

文章编号:1007-6735(2010)05-0461-05

一类具有非线性饱和传染率的传染病模型分析

张拥军, 王美娟, 徐金瑞

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 讨论了一类具有非线性饱和传染率的传染病模型, 确定了无病平衡点和地方病平衡点存在的条件. 利用不变集原理得到了各类平衡点局部或全局渐近稳定的条件.

关键词: 平衡点; 饱和传染率; Hurwitz 判据; 全局渐近稳定性

中图分类号: O 175.1

文献标志码: A

Analysis on an epidemic model with non-linear saturated incidence rate

ZHANG Yong-jun, WANG Mei-juan, XU Jin-rui

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: Based on the study on an epidemic model with non-linear saturated incidence rate, the conditions for existence of disease-free equilibrium point and endemic equilibrium point were found. By using the largest invariant set principle, the conditions for local or global asymptotic stability of equilibrium points were also found.

Key words: equilibrium; saturated incidence; Hurwitz criterion; global asymptotic stability

1 模型的建立

早在 1927 年, 文献[1]利用动力学的方法建立的仓室模型, 为流行病传播数学模型的研究做了基础性的工作. 对于 SIR 模型或是 SIRS 模型. 目前大多数研究者将流行病的传染率设为双线型 βSI 或是标准型 $(\beta SI)/N$. S, I 分别代表某时刻易感者、染病者数目, β 为传染率系数, N 为人口总数. 实际上, 双线性发生率与标准发生率是两种极端的情形, 介于它们之间的具有饱和特性的接触率可能更加符合实际情况. 如文献[2]讨论了传染率是 $(\beta N^{0.05} SI)/N$ 的模型; 文献[3]考虑了接触的某些随机因素而提

出形如 $U(N) = \alpha N / (1 + bN + \sqrt{1 + 2bN})$ 的接触率 (α, b 均为正常数); 文献[4, 5, 6]研究了具有饱和型传染率形式 $f(S)I$ 的模型, 找到了疾病传播的基本再生数; 文献[7]讨论了具有 $\beta I^p S / (1 + \alpha I^q)$ 型传染率的模型 (p, q 为正数), 发现了当 $p = q = 2$ 时模型会发生 Hopf 分支和 Bogdanov-Takens 分支; 文献[8]考虑一类疾病在竞争系统中流行的模型. 本文讨论了一类具有 $\beta N / (1 + \omega N)$ 型饱和传染率的 SIR 模型, 其中, β, ω 均为正常数. 与文献[9]相比较, 本文讨论的传染率更符合实际, 且易于采取函数方法分析正平衡点的性质. 在讨论非显性平衡点的过程中, 采用函数分析、韦达定理和 Hurwitz 判据相结合的方法, 选取恰当的参数进行分析与讨论, 得到平衡

收稿日期: 2009-03-23

作者简介: 张拥军(1984-), 男, 硕士研究生.

王美娟(联系人), 女, 教授. E-mail: meijuan2000@163.com

点的稳定性条件. 易知 N 较小时, $\beta N/(1+\omega N)$ 与 N 近似成正比, 随着 N 的增大而逐渐达到饱和; 当 N 很大时, $\beta N/(1+\omega N)$ 近似等于常数 β/ω .

模型的流程图如图 1 所示.

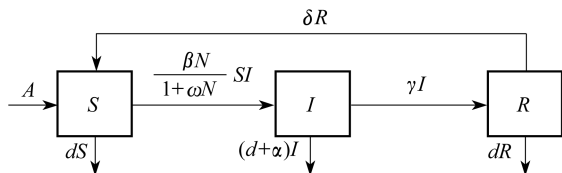


图 1 SIRS 模型流程图

Fig.1 Transfer diagram of a SIRS model

模型为

$$\left. \begin{aligned} S' &= A + \delta R - dS - \frac{\beta N}{1 + \omega N} SI \\ I' &= \frac{\beta N}{1 + \omega N} SI - (d + \alpha + \gamma) I \\ R' &= \gamma I - (\delta + d) R \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, S, I, R, N 分别为 t 时刻易感者、感染者、恢复者数目和人口总数, $N = S + I + R$; A 为模型的常数输入率; d, α 为自然死亡率和因病死亡率; γ 为恢复率系数; δ 为丧失免疫力而变成易感者的比例, 由于医疗水平的进步与人民生活质量的提高, 设 $d > \delta$, 即死亡率大于丧失免疫力系数. 本文中所讨论的参数均为正常数.

易知, $N' = A - dN - \alpha I$. 系统式(1)可以化简为

$$\left. \begin{aligned} S' &= A + \delta(N - S - I) - dS - \frac{\beta N}{1 + \omega N} SI \\ I' &= \frac{\beta N}{1 + \omega N} SI - (d + \alpha + \gamma) I \\ N' &= A - dN - \alpha I \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$N'(t) = A - dN - \alpha I < A - dN$$

易知

$$N(t) \leq \frac{A}{d} + \left(N_0 - \frac{A}{d}\right)e^{-dt} \rightarrow \frac{A}{d} \quad (t \rightarrow +\infty)$$

令

$$Q = \left\{ (S, I, N) \in R_+^3 \mid S \geq 0, I \geq 0, N \leq \frac{A}{d} \right\}$$

则由向量场分析可知, Q 为系统式(2)的正向不变集.

2 平衡点的存在性

系统式(2)存在疾病消除平衡点 $E_0, E_0 = (\frac{A}{d}, 0, \frac{A}{d})$. 现证另一平衡点 $E_1 = (S^*, I^*, N^*)$ 的

存在性. S^*, I^*, N^* 分别代表某特定时刻易感者和感染者数目及人口总数.

$$\left. \begin{aligned} A + \delta(N - S - I) - dS - \frac{\beta N}{1 + \omega N} SI &= 0 \\ \frac{\beta N}{1 + \omega N} S &= (d + \alpha + \gamma) \\ A - dN - \alpha I &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

将方程组(3)整理为关于 N 的方程

$$\begin{aligned} &\beta(\delta\alpha + \alpha d + \delta d + d^2 + d\gamma)N^2 - (d\alpha^2\omega + \\ &\delta\alpha d\omega + d^2\alpha\omega + d\alpha\gamma\omega + \delta\alpha\gamma\omega + \beta Ad + \\ &\delta\alpha^2\omega + \delta A\beta + \beta A\gamma)N - \\ &\alpha(d + \delta)(d + \alpha + \gamma) = 0 \end{aligned}$$

根据韦达定理, 上述方程有且只有一个正根 $N, N = N^*$. 根据式(3)可以找到正平衡点 $E_1(S^*, I^*, N^*)$. 其中, (S^*, I^*, N^*) 满足方程

$$\left. \begin{aligned} A + \delta(N^* - S^* - I^*) &= dS^* + \\ &\quad (d + \alpha + \gamma)I^* \\ \beta N^* S^* &= (d + \alpha + \gamma)(1 + \omega N^*) \\ A &= dN^* + \alpha I^* \end{aligned} \right\}$$

3 平衡点局部渐近稳定性

定理 1 a. 当 $\frac{\beta A^2}{d^2 + d\omega A} - (d + \alpha + \gamma) < 0$ 时, E_0

是局部渐近稳定的; 当 $\frac{\beta A^2}{d^2 + d\omega A} - (d + \alpha + \gamma) > 0$, E_0 是不稳定的;

b. 平衡点 $E_1 = (S^*, I^*, N^*)$ 是局部渐近稳定的.

证明 系统式(2)在 $E_0(\frac{A}{d}, 0, \frac{A}{d})$ 处的一次近似系统的系数矩阵为

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\delta - d & -\delta - \frac{\beta A^2}{d^2 + d\omega A} & \delta \\ 0 & \frac{\beta A^2}{d^2 + d\omega A} - (d + \alpha + \gamma) & 0 \\ 0 & -\alpha & -d \end{bmatrix}$$

其特征根

$$\lambda_1 = -\delta - d, \lambda_2 = \frac{\beta A^2}{d^2 + d\omega A} - (d + \alpha + \gamma), \lambda_3 = -d$$

当 $\frac{\beta A^2}{d^2 + d\omega A} - (d + \alpha + \gamma) < 0$, E_0 是局部渐近稳定的.

当 $\frac{\beta A^2}{d^2 + d\omega A} - (d + \alpha + \gamma) > 0$, E_0 是不稳定的.
 系统式(2)在平衡点 $E_1(S^*, I^*, N^*)$ 处的一次近似系统的系数矩阵为

现分析 $E_1(S^*, I^*, N^*)$ 的局部渐近稳定性.

$$C(E_1) = \begin{bmatrix} \lambda + \delta + d + \frac{\beta N^* I^*}{1 + \omega N^*} & \delta + \frac{\beta N^* S^*}{1 + \omega N^*} & -\delta + \frac{\beta S^* I^*}{(1 + \omega N^*)^2} \\ -\frac{\beta N^* I^*}{1 + \omega N^*} & \lambda - \frac{\beta N^* S^*}{1 + \omega N^*} + (d + \alpha + \gamma) & -\frac{\beta S^* I^*}{(1 + \omega N^*)^2} \\ 0 & \alpha & \lambda + d \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{\alpha N^* (1 + \omega N^*)} \begin{bmatrix} \lambda + \delta + d & \lambda + \delta + d + \alpha + \gamma & -\delta \\ -\beta N^{*2} (A - dN^*) & \lambda \alpha N^* (1 + \omega N^*) & -(d + \alpha + \gamma)(A - dN^*) \\ 0 & \alpha & \lambda + d \end{bmatrix}$$

令

$$B = \begin{bmatrix} \lambda + \delta + d & \lambda + \delta + d + \alpha + \gamma & -\delta \\ -\beta N^{*2} (A - dN^*) & \lambda \alpha N^* (1 + \omega N^*) & -(d + \alpha + \gamma)(A - dN^*) \\ 0 & \alpha & \lambda + d \end{bmatrix}$$

其特征多项式为

$$P(\lambda) = \alpha N^* (1 + \omega N^*) \lambda^3 + N^* (-\beta N^{*2} d + 2\alpha d \omega N^* + \alpha \delta \omega N^* + \beta N^* A + \delta \alpha + 2\alpha d) \lambda^2 +$$

$$(2\beta N^{*2} A d + \beta N^{*2} A \gamma - \alpha \gamma d N^* + \beta N^{*2} A \delta - \beta N^{*3} d \gamma + \alpha d A - \alpha^2 d N^* +$$

$$\alpha^2 A + \alpha N^{*2} d^2 \omega + \delta \alpha d N^* + \delta \alpha N^{*2} d \omega - 2\beta N^{*3} d^2 + \alpha \gamma A + \beta N^{*2} A \alpha -$$

$$\beta N^{*3} d \delta - \beta N^{*3} \alpha d) \lambda + (A - dN^*) (\beta N^{*2} \gamma d + \delta \alpha d + \delta \alpha^2 + \delta \beta N^{*2} d +$$

$$d^2 \alpha + d \alpha^2 + \beta N^{*2} d^2 + d \alpha \gamma + \delta \alpha \gamma + \beta N^{*2} \alpha d + \delta \beta N^{*2} \alpha)$$

根据 Hurwitz 判据, 令

$$H_1 = a_1 = \frac{N^* (-\beta N^{*2} d + 2\alpha d \omega N^* + \alpha \delta \omega N^* + \beta N^* A + \delta \alpha + 2\alpha d)}{\alpha N^* (1 + \omega N^*)} > 0$$

$$a_2 = (2\beta N^{*2} A d + \beta N^{*2} A \gamma - \alpha \gamma d N^* + \beta N^{*2} A \delta - \beta N^{*3} d \gamma + \alpha d A - \alpha^2 d N^* + \alpha^2 A + \alpha N^{*2} d^2 \omega +$$

$$\delta \alpha d N^* + \delta \alpha N^{*2} d \omega - 2\beta N^{*3} d^2 + \alpha \gamma A + \beta N^{*2} A \alpha - \beta N^{*3} d \delta - \beta N^{*3} \alpha d) / \alpha N^* (1 + \omega N^*)$$

再令

$$a_3 =$$

$$\frac{(A - dN^*) (\beta N^{*2} \gamma d + \delta \alpha d + \delta \alpha^2 + \delta \beta N^{*2} d + d^2 \alpha + d \alpha^2 + \beta N^{*2} d^2 + d \alpha \gamma + \delta \alpha \gamma + \beta N^{*2} \alpha d + \delta \beta N^{*2} \alpha)}{\alpha N^* (1 + \omega N^*)} > 0$$

$$\frac{H_2}{N^*} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = -4\beta^2 N^{*4} d^2 A - 2\beta^2 N^{*4} d A \delta + \beta^2 N^{*5} d^2 \delta + \beta^2 N^{*5} d^2 \alpha + 2\beta N^{*2} d^2 \alpha A -$$

$$\beta N^{*2} d \alpha^2 A - 4\beta N^{*4} d^3 \alpha \omega + 2\beta^2 N^{*5} d^3 - 4\beta N^{*3} d^2 \delta \alpha - 4\beta N^{*4} d^2 \delta \alpha \omega - \alpha^3 d^2 \omega N^{*2} +$$

$$2\beta^2 N^{*3} A^2 d + 2\alpha^2 d^3 \omega^2 N^{*3} + 4\alpha d \omega N^{*3} \beta A \delta + \alpha^2 d^2 \omega N^* A + \alpha^2 d^3 N^* - 2\beta^2 N^{*4} d A \alpha +$$

$$4\alpha d^2 \omega N^{*3} \beta A + \alpha^2 d \omega N^{*3} \beta A + \alpha^3 d \omega N^* A + 6\alpha^2 d^2 \omega N^{*2} \delta + 3\alpha^2 d^2 \omega^2 N^{*3} \delta - \alpha^2 d^2 \omega N^{*4} \beta +$$

$$\alpha \delta^2 \omega N^{*3} \beta A + 2\alpha^2 \delta^2 \omega N^{*2} d - \alpha \delta^2 \omega N^{*4} \beta d + \alpha^2 \delta^2 \omega^2 N^{*3} d + \beta^2 N^{*3} A^2 \delta + \beta N^* A^2 \alpha d +$$

$$\alpha^3 d A + \beta N^* A^2 \alpha^2 + \beta^2 N^{*3} A^2 \alpha + 4\beta N^{*2} A \delta \alpha d - \alpha^3 d^2 N^* + \delta^2 \alpha \beta N^{*2} A + \delta^2 \alpha^2 d N^* -$$

$$\delta^2 \alpha \beta N^{*3} d + \alpha^2 d^2 A + 3\alpha^2 d^3 N^{*2} \omega + 3\alpha^2 d^2 \delta N^* - 3\alpha d^3 \beta N^{*3} + \beta^2 N^{*5} d^2 \gamma + \beta^2 N^{*3} A^2 \gamma -$$

$$2\beta^2 N^{*4} d A \gamma - \beta N^{*2} d \alpha \gamma A - \delta \alpha \gamma N^{*3} d + \alpha^2 d \gamma A + \alpha \delta \omega N^{*3} \beta A \gamma + \delta \alpha \beta N^{*2} A \gamma - \alpha^2 d^2 \gamma N^* +$$

$$\alpha^2 d \omega N^* \gamma A - \alpha \delta \omega N^{*4} \beta d \gamma + \beta N^* A^2 \alpha \gamma - \alpha d^2 \omega N^{*4} \beta \gamma + \alpha d \omega N^{*3} \beta A \gamma - \alpha^2 d^2 \omega N^{*2} \gamma$$

设

$$f(\gamma) = (A - dN^*) (A \beta^2 N^{*3} + A \beta N^* \alpha + d \alpha^2 - \beta^2 N^{*4} d + \delta \beta N^{*2} \alpha + \omega N^* d \alpha^2 + \omega N^{*3} \delta \beta \alpha +$$

$$\omega N^{*3} \beta \alpha d) \gamma + (\beta N^* A + \alpha d + \alpha d \omega N^* - \beta N^{*2} d) (\beta N^{*2} A \delta + 2\beta N^{*2} A d + \beta N^{*2} A \alpha + \alpha^2 A +$$

$$\alpha dA - 2\beta N^{*3} d^2 - \beta N^{*3} \alpha d - \beta N^{*3} d\delta + 3\delta \alpha N^{*2} d\omega + N^{*2} \alpha \delta^2 \omega + 2\alpha N^{*2} d^2 \omega + 3\delta \alpha dN^* + \alpha d^2 N^* - \alpha^2 dN^* + N^* \delta^2 \alpha)$$

其中

$$(A - dN^*)(A\beta^2 N^{*3} + A\beta N^* \alpha + d\alpha^2 - \beta^2 N^{*4} d + \delta\beta N^{*2} \alpha + \omega N^* d\alpha^2 + \omega N^{*3} \delta\beta \alpha + \omega N^{*3} \beta \alpha d) > 0$$

$$(\beta N^* A + \alpha d + \alpha d\omega N^* - \beta N^{*2} d)(\beta N^{*2} A\delta + 2\beta N^{*2} Ad + \beta N^{*2} A\alpha + \alpha^2 A + \alpha dA - 2\beta N^{*3} d^2 - \beta N^{*3} \alpha d - \beta N^{*3} d\delta + 3\delta \alpha N^{*2} d\omega + N^{*2} \alpha \delta^2 \omega + 2\alpha N^{*2} d^2 \omega + 3\delta \alpha dN^* + \alpha d^2 N^* - \alpha^2 dN^* + N^* \delta^2 \alpha) > 0$$

则以 γ 为变量的一次函数 $f(\gamma)$ 的图像如图 2 所示.

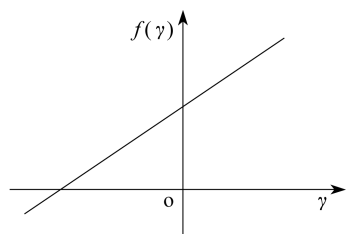


图 2 一次函数 $f(\gamma)$ 图像

Fig. 2 Diagram of a linear function $f(\gamma)$

当 $\gamma > 0$ 时, $f(\gamma) > 0$. 即 $H_2 = N^* f(\gamma) > 0$. 又 $H_3 = a_3 H_2 > 0$. 由 Hurwitz 判据可知, 正平衡点 $E_1 = (S^*, I^*, N^*)$ 是局部渐近稳定的.

4 全局渐近稳定性

定理 2 a. 当 $\frac{\beta A^2}{d^2 + d\omega A} - (d + \alpha + \gamma) < 0$ 时,

无病平衡点 $E_0 = (\frac{A}{d}, 0, \frac{A}{d})$ 是全局渐近稳定的;

b. 当死亡率大于丧失免疫力系数时, 正平衡点 $E_1 = (S^*, I^*, N^*)$ 也是全局渐近稳定的.

证明 a. 对于 $E_0 (\frac{A}{d}, 0, \frac{A}{d})$, 由定理 1 可知, 当 $\frac{\beta A^2}{d^2 + d\omega A} - (d + \alpha + \gamma) < 0$ 时, E_0 局部渐近稳性.

构造 Liapunov 函数

$$V(t) = I(t)$$

$V(t)$ 沿系统式(2)关于 t 求全导数

$$V'(t) = \left(\frac{\beta N}{1 + \omega N} S - d - \alpha - \gamma \right) I \leq 0$$

易知, $D = \{(s, I, N) \in Q \mid V'(t) = 0\} = \{I = 0\}$. 当

$I = 0$ 时, 代入系统式(3)可知, $S = N = \frac{A}{d}$, 从而, E_0 为最大不变集. 由 Lasalle 不变性原理易知, 无病平衡点 $E_0 (\frac{A}{d}, 0, \frac{A}{d})$ 全局渐近稳定.

b. 对于正平衡点, 由定理 1, 有 $E_1 = (S^*, I^*, N^*)$ 是局部渐近稳定的.

构造 Liapunov 函数

$$V(t) = |S - S^*| + |I - I^*| + |N - N^*|$$

设 $S(t), I(t), N(t)$ 是系统式(2)的任意解.

沿系统的解估计其右上导数

$$D^+ V(t) = \text{sgn}(S - S^*)(S' - S^{*'}) +$$

$$\text{sgn}(I - I^*)(I' - I^{*'}) + \text{sgn}(N - N^*) \cdot$$

$$(N' - N^{*'}) = \text{sgn}(S - S^*) \left(A + \delta(N - S -$$

$$I) - dS - \frac{\beta N}{1 + \omega N} SI - A - \delta(N^* - S^* - I^*) +$$

$$dS^* + \frac{\beta N^*}{1 + \omega N^*} S^* I^* \right) + \text{sgn}(I - I^*) \cdot$$

$$\left(\frac{\beta N}{1 + \omega N} SI - (d + \alpha + \gamma)I - \frac{\beta N^*}{1 + \omega N^*} S^* I^* +$$

$$(d + \alpha + \gamma)I^* \right) + \text{sgn}(N - N^*)(A - dN - \alpha I -$$

$$A + dN^* + \alpha I^*) \leq -(d + \delta)|S - S^*| -$$

$$(d + \delta + \gamma)|I - I^*| - (d - \delta) \cdot$$

$$|N - N^*| \leq -(d - \delta)V(t)$$

由于, $d - \delta > 0$, 两边从 t_0 到 t 积分, 得到

$$V(t) + (d - \delta) \int_{t_0}^t V(\tau) d\tau \leq V(t_0) < +\infty$$

又 $S(t), I(t), N(t)$ 在 Q 上有界, 从而它的导数也有界. 故 $V(t)$ 是一致连续的, 由文献[10]的引理易知

$$\lim_{t \rightarrow 0+\infty} V(t) = 0$$

这表明正平衡点 $E_1 = (S^*, I^*, N^*)$ 也是全局渐近稳定的.

5 结 论

本文分析的具有 $\beta N/(1 + \omega N)$ 型饱和传染率、且具有常数输入率的 SIRS 模型与文献[9]相比较, 本文模型更具有合理性, 也更加符合实际意义. 文献[8]在将系统进行无量纲化变换之后, 系

统平衡点过于复杂,并没有作进一步的分析. 本文将模型加以改变,即可以分析在文献[8]中无法加以讨论的非显性正平衡点性质. 回到系统(1),在分析的基础上,得出了平衡点的全局渐近稳定的充分条件:当 $\beta A^2 / (d^2 + d \omega A) - (d + \alpha + \lambda) < 0$ 时,其无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的;当死亡率大于丧失免疫力系数时,地方平衡点 $E_1 = (S^*, I^*, N^*)$ 也是全局渐近稳定的,最终疾病形成地方病. 随着人民生活质量的提高,丧失免疫力系数逐步减小,再加之医疗水平的提高,相信控制疫病传染流行的目的可以达到.

参考文献:

- [1] KERMACK W O, MCKENDRICK A G. Contributions to the mathematical theory of epidemics[J]. Proc Roy Soc, 1927, A115(772): 700 - 721.
- [2] ANDERSON R, MAR R. Population biology of infectious diseases[M]. New York: Springer Verlag, 1982.
- [3] HEESTERBEEK J A P, METZ J A J. The saturating contact rate in marriage and epidemic models [J]. Math Biol, 1993, 31(5): 529 - 539.
- [4] BRAUER F. Models for diseases with vertical transmission and nonlinear population dynamics[J]. Mathematical Bio-Science, 1995, 128(1): 13 - 24.
- [5] 张娟, 马知恩. 具有饱和接触率的 SEIS 模型的动力学性质[J]. 西安交通大学学报, 2002, 36(2): 204 - 207.
- [6] 原三领, 蒋里强. 一类具有非线性饱和传染率的传染病模型[J]. 工程数学学报, 2001, 18(4): 98 - 102.
- [7] HETHCOTE H W, VAN DEN DIRESCHE P. Some epidemiological models with nonlinear incidence [J]. J Math Biol, 1991, 29(3): 271 - 287.
- [8] VENTURINO E. The effects of diseases on competing species[J]. Math Biosci, 2001, 174(2): 111 - 131.
- [9] 樊志良, 张菊平. 一类具有常数移民的 SIR 和 SIS 组合流行病模型[J]. 华北工学院学报, 2004, 25(2): 79 - 81.
- [10] BARBALAT I. Systèm d'equations différential d'oscillation non linéaires[J]. Rev Roumaine Math Pures Appl, 1959(4): 267 - 270.

(上接第 456 页)

参考文献:

- [1] FRENCH H J. Fatigue and the hardening of steels[J]. Trans A S S T, 1933, 21(10): 899 - 946.
- [2] 河本実, 住広克己. 18-8ステンレス鋼の被害曲線について[C]//日本機械学会論文集~1964, 30(218), 1 124 - 1 128.
- [3] 什科利尼克 JI M. 疲劳试验方法手册[M]. 陈玉琨, 战嘉禾, 译. 北京: 机械工业出版社, 1983.
- [4] SCHIJVE J. Fatigue of structures and materials in the 20th century and the state of the art[J]. International Journal of Fatigue, 2003, 25(8): 679 - 702.
- [5] 卢曦, 郑松林. 考虑小载荷强化的汽车构件疲劳累计损伤试验研究[J]. 中国机械工程, 2007, 18(8): 994 - 997.
- [6] 中川隆夫. 信頼性工学における強度劣化過程について[C]//日本機械学会論文集(A編). 1983, 49(441): 540 - 546.
- [7] 才庆魁. 金属疲劳断裂理论[M]. 东北工学院出版社出版, 1989.
- [8] 酆明. 汽车结构抗疲劳设计[M]. 北京: 机械工业出版社, 1995.
- [9] 谢里阳, 吕文阁, 师照峰. 两级载荷作用下疲劳损伤状态的试验研究[J]. 机械强度, 1994, 16(4): 52 - 54.