

文章编号:1007-6735(2010)05-0433-04

以权 1 分担两个公共值集的亚纯函数

曹璋龙, 王新利

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 研究了亚纯函数以权 1 分担两个公共值集的唯一性问题, 设 $S = \{\omega \in C; a\omega^n - n(n-1)\omega^2 + 2n(n-2)b\omega - (n-1)(n-2)b^2 = 0\}$, 其中 a, b 为两个非零复数, 且满足 $ab^{n-2} \neq 2$, 如果 $n \geq 11$, f 和 g 以权 1 分担 S , $\bar{E}(\infty, f) = \bar{E}(\infty, g)$, 则 $f \equiv g$.

关键词: 亚纯函数; 权分担; 公共值集; 唯一性

中图分类号: O 174.52 **文献标志码:** A

Meromorphic functions sharing two sets with weighted value of one

CAO Zhang-long, WANG Xin-li

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The uniqueness of meromorphic functions sharing two sets with weighted value of one was dealt with. Setting $S = \{\omega \in C; a\omega^n - n(n-1)\omega^2 + 2n(n-2)b\omega - (n-1)(n-2)b^2 = 0\}$, a, b being two nonzero numbers and $ab^{n-2} \neq 2$, if $n \geq 11$, f and g share S with weighted value of one, $\bar{E}(\infty, f) = \bar{E}(\infty, g)$, then $f \equiv g$.

Key words: meromorphic functions; weighted sharing; shared set; uniqueness

1 问题的提出

设 $f(z)$ 为非常数的亚纯函数, S 为一个具有不同元素的复数集合, 令

$$E(S, f) = \bigcup_{a \in S} \{z \mid f(z) - a = 0, \text{计重数}\}$$

$$\bar{E}(S, f) = \bigcup_{a \in S} \{z \mid f(z) - a = 0, \text{不计重数}\}$$

如果 $E(S, f) = E(S, g)$, 则称 S 为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 CM 公共值集, 如果 $\bar{E}(S, f) = \bar{E}(S, g)$, 则称 S 为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 IM 公共值集. 另外, 设 a 为任意复

数, k 为任意整数, 且 $k \geq 1$, $E_k(S, f)$ 表示 $f - a$ 的所有零点, 当零点的重数 $m \leq k$ 时, 计 m 次; 当零点的重数 $m > k$ 时, 计 $k + 1$ 次; 若 $E_k(S, f) = E_k(S, g)$, 则称 f 和 g 按权 k 分担 S , 记为 f 和 g 分担 (S, k) . 特别地, 当 $S = \{a\}$ 时, 若 $E_k(S, f) = E_k(S, g)$, 则称 f 和 g 按权 k 分担值 a , 记为 f 和 g 分担 (a, k) . 当 $k = \infty$ 时, f 和 g 按权 k 分担 S , 即为 f 和 g CM 分担集合 S , 当 $k = 0$ 时, f 和 g 按权 k 分担 S , 即为 f 和 g IM 分担集合 S .

本文使用值分布论中的标准记号及基本结果^[1], 如 $T(r, f)$, $N(r, f)$, $S(r, f)$ 等.

收稿日期: 2010-01-14

作者简介: 曹璋龙(1984-), 男, 硕士研究生.

王新利(联系人), 女, 讲师. E-mail: xlwang@usst.edu.cn

令 $S = \{\omega \in C; a\omega^n - n(n-1)\omega^2 + 2n(n-2)b\omega - (n-1)(n-2)b^2 = 0\}$, 其中, a, b 为两个非零复数, 且满足 $ab^{n-2} \neq 2$. 令

$$P(\omega) = a\omega^n - n(n-1)\omega^2 + 2n(n-2)b\omega - (n-1)(n-2)b^2 \quad (1)$$

$$R(\omega) =$$

$$\frac{a\omega^n}{n(n-1)\omega^2 - 2n(n-2)b\omega + (n-1)(n-2)b^2} = \frac{a\omega^n}{n(n-1)(\omega - \alpha_1)(\omega - \alpha_2)} \quad (2)$$

其中, α_1, α_2 是方程 $n(n-1)\omega^2 - 2n(n-2)b\omega + (n-1)(n-2)b^2 = 0$ 的两个判别根.

$$R'(\omega) = \frac{(n-2)a\omega^{n-1}(\omega - b)^2}{n(n-1)(\omega - \alpha_1)^2(\omega - \alpha_2)^2} \quad (3)$$

由式(3)可以得到 $\omega = 0$ 是方程 $R(\omega) = 0$ 的 n 重根, $\omega = b$ 是方程 $R(\omega) - c = 0$ 的 3 重根. 其中, $c = \frac{ab^{n-2}}{2}$. 所以

$$R(\omega) - c = \frac{a(\omega - b)^3 Q_{n-3}(\omega)}{n(n-1)(\omega - \alpha_1)(\omega - \alpha_2)} \quad (4)$$

其中, $Q_{n-3}(\omega)$ 是次数为 $n-3$ 的多项式, 且 $Q_{n-3}(b) \neq 0$. 另外, 可得

$$R(\omega) - 1 = \frac{p(\omega)}{n(n-1)(\omega - \alpha_1)(\omega - \alpha_2)} \quad (5)$$

由式(3)和式(5)可得 $P(\omega) = a\omega^n - n(n-1)\omega^2 + 2n(n-2)b\omega - (n-1)(n-2)b^2$ 只有单零点.

1976 年, 文献[2]提出问题: 能否找到一个有限集合 S , 使得对任何两个非常整函数 f 与 g , 当 S 为 f 与 g 的分担值集时, 必有 $f \equiv g$. 文献[3]解决了该问题, 并且进一步得到了其他定理^[4,5].

定理 1^[4] 设 $S = \{\omega \in C; P(\omega) = 0\}$, $P(\omega)$ 由式(1)给出, 其中, $n \geq 8$, 若 f 和 g 满足: $E(S, f) = E(S, g)$ 和 $E(\infty, f) = E(\infty, g)$, 则 $f \equiv g$.

定理 2^[5] 设 $S = \{\omega \in C; P(\omega) = 0\}$, $P(\omega)$ 由式(1)给出, 其中 $n \geq 8$, 若 f 和 g 满足: $E(S, f) = E(S, g)$ 和 $\bar{E}(\infty, f) = \bar{E}(\infty, g)$, 则 $f \equiv g$.

文献[6]证明了定理 3.

定理 3^[6] 设 $S = \{\omega \in C; P(\omega) = 0\}$, $P(\omega)$ 由式(1)给出, 其中 $n \geq 13$, 若 f 和 g 满足: $\bar{E}(S, f) = \bar{E}(S, g)$ 和 $\bar{E}(\infty, f) = \bar{E}(\infty, g)$, 则 $f \equiv g$.

文献[7]改进了定理 2 和定理 3.

定理 4^[7] 设 $S = \{\omega \in C; P(\omega) = 0\}$, $P(\omega)$ 由式(1)给出, 其中, $n \geq 13$, 若 f 和 g 分担 (s, k) 和 $\bar{E}(\infty, f) = \bar{E}(\infty, g)$, 则当条件:

a. $k \geq 2, n \geq 9$;

b. $k \geq 5, n \geq 8$.

之一成立时, 必有 $f \equiv g$.

本文讨论了定理 4 中 $k = 1$ 时的情况, 补充了定理 4 的结论, 证明了定理 5.

定理 5 设 $S = \{\omega \in C; P(\omega) = 0\}$, $P(\omega)$ 由式(1)给出, $n \geq 11$, 若 f 和 g 分担 $(S, 1)$ 和 $\bar{E}(\infty, f) = \bar{E}(\infty, g)$, 则 $f \equiv g$.

2 引理

现引入一些记号和引理. 令

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{af^n}{n(n-1)(f-\alpha_1)(f-\alpha_2)} \\ G &= \frac{ag^n}{n(n-1)(g-\alpha_1)(g-\alpha_2)} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} F' &= \frac{(n-2)af^{n-1}(f-b)^2f'}{n(n-1)(f-\alpha_1)^2(f-\alpha_2)^2} \\ G' &= \frac{(n-2)ag^{n-1}(g-b)^2g'}{n(n-1)(g-\alpha_1)^2(g-\alpha_2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$H = \frac{F''}{F'} - \frac{2F'}{F-1} - \left(\frac{G''}{G'} - \frac{2G'}{G-1} \right) \quad (8)$$

定义 1 设 f 和 g 是两个非常数的亚纯函数, 且 f 和 g 分担 $1IM$, 令 z_0 为 f 的 1 值点重数为 p , 为 g 的 1 值点重数为 q , 定义 $\bar{N}_L(r, 1; f)$ 为 f 和 g 的 1 值点的计数函数, 且 $p > q$; $N_E^2(r, 1; f)$ 为 f 和 g 的 1 值点的计数函数, 且 $p = q \geq 2$; $N_{f>2}(r, 1; g)$ 为 f 和 g 的 1 值点, 且 f 的重数大于 2.

定义 2 设 $a, b \in C \cup \{\infty\}$, 定义 $N(r, a; f| = b)$ 为 f 的 a 值点的计数函数, 且重数为 b .

引理 1^[8] 令 F, G 分担 $(1, 1)$, 则

$$\bar{N}_{F>2}(r, 1; G) \leq \frac{1}{2}\bar{N}(r, 0; F) + \frac{1}{2}\bar{N}(r, \infty; F) -$$

$$\frac{1}{2}\bar{N}_0(r, 0; F') + S(r, F)$$

引理 2^[9] 令 F, G 分担 $(1, 1)$, 则

$$2\bar{N}_L(r, 1; F) + 2\bar{N}_L(r, 1; G) + N_E^2(r, 1; F) -$$

$$\bar{N}_{F>2}(r, 1; G) \leq N(r, 1; G) - \bar{N}(r, 1; G)$$

引理3 令 F, G 分担 $(1, 1)$, 则

$$N(r, 1; F| = 1) \leq N(r, 0; H) \leq N(r, \infty; H) + S(r, F) + S(r, G)$$

证明 从式(8)可以得到 $m(r, H) = S(r, F) + S(r, G)$. 设 z_0 为 F 的单1值点, 注意到 F 和 G 分担 $(1, 1)$, 则 z_0 也为 G 的单1值点. 将 F 和 G 在 z_0 邻域内的 Taylor 展式代入式(8), 经计算可知 z_0 为 H 的零点, 于是, 引理3得证.

引理4^[7] 令 f 和 g 分担 $(1, k)$, F 和 G 如上定义, $U = \frac{F'}{F-1} - \frac{F'}{F} - \left(\frac{G'}{G-1} - \frac{G'}{G}\right)$, 若 U 不恒为零, 则

$$\left(n - 3 - \frac{2}{k}\right)\bar{N}(r, \infty; f) \leq \left(\frac{1}{k} + 1\right)\{T(r, f) + T(r, g)\} + S(r, f) + S(r, g)$$

引理5^[1] 令 F, G 为两个非常数的亚纯函数, H 如上定义, 若 H 恒为零, 则 $E(1, F) = E(1, G)$.

3 定理5的证明

假设 H 不恒为0. 因为 f, g 分担 $(S, 1)$, 结合式(6)可知 F, G 分担 $(1, 1)$, 由引理3得

$$N(r, 1; F| = 1) = N(r, 1; G| = 1) \leq N(r, 0; H) \leq N(r, \infty; H) + S(r, F) + S(r, G)$$

由式(5)~(8)得

$$\begin{aligned} N(r, \infty; H) &\leq \bar{N}_L(r, 1; F) + \bar{N}(r, 0; f) + \\ &\bar{N}(r, b; f) + N_0(r, 0; f') + \bar{N}(r, \infty; f) + \\ &\bar{N}_L(r, 1; G) + \bar{N}(r, 0; g) + \\ &\bar{N}(r, b; g) + N_0(r, 0; g') \end{aligned} \quad (9)$$

其中, $N_0(r, 0; f')$ 表示 f' 的零点中除去 $f(f-b)$ 与 $F-1$ 的零点的那些计数函数, 同样, 定义 $N_0(r, 0; g')$. 由第二基本定理, 并注意到 $\bar{N}(r, 1; F) = \sum_{j=1}^n \bar{N}(r, \omega_j; f)$, 其中, $\omega_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 为 $p(\omega) = 0$ 的 n 个判别根, 可得

$$\begin{aligned} (n+1)T(r, f) + (n+1)T(r, g) &\leq \\ &\bar{N}(r, 1; F) + \bar{N}(r, 0; f) + \bar{N}(r, b; f) + \\ &\bar{N}(r, \infty; f) - N_0(r, 0; f') + \bar{N}(r, 1; G) + \\ &\bar{N}(r, 0; g) + \bar{N}(r, b; g) + \bar{N}(r, \infty; g) - \\ &N_0(r, 0; g') + S(r, f) + S(r, g) \end{aligned} \quad (10)$$

由引理1~3可得

$$\begin{aligned} \bar{N}(r, 1; F) + \bar{N}(r, 1; G) &\leq N(r, 1; F| = 1) + \\ &\bar{N}_L(r, 1; F) + \bar{N}_L(r, 1; G) + N_E^2(r, 1; F) + \\ &\bar{N}(r, 1; G) \leq N(r, 1; F| = 1) + N(r, 1; G) - \\ &\bar{N}_L(r, 1; F) - \bar{N}_L(r, 1; G) + \bar{N}_{F>2}(r, 1; G) \leq \\ &N(r, \infty; H) + N(r, 1; G) - \bar{N}_L(r, 1; F) - \\ &\bar{N}_L(r, 1; G) + \frac{1}{2}\bar{N}(r, 0; F) + \frac{1}{2}\bar{N}(r, \infty; F) - \\ &\frac{1}{2}\bar{N}_0(r, 0; F') + S(r, F) \end{aligned} \quad (11)$$

由式(9)和式(10)可得

$$\begin{aligned} \bar{N}(r, 1; F) + \bar{N}(r, 1; G) &\leq \bar{N}(r, 0; f) + \\ &\bar{N}(r, b; f) + N_0(r, 0; f') + \bar{N}(r, \infty; f) + \\ &\bar{N}(r, 0; g) + \bar{N}(r, b; g) + N_0(r, 0; g') + \\ &N(r, 1; G) + \frac{1}{2}\bar{N}(r, 0; f) + \frac{1}{2}\bar{N}(r, \infty; f) - \\ &\frac{1}{2}\bar{N}_0(r, 0; f') + S(r, f) + S(r, g) \leq \\ &\frac{5}{2}T(r, f) + 2T(r, g) + \bar{N}(r, \infty; f) + \\ &N_0(r, 0; f') + N_0(r, 0; g') + N(r, 1; G) + \\ &\frac{1}{2}\bar{N}(r, \infty; F) - \frac{1}{2}N_0(r, 0; F') + \\ &S(r, f) + S(r, g) \end{aligned} \quad (12)$$

由式(10)和式(12)可得

$$\begin{aligned} (n+1)T(r, f) + (n+1)T(r, g) &\leq \\ &\frac{9}{2}T(r, f) + 4T(r, g) + 3\bar{N}(r, \infty; f) + \\ &N(r, 1; G) + \frac{1}{2}\bar{N}(r, \infty; F) - \\ &\frac{1}{2}\bar{N}_0(r, 0; F') + S(r, f) + S(r, g) \end{aligned} \quad (13)$$

又因为

$$\begin{aligned} \bar{N}(r, 1; G) &= N(r, 0; P(g)) \leq T(r, P(g)) + \\ &O(1) \leq nT(r, g) + S(r, g) \end{aligned} \quad (14)$$

由式(13)和式(14)可得

$$\begin{aligned} (n+1)(T(r, f) + T(r, g)) &\leq \frac{9}{2}T(r, f) + \\ &4T(r, g) + 3\bar{N}(r, \infty; f) + nT(r, g) + \\ &\frac{1}{2}\bar{N}(r, \infty; F) - \frac{1}{2}\bar{N}_0(r, 0; F') + \\ &S(r, f) + S(r, g) \leq \frac{9}{2}T(r, f) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (4+n)T(r, g) + 3\bar{N}(r, \infty; f) + \\
& \frac{1}{2}\bar{N}(r, \infty; f) + \frac{1}{2}\bar{N}(r, \alpha_1; f) + \\
& \frac{1}{2}\bar{N}(r, \alpha_2; f) - \frac{1}{2}\bar{N}_0(r, 0; F') + \\
& S(r, f) + S(r, g) \leq \frac{11}{2}T(r, f) + \\
& (4+n)T(r, g) + \frac{7}{2}\bar{N}(r, \infty; f) + \\
& S(r, f) + S(r, g) \quad (15)
\end{aligned}$$

同理,可得

$$\begin{aligned}
& (n+1)(T(r, f) + T(r, g)) \leq \frac{11}{2}T(r, g) + \\
& (4+n)T(r, f) + \frac{7}{2}\bar{N}(r, \infty; g) + \\
& S(r, f) + S(r, g) \quad (16)
\end{aligned}$$

由式(15)和式(16)可得

$$\begin{aligned}
& \left(n - \frac{15}{2}\right)(T(r, f) + T(r, g)) \leq \\
& 7\bar{N}(r, \infty; f) + S(r, f) + S(r, g) \quad (17)
\end{aligned}$$

U 如上面定义,现分两种情况讨论.

情形 1 $U \equiv 0$. 由 U 的定义,有

$$\frac{F'}{F-1} - \frac{F'}{F} = \frac{G'}{G-1} - \frac{G'}{G}$$

积分得 $\frac{F}{F-1} = \frac{AG}{G-1}$, 其中, A 是不为零的常数.

所以

$$1 + \frac{1}{F-1} = A \left(1 + \frac{1}{G-1}\right)$$

对其求导数,得到

$$\frac{F'}{(F-1)^2} = A \frac{G'}{(G-1)^2}$$

即

$$\ln F' - 2\ln(F-1) = \ln A + \ln G' - 2\ln(G-1)$$

所以

$$\frac{F''}{F'} - \frac{2F'}{F-1} = \frac{G''}{G'} - \frac{2G'}{G-1}$$

即 $H \equiv 0$, 这与假设矛盾.

情形 2 U 不恒为零. 由引理 4, 当 $k=1$ 时, 可得

$$\begin{aligned}
& \bar{N}(r, \infty; f) \leq \frac{2}{n-5} \{T(r, f) + \\
& T(r, g)\} + S(r, f) + S(r, g) \quad (18)
\end{aligned}$$

将式(18)代入式(17)可得

$$\begin{aligned}
& \left(n - \frac{15}{2} - \frac{14}{n-5}\right)[T(r, f) + T(r, g)] \leq \\
& S(r, f) + S(r, g)
\end{aligned}$$

与 $n \geq 11$ 矛盾, 所以, 假设不成立, 因而 $H \equiv 0$. 由引理 5 知定理 2 的条件满足, 所以, $f \equiv g$. 定理证毕.

参考文献:

- [1] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1995.
- [2] GROSS F. Factorization of meromorphic functions and some open problems[J]. Complex Analysis, 1976, 599: 51-69.
- [3] 仪洪勋. 亚纯函数的唯一性和 Gross 的一个问题[J]. 中国科学, 1994, 24(5): 457-466.
- [4] YI H X. Meromorphic functions that share two sets[J]. Acta Math Sin, 2002, 45(1): 75-82.
- [5] 仪洪勋. 具有两个公共值集的亚纯函数[J]. 数学学报, 2002, 45(1): 75-82.
- [6] 李进东, 张启兵. 具有两个公共值集的亚纯函数[J]. 数学研究与评论, 2005, 25(2): 299-306.
- [7] 张瑜琦, 李纯红. 分担两个公共值集的亚纯函数的唯一性[J]. 重庆大学学报, 2007, 30(11): 103-107.
- [8] ABHIJIT B. Meromorphic functions sharing two sets [J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 2007, 57 (132): 1 199-1 214.
- [9] ALZAHARY T C, YI H X. Weighted value sharing and a question of I Lahiri[J]. Complex Variables Theory Appl, 2004, 49(15): 1 063-1 078.