

文章编号:1007-6735(2010)05-0457-04

潜伏期和染病期均传染的 SEIS 模型的分析

赵海全, 王美娟, 唐春婷
(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 研究了潜伏期和染病期均传染的 SEIS 模型. 给出了各类平衡点存在的条件阈值, 证明了无病平衡点全局渐近稳定性的条件, 并且利用第二加性复合矩阵给出了地方平衡点的存在性和全局渐近稳定性的充分条件.

关键词: 流行病模型; 平衡点; 全局渐近稳定性; 复合矩阵

中图分类号: O 175.13 **文献标志码:** A

Analysis of SEIS epidemic model with transmission in both latent period and infected period

ZHAO Hai-quan, WANG Mei-juan, TANG Chun-ting
(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: A kind of SEIS epidemic models with transmission in both latent period and infected period was studied. The threshold for the existence condition of all kinds of equilibriums were identified, the global asymptotic stability of disease-free equilibrium was proved, and the sufficient condition for the existence and the global asymptotic stability of the endemic equilibrium point was also proved by use of the second compound matrix.

Key words: epidemic model; equilibrium; global asymptotic stability; compound matrix

传染病严重危害着人类健康与社会经济的发展,对传染病发病机理、传播规律和防治策略的研究是数学应用的一个重要方面.通过数学模型来定性和定量地分析疾病的发展过程,揭示流行规律,预测变化趋势,分析疾病流行的因素,寻求预防和控制的最优策略是进行传染病研究的一个重要方面^[1].在以往的流行病建模中,对潜伏期传染的情况很少考虑,而有些流行病,它不仅在染病期传染,在潜伏期也传染^[2].文献[2]对 SEIRS 流行病模型地方平衡点研究了局部稳定性,本文在文献[2]的基础上,考虑了因病死亡,并且利用第二加性复合矩阵证明了潜伏期和染病期均传染的 SEIS 模型的地方平衡点

全局渐近稳定的充分条件.

1 模 型

讨论模型

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= u - uS - (\beta_1 E + \beta_2 I)S + \alpha I \\ \frac{dE}{dt} &= (\beta_1 E + \beta_2 I)S - (u + k)E \\ \frac{dI}{dt} &= kE - (u + \alpha + b)I \\ S(0) &= S_0, E(0) = E_0, I(0) = I_0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

收稿日期: 2009-12-31
作者简介: 赵海全(1981-),男,硕士研究生.
王美娟(联系人),女,教授. E-mail: meijuan2000@163.com

式中, S, E, I 分别为易感者、潜伏者、染病者的数量; u 为自然出生率(自然死亡率); β_1, β_2 分别为潜伏者、染病者所具有的传染力; k 为潜伏者成为染病者的比例; α 为染病者的康复率, b 为因病死亡率. 考虑生物学意义, 假设所有的参数都非负.

由系统(1)的前3个方程相加, 可得

$$\frac{d}{dt}(S+E+I) = u - u(S+E+I) - bI \leq u - u(S+E+I)$$

易知集合

$$D = \{(S, E, I) \in R_+^3, 0 < S + E + I \leq 1\}$$

是系统(1)的正向不变集.

2 预备知识

引理 1^[3] 假设 $f: [0, +\infty) \rightarrow R$ 是有界和二次可微, 且二阶导数有界. 若当 $n \rightarrow \infty$ 时, $t_n \rightarrow \infty$ 且 $f(t_n) \rightarrow f^\infty$, 则 $f'(t_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, 其中, 记

$$f_\infty = \liminf_{t \rightarrow \infty} f(t), f^\infty = \limsup_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

现介绍证明平衡点全局稳定性的一种方法. 这里只给出一些基本概念和主要引理, 其详细的证明见文献[4].

设函数 $f(x)$ 是一个定义在开集 $D \subset R^n$ 上的一阶连续可微函数, 考虑微分方程

$$x' = f(x) \quad (2)$$

记 $x(t, x_0)$ 是方程的满足 $x(0, x_0) = x_0$ 的解. 假设条件:

(H₁) 存在一个紧吸引集 $K \subset D$;

(H₂) 方程在 D 内有唯一的平衡点 $\bar{x}$.

定义 1 若 f 满足某条件使方程(2)不存在非常数周期解, 这样的条件称 Bendixson 判据.

定义 2 $x_0 \in D$ 称为方程(2)的游荡点, 如果存在 x_0 的邻域 U 及 $T > 0$, 使得 $\forall t > T, U \cap x(t, U)$ 是空集. 显然, 所有的平衡点和极限点都不是游荡点.

引理 2^[5] 若条件(H₁)和条件(H₂)成立, 且方程(2)满足 Bendixson 判据, f 在方程(2)的所有非平衡点和非游荡点的 C^1 局部 ϵ 扰动是鲁棒的, 则 $\bar{x}$ 稳定蕴含着 $\bar{x}$ 在 D 内全局渐近稳定.

一般地, 一个 $n \times n$ 矩阵的第 k 加性复合矩阵 $A^{[k]} (1 \leq k \leq n)$ 定义为

$$A^{[k]} = D_+ (I + hA)^{(k)} \big|_{h=0}$$

其中, $A^{[k]}$ 是一个 $N \times N$ 矩阵, $N = C_n^k, B^{(k)}$ 代表矩阵 B 的 k 阶外幂, D_+ 代表右导数, 详见文献[6].

在引理 2 中, 若 D 区间是单连通的, $x \rightarrow P(x)$

是一个 $C_n^2 \times C_n^2$ 的矩阵值函数, 且在 $x \in D$ 是 C^1 的. 假设 $P^{-1}(x)$ 存在, 且在 $\forall x \in K$ 连续, K 是紧吸引集. 定义

$$q = \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x_0 \in K} \frac{1}{t} \int_0^t \chi(B(x(s, x_0))) ds \quad (3)$$

其中

$$B = P_f P^{-1} + P \frac{\partial f^{[2]}}{\partial x} P^{-1}, \chi(B) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(I + hB) - 1}{h}$$

这里, P_f 是将矩阵中的每一个元素 P_{ij} , 用 P_{ij} 沿 f 的方向导数取代而得到的矩阵.

引理 3^[4] 设 D 是单连通区域, 且条件(H₁)和条件(H₂)成立, 则当 $q < 0$ 时, 方程(2)在 D 内的唯一平衡点全局渐近稳定.

3 平衡点的存在性

系统(1)总存在无病平衡点 $P_0(1, 0, 0)$, 令

$$R_0 = \frac{\beta_1(u + \alpha + b) + k\beta_2}{(u + k)(u + \alpha + b)}$$

则当且仅当 $R_0 > 1$ 时, 除无病平衡点 P_0 外, 还存在唯一的地方平衡点 $P_1(S_1, E_1, I_1)$, 其中

$$S_1 = \frac{(u + k)E_1}{\beta_1 E + \beta_2 I}, E_1 = \frac{(u + \alpha + b)}{k} I_1$$

$$I_1 = \frac{(1 - R_0)ku}{R_0[k\alpha - (u + k)(u + \alpha + b)]}$$

其中, R_0 为阈值.

4 主要结论

定理 1 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 $P_0(1, 0, 0)$ 在 D 内全局渐近稳定.

证明 当 $R_0 < 1$, 即 $\beta_1(u + \alpha + b) + k\beta_2 < (u + k)(u + \alpha + b)$ 时, 得出 $\beta_1 < u + k$. 易计算系统(1)在无病平衡点 $P_0(1, 0, 0)$ 的雅可比矩阵为

$$J_{P_0} = \begin{bmatrix} -u & -\beta_1 & -\beta_2 + \alpha \\ 0 & \beta_1 - (u + k) & \beta_2 \\ 0 & k & -(u + \alpha + b) \end{bmatrix}$$

因此, J_{P_0} 的特征方程为

$$\lambda^3 + c_1 \lambda^2 + c_2 \lambda + c_3 = 0$$

其中

$$c_1 = 3u + \alpha + bk - \beta_1 > 0$$

$$c_2 = [u(2u + \alpha + b + k - \beta_1) + (u + \alpha + b)(u + k - \beta_1) - k\beta_2] > 0$$

$$c_3 = u[(u + \alpha + b)(u + k - \beta_1) - k\beta_2] > 0$$

$$c_1 c_2 - c_3 = (2u + \alpha + b + k - \beta_1)^2 + (2u + \alpha + b + k - \beta_1)[(u + \alpha + b)(u + k - \beta_1) - k\beta_2] > 0$$

从而由 Routh-Hurwitz 定理知,无病平衡点 $P_0(1, 0, 0)$ 在 D 上是局部渐近稳定的.

现证明无病平衡点的全局吸引性.

将系统(1)的后两个方程化为积分方程,得

$$\left. \begin{aligned} E(t) &\leq e^{-(u+k)t} E_0 + \int_0^t e^{-(u+k)\tau} [\beta_1 E(t-\tau) + \beta_2 I(t-\tau)] d\tau \\ I(t) &\leq e^{-(u+\alpha+b)t} I_0 + k \int_0^t e^{-(u+\alpha+b)\tau} E(t-\tau) d\tau \end{aligned} \right\} (4)$$

在式(4)两个不等式两边取上极限,得

$$\left. \begin{aligned} \limsup_t E &\leq \int_0^\infty e^{-(u+k)\tau} [\beta_1 \limsup_t E + \beta_2 \limsup_t I] d\tau = \\ &\quad \frac{1}{u+k} (\beta_1 \limsup_t E + \beta_2 \limsup_t I) \\ \limsup_t I &\leq \frac{k}{u+\alpha+b} \limsup_t E \end{aligned} \right\} (5)$$

将式(5)的第2式代入第1式整理后得

$$\limsup_t E \leq R_0 \limsup_t E$$

故当 $R_0 < 1$ 时,得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0 \quad (6)$$

由式(5)和式(6)得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0 \quad (7)$$

由引理1,选取数列 $t_n \rightarrow \infty, s_n \rightarrow \infty$,使得 $S(s_n) \rightarrow S^\infty, S(t_n) \rightarrow S_\infty, S'(s_n) \rightarrow 0, S'(t_n) \rightarrow 0$ 再由式(6)和式(7),从系统(1)的第1式得

$$\begin{cases} 0 = u - u \limsup_t S \\ 0 = u - u \liminf_t S \end{cases}$$

从而

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 1$$

$$J^{[2]} = \begin{pmatrix} -u + \beta_1(S - E) - \beta_2 I - (u + k) & \beta_2 S & \beta_2 S - \alpha \\ k & -2u - (\beta_1 E + \beta_2 I) - (\alpha + b) & -\beta_1 S \\ 0 & \beta_1 E + \beta_2 I & \beta_1 S - (2u + k) - (\alpha + b) \end{pmatrix}$$

选取 $P(S, E, I) = \text{diag}\left(1, \frac{E}{I}, \frac{E}{I}\right)$, 则

$$P_f P^{-1} = \text{diag}\left(0, \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I}, \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I}\right)$$

因此,当 $R_0 < 1$ 时,无病平衡点全局吸引,定理1成立.

定理2 当 $R_0 > 1$ 时,无病平衡点 $P_0(1, 0, 0)$ 是不稳定的,且当

$$\frac{\beta_1(u+k)}{\beta_2 k + \beta_1(u+\alpha+b)} > 1$$

时,地方平衡点 $P_1(S_1, E_1, I_1)$ 在 D 全局渐近稳定.

证明 从定理1的证明过程中容易得到,当 $R_0 > 1$ 时,无病平衡点是不稳定的.现证明地方平衡点的稳定性.

先用 Hurwitz 准则证明地方平衡点的局部渐近稳定性.系统(1)在 P_1 处的雅可比矩阵 J_{P_1} 为

$$J_{P_1} = \begin{pmatrix} -u - (\beta_1 E + \beta_2 I) & -\beta_1 S & -\beta_1 S + \alpha \\ \beta_1 E + \beta_2 I & \beta_1 S - (u + k) & \beta_2 S \\ 0 & k & -(u + \alpha + b) \end{pmatrix}$$

整理得系统(1)在该点处的特征方程为

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$$

其中

$$a_1 = u + \alpha + b + \beta_2 k \frac{S_1}{u + \alpha + b} + \frac{u + \alpha I_1}{S_1} > 0$$

$$a_2 = \left(u + \alpha + b + \beta_2 k \frac{S_1}{u + \alpha + b}\right) \left(\frac{u + \alpha I_1}{S_1}\right) +$$

$$\frac{\beta_1 S_1 I_1}{k} (\beta_2 k + \beta_1(u + \alpha + b)) > 0$$

$$a_3 = \frac{\beta_2 k + \beta_1(u + \alpha + b)}{k} [\beta_1 S_1(u +$$

$$\alpha + b) + \beta_2 k S_1 - \alpha k] I_1 > 0$$

经计算,当条件 $\frac{\beta_1(u+k)}{\beta_2 k + \beta_1(u+\alpha+b)} > 1$ 成立

时,可得 $\frac{\beta_1 S_1}{u + \alpha + b} > 1$, 从而 $a_1 a_2 - a_3 > 0$, 即 Hurwitz 稳定性条件满足,证明了当定理2的条件满足时,地方平衡点局部渐近稳定.

现证明其全局稳定性.

矩阵 J_{P_1} 的第二加性复合矩阵为

矩阵 $B = P_f P^{-1} + P J^{[2]} P^{-1}$, 可写成分块矩阵

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{11} &= -u - (\beta_1 E + \beta_2 I) + \beta_1 S - (u + k), \quad \mathbf{B}_{12} = \left(\frac{I}{E} \beta_2 S, \frac{I}{E} (\beta_2 S - \alpha) \right), \quad \mathbf{B}_{21} = \left(\frac{kE}{I}, 0 \right) \\ \mathbf{B}_{22} &= \begin{pmatrix} \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - u - (\beta_1 E + \beta_2 I) - (u + \alpha + b) & -\beta_1 S \\ \beta_1 E + \beta_2 I & \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} + \beta_1 S - (u + k) - (u + \alpha + b) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

令 (χ, v, w) 是 R^3 上的一个向量,其上定义范数 $\|\cdot\|$ 为

$$\|(\chi, v, w)\| = \max\{|\chi|, |v| + |w|\}$$

相应于范数 $\|\cdot\|$ 的Lozinskil测度是 $\chi(\mathbf{B})$.用文献[7]中的估计方法

$$\chi(\mathbf{B}) \leq \sup\{g_1, g_2\}$$

其中

$g_1 = \chi_1(\mathbf{B}_{11}) + |\mathbf{B}_{12}|$, $g_2 = |\mathbf{B}_{21}| + \chi_1(\mathbf{B}_{22})$
 $|\mathbf{B}_{12}|$ 和 $|\mathbf{B}_{21}|$ 是相应于 l_1 向量范数的矩阵范数,
 χ_1 是相应于 l_1 范数的Lozinskil测度,

$$\chi_1(\mathbf{B}_{11}) = -u - (\beta_1 E + \beta_2 I) + \beta_1 S - (u + k)$$

$$|\mathbf{B}_{21}| = \frac{kE}{I} |\mathbf{B}_{12}| = \max\left\{\frac{I}{E} \beta_2 S, \frac{I}{E} (\beta_2 S - \alpha)\right\} = \frac{I}{E} \beta_2 S$$

现计算 $\chi_1(\mathbf{B}_{22})$.将 $\mathbf{B}_{22}$ 的每一列的非对角元素取绝对值,然后相加到相应列的对角元素上,得

$$\mathbf{B}'_{22} = \begin{pmatrix} \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - u - (u + \alpha + b) & -\beta_1 S \\ \beta_1 E + \beta_2 I & \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - (u + k) - (u + \alpha + b) \end{pmatrix}$$

取 $\mathbf{B}'_{22}$ 的两个对角元素的最大值得 $\chi(\mathbf{B}_{22})$,则

$$\chi(\mathbf{B}_{22}) = \max\left\{\frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - u - (u + \alpha), \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - (u + k) - (u + \alpha + b)\right\} = \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - u - (u + \alpha + b)$$

$$g_1 = -u - (\beta_1 E + \beta_2 I) + \beta_1 S - (u + k) + \frac{I}{E} \beta_2$$

$$g_2 = \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - u - (u + \alpha + b) + \frac{kE}{I}$$

由系统(1)得

$$\frac{E'}{E} = \beta_1 S + \frac{\beta_2 IS}{E} - (u + k), \quad \frac{I'}{I} = \frac{kE}{I} - (u + \alpha + b)$$

代入 g_1 和 g_2 ,得

$$g_2 = \frac{E'}{E} - u, \quad g_1 = -u - (\beta_1 E + \beta_2 I) + \frac{E'}{E}$$

$$\text{再利用 } \chi(\mathbf{B}) \leq \sup\{g_1, g_2\} \text{ 得 } \chi(\mathbf{B}) \leq \frac{E'}{E} - u,$$

对任意的 $t > t^*$ 时成立,从而

$$\frac{1}{t} \int_0^t \chi(\mathbf{B}) ds \leq \frac{1}{t} \int_0^t \chi(\mathbf{B}) ds + \frac{1}{t} \lg \frac{E(t)}{E(t^*)} - u \frac{t - t^*}{t}$$

即有

$$q = \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} \frac{1}{t} \int_0^t \chi(\mathbf{B}) ds \leq -\frac{u}{2} < 0$$

因此,由引理3可知,当定理2中的条件满足时,地方病平衡点的局部稳定性蕴含着全局稳定性.证毕.

5 结束语

本文考虑了一类潜伏期和染病期都有传染的SEIS流行病模型,得到了各类平衡点存在的条件阈值 R_0 .当 $R_0 < 1$,即一个病人在平均患病期内所传染的最大人数小于1时,疾病会自然逐渐消亡,此时无病平衡点是全局渐近稳定的.当 $R_0 > 1$,即一个病人在平均患病期内所传染的人数大于1时,疾病不会消失,而是会始终存在,最终成为一种地方病,此时得到了地方平衡点存在和全局渐近稳定性的充分条件.由本文结论可以看出,要防止病症流行,必须减少阈值,使其小于1,亦即一个染病者在平均患病期能传染的最大人数小于1,这样病症逐渐消亡;否则,若阈值大于1,疾病将始终存在而形成地方病.

在本文中,由 R_0 的表达式可知,当考虑在潜伏期也具有传染后,阈值 R_0 变大.因此,考虑在潜伏期疾病也传染对研究传染病灭绝具有重要的意义.

参考文献:

- [1] 马知恩,周义仓,王稳地,等.传染病动力学的数学建模与研究[M].北京:科学出版社,2004.
- [2] 韩丽涛,马知恩.一类潜伏期和染病期均传染的流行病模型[J].生物数学学报,2001,16(2):392-398.
- [3] THIEME H R. Persistence under relaxed point-dissipativity with applications to an epidemic model[J]. Mathematical Analysis, 1993, 24(2):407-435.
- [4] LI M Y, MULDOWNNEY J S. A geometric approach to global-stability problems[J]. Mathematical Analysis, 1996, 27(2):1070-1083.
- [5] LI M Y, WANG L C. Global stability in some SEIR epidemic models[J]. Institute of Mathematics and Its Applications, 2002, 126:295-311.
- [6] MULDOWNNEY J S. Compound matrices and ordinary differential equations[J]. Rocky Mount J Math, 1990, 20(4):857-872.
- [7] MARTIN J R H. Logarithmic norms and projections applied to linear differential systems[J]. Mathematical Analysis and Applications, 1974, 45(2):432-454.