不动点定理研究了三阶两点边值问题

$$\begin{cases} u'''(t) + q(u)f(t, u) = 0, \text{ a. e. } & t \in [0, 1] \\ u'(0) = A, u(1) = B, u''(0) = C \end{cases}$$

本文利用锥上不动点定理研究了含积分边界条件的三阶微分方程的边值问题

$$\left. \begin{aligned} &x'''(t) = \omega(t)f(t, x(t), x'(t)), \quad t \in (0, 1) \\ &x(0) = x'(0) = 0 \\ &x'(1) = \int_0^1 g(s)x(s)ds \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

正解的存在性, 并给出了至少一个正解和两个正解存在的充分条件, 同时, 还讨论了正解不存在的充分条件.

收稿日期: 2009-11-12
基金项目: 上海市教育委员会科研创新基金重点资助项目(10ZZ93)
作者简介: 田应强(1984-), 男, 硕士研究生. E-mail: tian0013@163.com

引理 1^[6] (范数形式的锥拉伸与锥压缩不动点定理) 设 E 是 Banach 空间, $K \subset E$ 是 E 中的锥, Ω_1 和 Ω_2 是 E 中的开子集, $\theta \in \Omega_1 \subset \bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$, $A: K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \rightarrow K$ 全连续, 如果以下两条件之一成立:

- (A₁) $\|Ax\| \leq \|x\|, \forall x \in K \cap \partial\Omega_1;$
 $\|Ax\| \geq \|x\|, \forall x \in K \cap \partial\Omega_2.$
 (A₂) $\|Ax\| \leq \|x\|, \forall x \in K \cap \partial\Omega_2;$
 $\|Ax\| \geq \|x\|, \forall x \in K \cap \partial\Omega_1.$

那么, A 在 $K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$ 中至少有一个不动点.

2 预备知识

假设下列条件成立:

- (H₁) $\omega \in C((0,1), [0, +\infty)), 0 < \int_0^1 \omega(s) ds < +\infty$, 且在 $(0,1)$ 任一子区间内不恒为 0;
 (H₂) $f \in C([0,1] \times [0, +\infty) \times [0, +\infty), [0, +\infty));$
 (H₃) $g \in L^1[0,1]$ 且非负, $\sigma \in [0,1)$, 其中 $\sigma = \int_0^1 \frac{s^2}{2} g(s) ds$.

考虑边值问题

$$\left. \begin{aligned} -x'''(t) &= y(t), \quad t \in (0,1) \\ x(0) &= x'(0) = 0 \\ x'(1) &= \int_0^1 g(s)x(s)ds \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

引理 2 假设条件(H₃)成立, 任意 $y \in L^1[0,1]$, 边值问题(2)有唯一解

$$x(t) = \int_0^1 H(t,s)y(s)ds$$

其中

$$H(t,s) = G(t,s) + \frac{t^2}{1-\sigma} \int_0^1 G(\tau,s)g(\tau)d\tau$$

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{t^2(1-s) - (t-s)^2}{2}, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{t^2(1-s)}{2}, & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

证明 对 $x'''(t) = -y(t)$ 从 0 到 t 积分 3 次, 得

$$x(t) = x''(0) \frac{t^2}{2} - \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} y(s)ds \quad (3)$$

由边界条件知

$$x'(1) = x''(0) - \int_0^1 (1-s)y(s)ds = \int_0^1 g(s)x(s)ds \quad (4)$$

将式(4)代入式(3)得

$$x(t) = \left(\int_0^1 g(s)x(s)ds + \int_0^1 (1-s)y(s)ds \right) \frac{t^2}{2} - \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} y(s)ds = \int_0^1 G(t,s)y(s)ds + \int_0^1 \frac{t^2}{2} g(s)x(s)ds$$

其中

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(s)x(s)ds &= \int_0^1 g(s) \left(\int_0^1 G(s,\tau)y(\tau)d\tau + \int_0^1 \frac{s^2}{2} g(\tau)x(\tau)d\tau \right) ds = \\ &= \int_0^1 g(s) \left(\int_0^1 G(s,\tau)y(\tau)d\tau \right) ds + \int_0^1 \frac{s^2}{2} g(s)ds \int_0^1 g(\tau)x(\tau)d\tau \\ \int_0^1 g(s)x(s)ds &= \frac{1}{1-\sigma} \int_0^1 g(s) \cdot \left(\int_0^1 G(s,\tau)y(\tau)d\tau \right) ds \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^1 G(t,s)y(s)ds + \frac{t^2}{1-\sigma} \int_0^1 g(s) \left(\int_0^1 G(s,\tau)y(\tau)d\tau \right) ds = \\ &= \int_0^1 G(t,s)y(s)ds + \frac{t^2}{1-\sigma} \cdot \int_0^1 \left(\int_0^1 G(\tau,s)g(\tau)d\tau \right) y(s)ds = \\ &= \int_0^1 H(t,s)y(s)ds \end{aligned}$$

因此, 引理 2 成立.

证毕.

引理 3 若条件(H₃)成立, 对任意 $t, s \in [0,1]$, 有

- a. $0 \leq G(t,s) \leq \frac{t^2(1-s)}{2} \leq \frac{1}{2};$
 b. $0 \leq \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} \leq t(1-t) \leq \frac{1}{4};$
 c. $0 \leq H(t,s) \leq \gamma \frac{t^2(1-s)}{2} \leq \frac{1}{2} \gamma;$
 d. $0 \leq \frac{\partial H(t,s)}{\partial t} \leq \gamma t(1-t) \leq \frac{1}{4} \gamma.$

其中, $\gamma = \frac{1+\sigma}{1-\sigma}$.

证明 a, b 显然成立, 现只证明 c, 同理, 可以证明 d.

$$\begin{aligned} & \text{由 } G(t, s) \leq \frac{t^2(1-s)}{2} \text{ 知, 对任意 } t, s \in [0, 1] \\ H(t, s) &= G(t, s) + \frac{t^2}{1-\sigma} \int_0^1 G(\tau, s) g(\tau) d\tau \leq \\ & \frac{t^2(1-s)}{2} + \frac{t^2}{1-\sigma} \int_0^1 \frac{\tau^2(1-s)}{2} g(\tau) d\tau \leq \\ & \frac{t^2(1-s)}{2} \left[1 + \frac{\int_0^1 \tau^2 g(\tau) d\tau}{1-\sigma} \right] \leq \\ & \frac{t^2(1-s)}{2} \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \leq \frac{1}{2} \gamma \end{aligned}$$

因此, $H(t, s) \leq \gamma \frac{t^2(1-s)}{2} \leq \frac{1}{2} \gamma, t, s \in [0, 1]$ 成立.

证毕.

引理 4 若条件 (H_3) 成立, 令 $\delta \in (0, \frac{1}{2}), J_\delta = [\delta, 1-\delta]$, 任意 $t \in J_\delta, u, s \in [0, 1]$, 有

- a. $G(t, s) \geq \delta^2 G(u, s)$;
- b. $\frac{\partial G(t, s)}{\partial t} \geq \delta \frac{\partial G(u, s)}{\partial u}$;
- c. $H(t, s) \geq \delta^2 H(u, s)$;
- d. $\frac{\partial H(t, s)}{\partial t} \geq \delta \frac{\partial H(u, s)}{\partial u}$.

证明 现分两组证明.

a. 只证明引理 4 的 a, 同理, 可以证明引理 4 的 b. $t \in [\delta, 1-\delta], u, s \in [0, 1]$, 分 4 种情况

(a) 若 $\max\{u, t\} \leq s$, 则

$$\begin{aligned} G(t, s) &= \frac{t^2(1-s)}{2} \geq \frac{t^2 u^2(1-s)}{2} = \\ & t^2 G(u, s) \geq \delta^2 G(u, s) \end{aligned}$$

(b) 若 $\min\{u, t\} \geq s$, 则

$$\begin{aligned} G(t, s) &= \frac{2t-t^2-s}{2} \geq \frac{t(1-t)s}{2} (2u- \\ & u^2-s) = t(1-t)G(u, s) \geq \delta^2 G(u, s) \end{aligned}$$

(c) 若 $t \leq s \leq u$, 则

$$\begin{aligned} G(t, s) &= \frac{t^2(1-s)}{2} \geq t^2 \frac{(u^2(1-s)-(u-s)^2)}{2} = \\ & t^2 G(u, s) \geq \delta^2 G(u, s) \end{aligned}$$

(d) 若 $u \leq s \leq t$, 则

$$G(t, s) = \frac{t^2(1-s)-(t-s)^2}{2} \geq t(1-t) \frac{u^2(1-s)}{2} =$$

$$t(1-t)G(u, s) \geq \delta^2 G(u, s)$$

因此, $G(t, s) \geq \delta^2 G(u, s), \forall t \in [\delta, 1-\delta], u, s \in [0, 1]$.

b. 只证明引理 4 的 c, 同理, 可以证明引理 4 的 d.

$$\begin{aligned} H(t, s) &= G(t, s) + \frac{t^2}{1-\sigma} \int_0^1 G(\tau, s) g(\tau) d\tau \geq \\ & \delta^2 G(u, s) + \frac{\delta^2}{1-\sigma} \int_0^1 G(\tau, s) g(\tau) d\tau \geq \\ & \delta^2 G(u, s) + \frac{\delta^2 u^2}{1-\sigma} \int_0^1 G(\tau, s) g(\tau) d\tau = \\ & \delta^2 H(u, s) \end{aligned}$$

因此, $H(t, s) \geq \delta^2 H(u, s), u, s \in [0, 1]$.

证毕.

令 $J = [0, 1], E = C^1[0, 1], \|x\|_1 = \|x\| + \|x'\|$, 其中, $\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|, \|x'\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x'(t)|$, 显然, E 关于 $\|x\|_1$ 是 Banach 空间. 令 $K = \{x \in C^1[0, 1]: x \geq 0, x' \geq 0, \min_{t \in J_\delta} x(t) \geq$

$$\delta^2 \|x\|, \min_{t \in J_\delta} x'(t) \geq \delta \|x'\|\}$$

显然, K 是 E 中的锥, 且 $|x(t)| + |x'(t)| \geq \delta^2 \|x\|_1, x \in J_\delta$. 设 $0 < r < R$, 为了讨论方便, 记 $K_r = \{x \in K: \|x\|_1 \leq r\}, \partial K_r = \{x \in K: \|x\|_1 = r\}$,

$$\bar{K}_{r,R} = \{x \in K: r \leq \|x\|_1 \leq R\}$$

定义算子 $T: C^1[0, 1] \rightarrow C^1[0, 1]$,

$$(Tx)(t) = \int_0^1 H(t, s) \omega(s) f(s, x(s), x'(s)) ds$$

则

$$(Tx)'(t) = \int_0^1 \frac{\partial H(t, s)}{\partial t} \omega(s) f(s, x(s), x'(s)) ds$$

引理 5 假定条件 $(H_1) - (H_3)$ 成立, 若 $x \in C^1[0, 1]$ 是积分方程

$$x(t) = \int_0^1 H(t, s) \omega(s) f(s, x(s), x'(s)) ds$$

的解, 则 $x \in C^1[0, 1] \cap C^3(0, 1)$ 且 x 是边值问题 (1) 的解.

引理 6 假定条件 $(H_1) - (H_3)$ 成立, 则 $T(K) \subset K$ 且 $T: K \rightarrow K$ 的全连续算子.

证明

$$\min_{t \in J_\delta} (Tx)(t) = \min_{t \in J_\delta} \int_0^1 H(t, s) \omega(s) f(s, x(s),$$

$$x'(s)) ds \geq \delta^2 \int_0^1 H(u, s) \omega(s) f(s, x(s),$$

$$x'(s)) ds \geq \delta^2 (Tx)(u), u \in J$$

$$(Tx)'(t) = \int_0^1 \frac{\partial H(t, s)}{\partial t} \omega(s) f(s, x(s), x'(s)) ds$$

$$\min_{t \in J_\delta} (Tx)'(t) = \min_{t \in J_\delta} \int_0^1 \frac{\partial H(t, s)}{\partial t} \omega(s) f(s, x(s),$$

$$x'(s)) ds \geq \delta \int_0^1 \frac{\partial H(u, s)}{\partial u} \omega(s) f(s, x(s),$$

$$x'(s)) ds \geq \delta (Tx)'(u) \quad u \in J$$

$$\text{而 } (Tx)(t) \geq 0, (Tx)'(t) \geq 0, \forall t \in J, x \in K.$$

故 $Tx \in K$, 即 $T(K) \subset K$.

类似于文献[3]中的引理 2.4, 易证明 $T: K \rightarrow K$ 的全连续算子.

证毕.

3 主要结论

$$\text{记 } f^\varphi = \lim_{|x|+|y| \rightarrow \varphi} \max_{t \in J} \frac{f(t, x, y)}{|x|+|y|}$$

$$f_\varphi = \lim_{|x|+|y| \rightarrow \varphi} \min_{t \in J} \frac{f(t, x, y)}{|x|+|y|}$$

其中, $\varphi = 0$ 或 $\varphi = \infty$

$$\Lambda_1 = \frac{3}{4} \gamma \int_0^1 \omega(s) ds, \quad \Lambda_2 = \delta^2 \int_\delta^{1-\delta} \frac{\partial H(\frac{1}{2}, s)}{\partial t} \omega(s) ds$$

定理 1 假定条件 $(H_1) - (H_3)$ 成立, $\Lambda_1 f^0 < 1 < \Lambda_2 f_\infty$, 则边值问题式(1)至少存在一个正解.

证明 由 $\Lambda_1 f^0 < 1$ 可知, 存在 $r_1 > 0$, 当 $t \in J, |x| + |y| \leq r_1$ 时, 有

$$f(t, x, y) \leq (f^0 + \epsilon_1)(|x| + |y|)$$

其中, $\epsilon_1 > 0$, 满足 $\Lambda_1(f^0 + \epsilon_1) \leq 1$. 对 $\forall x \in \partial K_{r_1}$, 当 $t \in J$ 时

$$|(Tx)(t)| \leq \frac{1}{2} \gamma \int_0^1 \omega(s) f(s, x(s), x'(s)) ds \leq$$

$$\frac{1}{2} \gamma (f^0 + \epsilon_1) \int_0^1 \omega(s) (|x(s)| + |x'(s)|) ds \leq$$

$$\frac{1}{2} \gamma (f^0 + \epsilon_1) \|x\|_1 \int_0^1 \omega(s) ds$$

$$|(Tx)'(t)| \leq \frac{1}{4} \gamma \int_0^1 \omega(s) f(s, x(s), x'(s)) ds \leq$$

$$\frac{1}{4} \gamma (f^0 + \epsilon_1) \int_0^1 \omega(s) (|x(s)| + |x'(s)|) ds \leq$$

$$\frac{1}{4} \gamma (f^0 + \epsilon_1) \|x\|_1 \int_0^1 \omega(s) ds$$

因此

$$\|Tx\|_1 = \|Tx\| + \|(Tx)'\| \leq$$

$$\left(\frac{1}{2} \gamma + \frac{1}{4} \gamma\right) (f^0 + \epsilon_1) \|x\|_1 \int_0^1 \omega(s) ds =$$

$$\frac{3}{4} \gamma (f^0 + \epsilon_1) \|x\|_1 \int_0^1 \omega(s) ds \leq \|x\|_1$$

即

$$\|Tx\|_1 \leq \|x\|_1, \quad x \in \partial K_{r_1}$$

又由 $1 < \Lambda_2 f_\infty$ 知, 存在 $\bar{r}_2 > 0$, 当 $t \in J, |x| + |y| \geq \bar{r}_2$ 时, 有

$$f(t, x, y) \geq (f_\infty - \epsilon_2)(|x| + |y|)$$

其中, $\epsilon_2 > 0$ 满足 $\Lambda_2(f_\infty - \epsilon_2) \geq 1$. 令 $r_2 = \max$

$$\left\{2r_1, \frac{\bar{r}_2}{\delta^2}\right\}, \text{对任意 } x \in \partial K_{r_2}, \min_{t \in J_\delta} x(t) \geq \delta^2 \|x\|,$$

$\min_{t \in J_\delta} x'(t) \geq \delta \|x'\|$, 所以, 当 $t \in J_\delta$ 时

$$x(t) + x'(t) \geq \delta^2 \|x\| + \delta \|x'\| \geq$$

$$\delta^2 \|x\|_1 = \delta^2 r_2 \geq \bar{r}_2$$

因此

$$\left|(Tx)'(\frac{1}{2})\right| = \int_0^1 \frac{\partial H(\frac{1}{2}, s)}{\partial t} \omega(s) f(s, x(s),$$

$$x'(s)) ds \geq (f_\infty - \epsilon_2) \int_\delta^{1-\delta} \frac{\partial H(\frac{1}{2}, s)}{\partial t} \omega(s) \cdot$$

$$(|x(s)| + |x'(s)|) ds \geq (f_\infty - \epsilon_2) \cdot$$

$$\delta^2 \|x\|_1 \int_\delta^{1-\delta} \frac{\partial H(\frac{1}{2}, s)}{\partial t} \omega(s) ds \geq \|x\|_1$$

而

$$\|Tx\|_1 = \|Tx\| + \|(Tx)'\| \geq \left|(Tx)'(\frac{1}{2})\right| \geq \|x\|_1$$

即

$$\|Tx\|_1 \geq \|x\|_1, \quad x \in \partial K_{r_2} \quad (5)$$

故由引理 1 中的条件 (A_1) 可得, T 在 $\bar{K}_{r_1, r_2}$ 上存在不动点 x^* , 且 $r_1 \leq \|x^*\| \leq r_2$, 因此, 边值问题(1)至少存在一个正解.

定理 2 假定条件 $(H_1) - (H_3)$ 成立, $\Lambda_1 f_\infty < 1 < \Lambda_2 f_0$, 则边值问题(1)至少存在一个正解.

证明 由 $1 < \Lambda_2 f_0$ 可知, 存在 $r_3 > 0$, 对 $\forall t \in J, |x| + |y| \leq r_3$, 有

$$f(t, x, y) \geq (f_0 - \epsilon_3)(|x| + |y|)$$

其中, $\epsilon_3 > 0$, 满足 $\Lambda_2(f_0 - \epsilon_3) \geq 1$. 则对 $x \in \partial K_{r_3}$

$$\left|(Tx)'(\frac{1}{2})\right| = \int_0^1 \frac{\partial H(\frac{1}{2}, s)}{\partial t} \omega(s) f(s, x(s),$$

$$x'(s)) ds \geq (f_0 - \epsilon_3) \int_0^1 \frac{\partial H(\frac{1}{2}, s)}{\partial t} \omega(s) \cdot$$

$$\begin{aligned} & (|x(s)| + |x'(s)|)ds \geq (f_0 - \varepsilon_3)\|x\|_1. \\ & \int_{\delta}^{1-\delta} \frac{\partial H(\frac{1}{2}, s)}{\partial t} \omega(s) ds \geq (f_0 - \varepsilon_3)\delta^2 \|x\|_1. \\ & \int_{\delta}^{1-\delta} \frac{\partial H(\frac{1}{2}, s)}{\partial t} \omega(s) ds \geq \|x\|_1 \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \|Tx\|_1 &= \|Tx\| + \|(Tx)'\| \geq \\ & \left| (Tx)' \left(\frac{1}{2} \right) \right| \geq \|x\|_1 \end{aligned}$$

即

$$\|Tx\|_1 \geq \|x\|_1, \quad \forall x \in \partial K_{r_3} \quad (6)$$

又由 $\Lambda_1 f^\infty < 1$ 知, 存在 $\bar{r}_4 > 0$, $\forall t \in J$, $|x| + |y| \geq \bar{r}_4$, 有

$$f(t, x, y) \leq (f^\infty + \varepsilon_4)(|x| + |y|)$$

其中, $\varepsilon_4 > 0$, 满足 $\Lambda_1(f^\infty + \varepsilon_4) < 1$, 令 $M = \max_{0 \leq |x| + |y| \leq \bar{r}_4} f(t, x, y)$, 则当 $t \in J, x, y \in [0, +\infty)$ 时

$$f(t, x, y) \leq M + (f^\infty + \varepsilon_4)(|x| + |y|)$$

选取 $r_4 > \max\{r_3, \bar{r}_4, M\Lambda_1(1 - \Lambda_1(f^\infty + \varepsilon_4))^{-1}\}$ 对 $x \in \partial K_{r_4}$, 有

$$\begin{aligned} |(Tx)(t)| &\leq \frac{1}{2} \gamma \int_0^1 \omega(s) f(s, x(s), x'(s)) ds \leq \\ & \frac{1}{2} \gamma [M \int_0^1 \omega(s) ds + (f^\infty + \varepsilon_4) \int_0^1 \omega(s) (|x(s)| + \\ & |x'(s)|) ds] \leq \frac{1}{2} \gamma [M \int_0^1 \omega(s) ds + \\ & (f^\infty + \varepsilon_4) \|x\|_1 \int_0^1 \omega(s) ds] \\ |(Tx)'(t)| &\leq \frac{1}{4} \gamma \int_0^1 \omega(s) f(s, x(s), x'(s)) ds \leq \\ & \frac{1}{4} \gamma [M \int_0^1 \omega(s) ds + (f^\infty + \varepsilon_4) \int_0^1 \omega(s) (|x(s)| + \\ & |x'(s)|) ds] \leq \frac{1}{4} \gamma [M \int_0^1 \omega(s) ds + \\ & (f^\infty + \varepsilon_4) \|x\|_1 \int_0^1 \omega(s) ds] \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \|Tx\|_1 &= \|Tx\| + \|(Tx)'\| \leq \\ & \frac{3}{4} \gamma [M + (f^\infty + \varepsilon_4) \|x\|_1 \int_0^1 \omega(s) ds] \leq \\ & M\Lambda_1 + \Lambda_1(f^\infty + \varepsilon_4) \|x\|_1 \leq r_4 - \Lambda_1(f^\infty + \\ & \varepsilon_4) r_4 + \Lambda_1(f^\infty + \varepsilon_4) r_4 \leq r_4 = \|x\|_1 \end{aligned}$$

即

$$\|Tx\|_1 \leq \|x\|_1, \quad \forall x \in \partial K_{r_4} \quad (7)$$

由引理1中的条件(A₂)可知, T 在 $\bar{K}_{r_3, r_4}$ 上存在不动点 x^* , 且 $r_3 \leq \|x^*\| \leq r_4$, 因此, 边值问题(1)至少存在一个正解.

证毕.

定理3 假定条件(H₁) - (H₃)成立, 且满足下列两个条件:

(H₄) $\Lambda_2 f_0 > 1, \Lambda_2 f_\infty > 1$;

(H₅) 存在 $b > 0$, 满足 $\max_{t \in J, |x| + |y| \leq b} f(t, x, y) < \Lambda_1^{-1} b$.

则边值问题(1)至少存在两个正解 x_1, x_2 , 且满足

$$0 < \|x_1\|_1 < b < \|x_2\|_1 \quad (8)$$

证明 若 $\Lambda_2 f_0 > 1$, 由式(6)的证明可知, 存在 $0 < r < b$, 使得

$$\|Tx\|_1 \geq \|x\|_1, \|x\|_1 = r \quad (9)$$

若 $\Lambda_2 f_\infty > 1$, 由式(5)的证明可知, 存在 $b < R$, 使得

$$\|Tx\|_1 \geq \|x\|_1, \|x\|_1 = R \quad (10)$$

另一方面, 由条件(H₅)知, 对 $x \in \partial K_b$, 记 $M^* = \max\{f(t, x, y) : t \in J, |x| + |y| \leq b\}$, 则 $M^* < \Lambda_1^{-1} b$.

$$\begin{aligned} \|Tx\| &\leq \frac{1}{2} \gamma \int_0^1 \omega(s) f(s, x(s), x'(s)) ds \leq \\ & \frac{1}{2} \gamma M^* \int_0^1 \omega(s) ds \\ \|(Tx)'\| &\leq \frac{1}{4} \gamma \int_0^1 \omega(s) f(s, x(s), x'(s)) ds \leq \\ & \frac{1}{4} \gamma M^* \int_0^1 \omega(s) ds \end{aligned}$$

因此

$$\|Tx\|_1 < b = \|x\|_1, x \in \partial K_b \quad (11)$$

由引理1和式(9)~(11)可得, T 在 $\bar{K}_{rb}, \bar{K}_{bR}$ 上分别存在不动点 x_1, x_2 , 即边值问题(1)至少存在两个正解 $x_1(t), x_2(t)$, 且又由式(11)知 $\|x_1\|_1 \neq b, \|x_2\|_1 \neq b$, 因此, 式(8)成立.

证毕.

定理4 假定条件(H₁) - (H₃)成立, 且满足下列两个条件:

(H₆) $\Lambda_1 f^0 < 1, \Lambda_1 f^\infty < 1$;

(H₇) 存在 $B > 0, \delta \in (0, \frac{1}{2})$, 对 $\forall t \in J_\delta, x, y \in$

$[\delta^2 B, B]$ 满足 $f(t, x, y) > \delta \Lambda_2^{-1} B$.

则边值问题(1)至少存在两个正解 x_3, x_4 , 且满足

$$0 < \|x_4\|_1 < B < \|x_3\|_1$$

定理4的证明与定理3相同,此处省略.

定理5 假定条件 $(H_1) - (H_3)$ 成立,且当 $|x| + |y| > 0, t \in J$ 时,有 $\Lambda_1 f(t, x, y) < |x| + |y|$ 成立,则边值问题(1)不存在正解.

证明 假设边值问题(1)存在正解 x ,则 $\|x\|_1 > 0$,且对任意 $t \in [0, 1], x(t) \geq 0$,

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)| \leq \frac{1}{2} \gamma \int_0^1 \omega(s) f(s, x(s), x'(s)) ds < \frac{1}{2} \gamma \left(\int_0^1 \omega(s) ds \right) \Lambda_1^{-1} \|x\|_1$$

$$\|x'\| = \max_{t \in J} |x'(t)| \leq \frac{1}{4} \gamma \int_0^1 \omega(s) f(s, x(s), x'(s)) ds < \frac{1}{4} \gamma \left(\int_0^1 \omega(s) ds \right) \Lambda_1^{-1} \|x\|_1$$

$$\|x'\| = \max_{t \in J} |x'(t)| \leq \frac{1}{4} \gamma \int_0^1 \omega(s) f(s, x(s), x'(s)) ds < \frac{1}{4} \gamma \left(\int_0^1 \omega(s) ds \right) \Lambda_1^{-1} \|x\|_1$$

$$\|x'\| = \max_{t \in J} |x'(t)| \leq \frac{1}{4} \gamma \int_0^1 \omega(s) f(s, x(s), x'(s)) ds < \frac{1}{4} \gamma \left(\int_0^1 \omega(s) ds \right) \Lambda_1^{-1} \|x\|_1$$

因此

$$\|x\|_1 = \|x\| + \|x'\| < \frac{3}{4} \left(\int_0^1 \omega(s) ds \right) \Lambda_1^{-1} \|x\|_1 = \|x\|_1$$

矛盾,故定理5成立.

证毕.

与定理5类似,可得定理6成立.

定理6 假定条件 $(H_1) - (H_3)$ 成立,且当 $|x| + |y| > 0, t \in J$ 时,有 $\Lambda_2 f(t, x, y) > |x| + |y|$ 成立,则边值问题(1)不存在正解.

$|y|$ 成立,则边值问题(1)不存在正解.

参考文献:

- [1] 李芳菲,贾梅,刘锡平,等.三阶三点边值问题三个正解的存在性[J].应用泛函分学报,2007,9(4):358-367.
- [2] 续晓欣,梁月亮,桑彦彬.三阶两点边值问题单调递减正解的存在惟一性[J].山东大学学报(理学版),2008,43(12):84-92.
- [3] EL-SHAHED M. Positive solutions for nonlinear singular third-order boundary value problem[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009,14(2):424-429.
- [4] ZHANG Xuemei, GE Weigao. Positive solutions for a class of boundary-value problems with integral boundary conditions[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2009,58(2):203-215.
- [5] FENG Meiqiang, JI Dehong, GE Weigao. Positive solutions for a class of boundary-value problem with integral boundary conditions in Banach space[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008,222(2):351-363.
- [6] 郭大钧,孙经先,刘兆理.非线性常微分方程泛函方法[M].第2版.济南:山东科学技术出版社,2006.

(上接第426页)

参考文献:

- [1] 田海娇,王铁龙,王颖.垂直轴风力发电机发展概述[J].应用能源技术,2006,11(11):22-27.
- [2] 蒋本华.导流式全风向垂直轴风力机:中国,ZL200620006299.2[P].2007-02-21.
- [3] 李庆宜.小型风力发电机[M].北京:机械工业出版社,1982.
- [4] 陶文铨.数值传热学[M].西安:西安交通大学出版社,2001.
- [5] WANG Qikun, CHEN Kangmin. Numerical investigation of aerodynamic performance influenced by circumferentially pre-swirling coming flow on the crossover and de-swirling cascade of a multistage centrifugal compressor[J]. Frontiers of Energy and Power Engineering in China, 2007,1(4):435-440.