

文章编号: 1007-6735(2010)05-0437-04

鞍点问题的向后误差分析

樊宝娟, 秦 梅, 王卫新

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 研究了鞍点问题的结构化向后误差, 在定义了范数型结构化向后误差的基础上, 通过大量的计算得出鞍点问题的具体误差表达式, 并通过数值例子进一步验证了该方法的正确性. 该结果是对鞍点问题结构化向后误差的改进和推广.

关键词: 鞍点问题; 向后误差; 范数

中图分类号: O 241.6 **文献标志码:** A

Backward errors analysis for saddle point problem

FAN Bao-juan, QIN Mei, WANG Wei-xin

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: Structurization backward errors for saddle point problem were discussed. After defining structuring backward errors, the expression of perturbation backward error of saddle point problem was derived with a lot of calculation, and then based on examples, the validity of the method was proved. The results of the paper are improvements and generalizations of backward errors analysis for saddle point problem.

Key words: saddle point problem; backward error; perturbation

1 问题的提出

对于鞍点问题(KKT 系统), 有如下结构的线性系统^[1,2]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{A}$ 为 $m \times m$ 的实矩阵, $\mathbf{B}$ 是 $n \times m$ 的实矩阵, 且 $n \leq m$.

设 $[\tilde{\mathbf{u}}^T, \tilde{\mathbf{p}}^T]^T$ 是式(1)的计算解, 定义范数型结构化向后误差

$$\eta^{(\theta)}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{p}}) = \min \left\{ \left\| \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{A} & \Delta \mathbf{B}^T \\ \Delta \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} \right\|_2 \right\}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} + \Delta \mathbf{A} & \mathbf{B}^T + \Delta \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} + \Delta \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\eta^{(\theta, \lambda, \mu)}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{p}}) = \min_{\{\Delta \mathbf{A}, \Delta \mathbf{B}, \Delta \mathbf{f}, \Delta \mathbf{g}\} \in \Gamma} \left\| \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{A} \\ \Delta \mathbf{B} \end{bmatrix} \right\|_F, \theta \|\Delta \mathbf{f}\|_2, \mu \|\Delta \mathbf{g}\|_2 \quad (3)$$

其中

$$\Gamma = \left\{ \{\Delta \mathbf{A}, \Delta \mathbf{B}, \Delta \mathbf{f}, \Delta \mathbf{g}\} : \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \Delta \mathbf{A} & \mathbf{B}^T + \Delta \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} + \Delta \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} + \Delta \mathbf{f} \\ \mathbf{g} + \Delta \mathbf{g} \end{bmatrix} \right\}$$

另外, 用 $\eta(\tilde{\mathbf{z}})$ 来表示非结构化向后误差.

现通过推导得出具体的误差表达式. 首先考虑

收稿日期: 2010-01-22

作者简介: 樊宝娟(1985-), 女, 硕士研究生.

秦 梅(联系人), 女, 讲师. E-mail: qinmay2002@sina.com

最简单的 KKT 系统^[2,3]

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \quad a, b, c, d \in R \quad (4)$$

1.1 系数矩阵扰动

设 $[\tilde{x}, \tilde{y}]^T, \tilde{x} \neq 0$ 为线性系统

$$\begin{bmatrix} a + \Delta a & b + \Delta b \\ b + \Delta b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \quad (5)$$

的准确解. 令 $r_d = d - b \tilde{x}, r_f = f - a \tilde{x} - b \tilde{y}$. 可得 $\Delta b = \tilde{x}^{-1} r_d, \Delta a = \tilde{x}^{-1} r_c - \tilde{y} \tilde{x}^{-2} r_d$, 代入式(2), 得到定理 1.

定理 1 设 $[\tilde{x}, \tilde{y}]^T$ 是鞍点问题的计算解, 对于最简单的 KKT 系统式(4), 当系数矩阵发生扰动时, 解的向后误差为

$$\eta^{(\theta)}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \min \|\Delta a, \theta \Delta b\|_F = \left[\frac{(\tilde{x} r_c - \tilde{y} r_d)^2}{\tilde{x}^4} + \frac{\theta^2 r_d^2}{\tilde{x}^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

式中, θ 为参数.

1.2 系数矩阵与右端项均扰动

$$\begin{bmatrix} a + \Delta a & b + \Delta b \\ b + \Delta b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c + \Delta c \\ d + \Delta d \end{bmatrix} \quad (6)$$

由式(6)的第二分式可知, $\Delta b = \tilde{x}^{-1}(r_d + \Delta d)$, 代入式(6)的第一分式可得

$$\tilde{x} \Delta a + \tilde{y} \tilde{x}^{-1} \Delta d - \Delta c = r_c - \tilde{y} \tilde{x}^{-1} r_d \quad (7)$$

此时求解向后误差, 相当于在约束条件式(7)下求解

$$\min_{\Delta a, \Delta f, \Delta g} \{ \Delta a^2 + \lambda^2 \Delta c^2 + (\theta^2 \tilde{x}^{-2} + \mu^2) \Delta d^2 + 2\theta^2 \tilde{x}^{-2} r_d \Delta d + \theta^2 \tilde{x}^{-2} r_d^2 \}$$

的极值问题. 可以求出此极小值, 从而得到向后误差.

定理 2 设 $[\tilde{x}, \tilde{y}]^T$ 是鞍点问题的计算解, 对于最简单的 KKT 系统式(4), 当右端项与系数矩阵均发生扰动时, 解的向后误差为

$$\eta^{(\theta, \lambda, \mu)}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \min \|\Delta a, \theta \Delta b, \lambda \Delta c, \mu \Delta d\|_F = \left[\frac{\lambda^2 \mu^2 (r_d \tilde{x} - r_d \tilde{y})^2 + \theta^2 (\lambda^2 r_c^2 + \mu^2 r_d^2) + \theta^2 \lambda^2 \mu^2 \tilde{x}^2 r_d^2}{\theta^2 + \lambda^2 \tilde{y}^2 + \mu^2 \tilde{x}^2 + \theta^2 \lambda^2 \tilde{x}^2 + \lambda^2 \mu^2 \tilde{x}^4} \right]^{\frac{1}{2}}$$

式中, θ, λ, μ 为参数.

现研究一般情形, 为简洁起见, 2-范数 $\|\cdot\|_2$ 均记为 $\|\cdot\|$. 先给出 3 个引理.

2 3 个引理

引理 1^[4] 给定 $f \neq 0 \in R^m, g \in R^n, Xf = g$ 的

解为

$$X^T = f^+ g^T + (I - ff^+)Z, (Z \in R^{m \times n})$$

引理 2^[5] 给定 $F \in R^{p \times m}, G \in R^{n \times q}, K \in R^{p \times q}$, 令 $X_* = F^+ KG^+$, 则

$$\min_{X \in R^{m \times n}} \|FXG - K\|_F = \|FX_*G - K\|_F$$

引理 3^[2] 令 Φ 为对称正定矩阵.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \alpha I_m + \beta \xi u u^T & -\xi u^T P \\ -\xi P u^T & \gamma I_n + \xi P P^T \end{bmatrix}$$

式中, $u \in R^m, p \in R^n, \alpha, \beta, \lambda, \xi$ 为实数, 且 $\alpha, \beta, \gamma > 0$. 令

$$\Phi^{-1} = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{bmatrix}, \quad \Psi_{11} \in R^{m \times m}$$

则

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= \frac{1}{\alpha} (I_m - \xi(\beta\gamma + \beta\gamma\|p\|^2 - \xi\|p\|^2)uu^T/\phi) \\ \Psi_{12} &= \xi up^T/\phi \\ \Psi_{22} &= \frac{1}{\beta} (I_n - \xi(\alpha + \beta\xi\|u\|^2 - \xi\|u\|^2)pp^T/\phi) \end{aligned}$$

其中

$$\phi = \alpha(\gamma + \xi\|p\|^2) + \xi\|u\|^2(\beta\gamma + \beta\xi\|p\|^2 - \xi\|p\|^2)$$

3 鞍点问题一般形式的结构化向后误差分析

3.1 系数矩阵的结构化扰动^[6,7]

设 $[\tilde{u}^T, \tilde{p}^T]^T$ 为式(1)的计算解, 与式(4)对应的是

$$\begin{bmatrix} A + \Delta A & B^T + \Delta B^T \\ B + \Delta B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \quad (8)$$

令 $r_f = f - A - B^T \tilde{p}, r_g = g - B \tilde{u}$. 由式(5)第二分式

$$\Delta B \tilde{u} = r_g$$

由引理 1 得

$$\Delta B^T = \tilde{u}^+ r_g^T + (I - \tilde{u} \tilde{u}^+)Z \quad (9)$$

式中, Z 为任意.

将式(9)代入式(8)第一分式, 结合引理 1, 有

$$\begin{aligned} \Delta A^T &= \tilde{u}^+ r_f^T - (r_g^T \tilde{p}) \tilde{u}^+ - \\ & (I - \tilde{u} \tilde{u}^+) Z \tilde{p}^T + (I - \tilde{u} \tilde{u}^+) W \end{aligned}$$

式中, W 为任意.

令

$$\begin{aligned} F &= (I - \tilde{u} \tilde{u}^+)Z, G = r_f \tilde{u}^+ - (\tilde{r}^T \tilde{p}) \tilde{u}^+ \tilde{u}^+ \\ M &= F[\theta^2 I + \tilde{p} \tilde{u}^+ (\tilde{p} \tilde{u}^+)^T]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{N}^T = [\theta^2 \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{u}}^+ (\tilde{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{u}}^+)^T]^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{u}}^+ \mathbf{G}^T$$

则有

$$\|\Delta \mathbf{A}\|_F^2 + \theta^2 \|\Delta \mathbf{B}\|_F^2 = \|\mathbf{M} - \mathbf{N}\|_F^2 - \|\mathbf{N}\|_F^2 + \theta^2 \|\mathbf{r}_g \tilde{\mathbf{u}}^+\|_F^2 + \|\mathbf{G}\|_F^2 + \|(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}}^+) \mathbf{W}\|_F^2$$

从而得定理 3.

定理 3 设 $[\tilde{\mathbf{u}}^T, \tilde{\mathbf{p}}^T]^T$ 是鞍点问题的计算解, 对于一般形式(1), 当系数矩阵发生扰动时, 解的向后误差为

$$\begin{aligned} [\eta^{(\theta)}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{p}})]^2 &= \frac{\theta^2 \|\mathbf{r}_g\|^2}{\|\tilde{\mathbf{u}}\|^2} + \\ &\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{u}}\|^4} \left\| \mathbf{r}_f \tilde{\mathbf{u}}^T - \frac{\mathbf{r}_g^T \tilde{\mathbf{p}}}{\|\tilde{\mathbf{u}}\|^2} \tilde{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}}^T \right\|_F^2 - \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{u}}\|^4} \cdot \\ &\left\| \left(\theta^2 \mathbf{I} + \frac{\tilde{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{p}}^T}{\|\tilde{\mathbf{u}}\|^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[\tilde{\mathbf{p}} \mathbf{r}_f^T - \frac{\mathbf{r}_f^T \tilde{\mathbf{u}}}{\|\tilde{\mathbf{u}}\|^2} \tilde{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{u}}^T \right] \right\|_F^2 \end{aligned} \quad (10)$$

显然, 式(10)与简单情形的结果是对应的.

3.2 系数矩阵和右端项均发生扰动

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} + \Delta \mathbf{A} & \mathbf{B}^T + \Delta \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} + \Delta \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} + \Delta \mathbf{f} \\ \mathbf{g} + \Delta \mathbf{g} \end{bmatrix}$$

现用 $\eta^{(\theta)}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{p}})$ 导出 $\eta^{(\theta, \lambda, \mu)}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{p}})$. 将 $\eta^{(\theta)}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{p}})$ 记为

$$\begin{aligned} [\eta^{(\theta)}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{p}})]^2 &= \theta^2 \tau \|\mathbf{r}_g\|^2 + (\tau - \sigma) \|\mathbf{r}_f\|^2 + \\ &\tau^2 (\mathbf{r}_g \tilde{\mathbf{p}})^2 - 2\tau^2 (\mathbf{r}^T \tilde{\mathbf{u}})^2 (\mathbf{r}_g^T \tilde{\mathbf{p}})^2 + \tau \sigma (\mathbf{r}_f^T \tilde{\mathbf{u}})^2 \end{aligned}$$

其中, $\tau = \|\tilde{\mathbf{u}}\|^{-2}$, $\rho = \tau^2 \|\tilde{\mathbf{p}}\|^2 (\theta^2 + \tau \|\tilde{\mathbf{p}}\|^2)^{-1}$. 另外, 还定义 $\rho = \tau - \sigma + \lambda^2$, 则有

$$[\eta^{(\theta, \lambda, \mu)}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{p}})]^2 = \min_{\Delta \mathbf{f}, \Delta \mathbf{g}} \{ \lambda^2 \|\Delta \mathbf{f}\|^2 + \mu^2 \|\Delta \mathbf{g}\|^2 + \min_{\Delta \mathbf{A}, \Delta \mathbf{B}} \{ \|\Delta \mathbf{A}\|_F, \theta \|\Delta \mathbf{B}\|_F \} \|\tilde{\mathbf{p}}\|_F^2 \} = \min_{\Delta \mathbf{f}, \Delta \mathbf{g}} \chi(\Delta \mathbf{f}, \Delta \mathbf{g})$$

其中

$$\begin{aligned} \chi(\Delta \mathbf{f}, \Delta \mathbf{g}) &= [\eta^{(\theta)}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{p}})]^2 + 2 \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{f} \\ \Delta \mathbf{g} \end{bmatrix}^T \cdot \\ &\begin{bmatrix} (\tau - \sigma) \mathbf{r}_f + (\tau \tilde{\mathbf{u}} - \tau^2 \mathbf{r}_g^T \tilde{\mathbf{p}}) \tilde{\mathbf{u}} \\ \tau \theta^2 \mathbf{r}_g + \tau^2 (\mathbf{r}^T \tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{r}^T \tilde{\mathbf{u}}) \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{f} \\ \Delta \mathbf{g} \end{bmatrix}^T \cdot \\ &\begin{bmatrix} \rho \mathbf{I}_m + \tau \tilde{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}}^T & -\tau^2 \tilde{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{p}}^T \\ -\tau^2 \tilde{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{u}}^T & (\tau \theta^2 + \mu^2) \mathbf{I}_n + \tau^2 \tilde{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{p}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{f} \\ \Delta \mathbf{g} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

简记为 $\chi(\omega) = [\eta^{(\theta)}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{p}})]^2 + 2\omega^T \mathbf{b} + \omega^T \Phi \omega$, 显然, 当 $\omega = -\Phi^{-1} \mathbf{b}$ 时, $\chi(\Delta \mathbf{f}, \Delta \mathbf{g})$ 取最小值, 相应地

$$[\eta^{(\theta, \lambda, \mu)}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{p}})]^2 = [\eta^{(\theta)}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{p}})]^2 - \mathbf{b}^T \Phi^{-1} \mathbf{b}$$

根据引理 3^[2], 经过计算可以得到

$$\mathbf{b}^T \Phi^{-1} \mathbf{b} = \frac{(\tau - \sigma)^2}{\rho} \|\mathbf{r}_f\|^2 + \frac{\theta^4 \tau^2}{\theta^2 \tau + \mu^2} \|\mathbf{r}_g\|^2 +$$

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\tau^3}{\rho} \left(\frac{2\sigma}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2} - \frac{\xi}{\phi} \right) - \frac{2\tau^5 \|\tilde{\mathbf{p}}\|^2}{\phi} + \right. \\ &\left. \frac{\tau^4 \|\tilde{\mathbf{p}}\|^2}{\theta^2 \tau + \mu^2} \left(1 - \frac{\lambda^2 \tau^2 \|\tilde{\mathbf{p}}\|^2}{\phi} \right) \right] (\mathbf{r}_f^T \tilde{\mathbf{u}})^2 + \\ &\left[\frac{\tau^3}{\rho} \left(1 - \frac{\xi}{\phi} \right) + \frac{\tau^3 (2\theta^2 + \tau \|\tilde{\mathbf{p}}\|^2)}{\theta^2 \tau + \mu^2} - \right. \\ &\left. \frac{2\tau^4}{\phi} (\theta^2 + \tau \|\tilde{\mathbf{p}}\|^2) - \frac{\lambda^2 \tau^4}{\phi (\theta^2 \tau + \mu^2)} (\theta^2 + \right. \\ &\left. \tau \|\tilde{\mathbf{p}}\|^2)^2 \right] (\mathbf{r}_g^T \tilde{\mathbf{p}})^2 + \left[\frac{2\tau^4}{\phi} (\theta^2 + 2\tau \|\tilde{\mathbf{p}}\|^2) - \right. \\ &\left. \frac{2\tau^3}{\rho} \left(1 - \frac{\xi}{\phi} \right) - \frac{2\tau^3 (\theta^2 + \tau \|\tilde{\mathbf{p}}\|^2)}{\theta^2 \tau + \mu^2} \right. \\ &\left. \left(1 - \frac{\lambda^2 \tau^2 \|\tilde{\mathbf{p}}\|^2}{\phi} \right) \right] (\mathbf{r}_f^T \tilde{\mathbf{u}}) (\mathbf{r}_g^T \tilde{\mathbf{p}}) \end{aligned} \quad (11)$$

至此, 求出了 $\eta^{(\theta, \lambda, \mu)}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{p}})$ 的表达式.

定理 4 设 $[\tilde{\mathbf{u}}^T, \tilde{\mathbf{p}}^T]^T$ 是鞍点问题的计算解, 对于一般形式(1), 当右端项与系数矩阵均发生扰动时, 解的向后误差为

$$[\eta^{(\theta, \lambda, \mu)}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{p}})]^2 = [\eta^{(\theta)}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{p}})]^2 - \mathbf{b}^T \Phi^{-1} \mathbf{b} \quad (12)$$

式中, $\mathbf{b}^T \Phi^{-1} \mathbf{b}$ 由式(11)给出.

4 数值例子

例 1 一个 3×3 矩阵, 取

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 + 10^k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = -1$$

其中, $k \gg 1$. 对应与式(1)的准确解为 $\mathbf{z} = [\mathbf{u}^T, \mathbf{p}]^T$, $\mathbf{u} = [0, 1]^T$, $\mathbf{p} = -1$. 计算解为 $\tilde{\mathbf{z}} = [\tilde{\mathbf{u}}^T, \tilde{\mathbf{p}}]^T$, $\tilde{\mathbf{u}} = [-10^{-l} \quad 1]^T$, $\tilde{\mathbf{p}} = -1 + 10^{-l}$, 这里, $l \gg 1$. 显然, $\|\tilde{\mathbf{u}}\|_2 \approx 1$, $\|\tilde{\mathbf{p}}\|_2 \approx 1$, $\|\mathbf{r}_f\|_2 = 10^{-l}$, $\|\mathbf{r}_g\|_2 = 10^{-l}$, $\lambda_* = \|\mathbf{A}\|_F / \|\mathbf{f}\|_2 \approx 1$, $\theta_* \mu_*^{-1} = \|\mathbf{g}\|_2 / \|\mathbf{B}\|_F = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 容易验证

$$\eta^{(\theta, \lambda, \mu)}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{p}}) \approx \sqrt{\frac{1}{3}} \times 10^{-l}$$

$$\eta(\tilde{\mathbf{z}}) \approx \sqrt{\frac{2}{3}} \times 10^{-(k+l)}$$

所以, $\eta^{(\theta, \lambda, \mu)}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{p}}) / \eta(\tilde{\mathbf{z}}) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \times 10^k \gg 1$. 结构化

向后误差与非结构化向后误差可以相差任意大.

例2 考虑 KKT 系统

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{DPD}, \quad \mathbf{P} = \text{pascal}(6),$$

$$\mathbf{D} = \text{diag}([1, 5, 10, 50, 100, 10\ 000])$$

$$\mathbf{f} = [10^8, 10, 0, 0, 0, 0]^T, \quad \mathbf{g} = [10^{-8}, 0, 0]^T$$

计算中要用到的参数 $\theta = 1.781\ 955\ 403\ 507\ 561 \times 10^{10}$, $\lambda = 2.520\ 066\ 129\ 200\ 698 \times 10^2$, $\mu = 2.520\ 066\ 129\ 200\ 710 \times 10^{18}$. 文献[7]用部分选主元的 Gauss 消去法求解,给出了相应的计算结果,并得到了范数型结构化向后误差为

$$\eta^{(\theta, \lambda, \mu)}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{p}}) \approx 1$$

这个结果是不准确的. 现说明本文公式的数值稳定性要比文献[7]的好. 由文献[7]的公式,用 MATLAB 软件计算后,有

$$\hat{\mathbf{r}}_f^T \tilde{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{r}}_g^T \tilde{\mathbf{p}} = -4.137\ 291\ 383\ 779\ 108 \times 10^{-6}$$

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{r}}_f^T \tilde{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{r}}_g^T \tilde{\mathbf{p}}}{\|\tilde{\mathbf{u}}\|^2} \right)^2 \approx 6 \times 10^{20}$$

精确计算表明

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{r}}_f^T \tilde{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{r}}_g^T \tilde{\mathbf{p}}}{\|\tilde{\mathbf{u}}\|^2} \right)^2 \approx 4 \times 10^{-4}$$

式中,除数 $\|\tilde{\mathbf{u}}\| = 1.275\ 861\ 970\ 190\ 165 \times 10^{-08}$,是很小的数.

直接用文献[7]的公式计算这个例子,会出现大数吃小数,两个相近的数相减,以及除以一个很小的数等现象,导致数值稳定性很差,用本文给出的与文献[7]的公式等价的式(12),可以得到正确的结果

$$\eta^{(\theta, \lambda, \mu)}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{p}}) \approx 0.1$$

5 结束语

研究了一般情形的 KKT 系统的范数型结构化向后误差,得出了具体的误差表达式,并结合数值例子,通过与文献[7]方法得到的范数型结构化向后误差进行比较,验证了该方法的正确性,然而,由实际问题(如流场中无质量源,求解 Navier-Stokes 方程)中导出的许多具有特殊结构的 KKT 系统,如式(1)中的 $\mathbf{A}$ 为半正定阵,右端项中的 $\mathbf{g} = 0$,且 $\mathbf{g}$ 不发生扰动等,这些情形所对应的误差表达式也可由式(12)推导得出.

参考文献:

- [1] 曹志浩. 多格子方法[M]. 上海:复旦大学出版社,1989.
- [2] SUN J G. Structured backward errors for KKT systems[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1999, 288(1): 75-88.
- [3] 刘新国,王卫国. 关于结构 KKT 方程组的扰动分析[J]. 计算数学, 2004, 26(2): 179-188.
- [4] SUN J G. Backward perturbation analysis of certain characteristic subspaces[J]. Numer Math, 1993, 65(1): 357-382.
- [5] STEWART C W, SUN J G. Matrix perturbation theory[M]. New York: Academic Press, 1990.
- [6] 孙继广. 矩阵扰动分析[M]. 第2版. 北京:科学出版社, 2001.
- [7] SUN J G. A note on backward errors for structured linear systems[J]. Numer Linear Algebra Appl, 2005, 12(7): 585-603.