

文章编号:1007-6735(2010)05-0499-08

富足 $po u$ -半群

高振林, 郭绍娜

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 介绍了 $po u$ -半群的概念、序幂等元集及序正则性等. 讨论了 $po u$ -半群(po -半群)的基本性质, 给出了富足 $po u$ -半群的一般结构, 得到关于(自然序)正则半群的一些结论.

关键词: 富足 $po u$ -半群; 序幂等元(序正则元); 格林 $*$ -关系

中图分类号: O 152.7 **文献标志码:** A

On abundant $po u$ -semigroups

GAO Zhen-lin, GUO Shao-na

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The concepts of $po u$ -semigroups, its order idempotent set, regularity and so on were introduced. Basic properties of abundant $po u$ - (po) semigroups were discussed. The general structure of abundant $po u$ -s-emigroups was presented. Applying the general structure theorem to some special cases, the results of (naturally ordered) regular semigroups were obtained.

Key words: abundant $po u$ -semigroups; order idempotent (regular); Green's $*$ -relations

文献[1]研究了 $po u$ -半群与富足 $po u$ -半群上格林 $*$ -关系的概念. 文献[2]研究了一个正规中间幂等元的富足半群的构造. 本文证明了, 若 S 是富足 $po u$ -半群, 且满足序正则条件, 则最大元 u 一定是正规中间幂等元, 因此, 可确定这类 $po u$ -半群的代数结构, 一般地, 得到一个左正规 po -带、一个充足 po -么半群与一个右正规 po -带的拟直积的代数分解. 自然地, 通过序拟直积分解研究此类 $po u$ -半群的总体结构是可行的. 处理这类问题的困难在于如何将序结构理论与代数结构理论结合起来, 采用的主要方法见文献[1, 3-4].

1 po -半群($po u$ -半群)的基本概念与结论

一个 po -半群 $(S, \leq)$ 是偏序集, 同时是一个代数半群 $(S, \cdot)$, 且满足

$(a, b \in S) a \leq b \Rightarrow xa \leq xb$ 且 $ax \leq bx (\forall x \in S)$
 po -半群 $(S, \leq)$ 称为 $po u$ -半群, 如果 S 存在元 u 是关于偏序关系“ $\leq$ ”的最大元. 此时, u 是 S 的一个幂等元^[5].

对 po -半群 $(S, \leq)$, 格林 $*$ -关系定义为^[1]

$$\mathcal{R}^* = \{(a, b) \mid R(xa) \subseteq R(ya) \Leftrightarrow R(xb) \subseteq R(yb), x, y \in S^1\}$$

$$\mathcal{L}^* = \{(a, b) \mid L(ax) \subseteq L(ay) \Leftrightarrow L(bx) \subseteq L(by), x, y \in S^1\}$$

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{R}^* \cap \mathcal{L}^*; \quad \mathcal{D}^* = \mathcal{R}^* \cup \mathcal{L}^*$$

其中, $R(x) = (xS^1]$, $L(x) = (S^1x]$, $\forall x \in S^{[1]}$.

文献[1]中 po -半群上的上述格林 $*$ -关系有别于文献[2, 6-8]中代数半群上的格林 $*$ -关系. 因此, 文献[3]中富足的概念也有别于文献[2, 6-8]给出的概念. 当偏序关系“ $\leq$ ”是相等关系“ $=$ ”时, 它与代数半群中富足的概念也不一致.

对 $x \in S$, 用 $(x)_\sigma$ 表示(左或右)同余 σ -类. 设

收稿日期: 2008-11-26

修返日期: 2009-10-30

作者简介: 高振林(1949-), 男, 教授. E-mail: zlgao@sina.com

S 是充足 po -半群. 则对每一个 $\mathcal{R}^*$ -类 ($\mathcal{L}^*$ -类) $(x)_{\mathcal{R}^*}$ ($(x)_{\mathcal{L}^*}$) 有唯一的幂等元, 记作 $x^+(x^*)^{[1]}$. 如果 $x \leq y \Rightarrow x^+ \leq y^+ (x^* \leq y^*)$, 那么, 称格林 $*$ -关系 $\mathcal{R}^* (\mathcal{L}^*)$ 在 S 上是右(左)正则的. 如果 $\mathcal{R}^*$ 是右正则的且 $\mathcal{L}^*$ 是左正则的, 那么, 称格林 $*$ -关系在 S 上是正则的.

po -半群 S 的元素 x 称为 S 的一个序幂等元, 如果 $x \leq x^2$, 称 x 为 S 的一个序正则元, 如果存在元 $s \in S$, 使得 $x \leq xsx$. 对 $x \in S$, 如果 $\exists x' \in S$, 使得 $x \leq xx'x$, 并且 $x' \leq x'xx'$, 那么, x' 称为 x 的一个序(正则)逆元.

用 $OE(S)$ 表示 S 中所有序幂等元的集合. 若 $OE(S)$ 是 S 的 po -子半群, 则 $OE(S)$ 称为一个 po -带; 用 $OReg(S)$ 表示 S 中所有序正则元的集合. 若 $OReg(S)$ 是 S 的 po -子半群, 则称 $OReg(S)$ 是 S 的序正则子半群; 用 $OV(x)$ 表示 $OReg(S)$ 中元素 x 所有序逆元的集合.

用 $E(S)$ 表示 S 中所有幂等元的集合, 用 $Reg(S)$ 表示 S 中所有正则元的集合, 用 $V(x)$ 表示 $Reg(S)$ 中元素 x 的所有逆元的集合.

命题 1 设 S 是 po -半群, 则

a. $E(S) \subseteq OE(S)$, 并且最大序幂等元是一个幂等元;

b. $Reg(S) \subseteq OReg(S)$; $\forall x \in Reg(S)$, $V(x) \subseteq OV(x)$;

c. $\forall x' \in OV(x)$, $\forall x \in OReg(x)$, xx' , $x'x \in OE(S)$.

本文中序正则 pou -半群与文献[5]中的正则 pou -半群一致, 因此, 由文献[5]得到命题 2.

命题 2 pou -半群 S 是序正则的, 当且仅当 $x \leq xux$, $\forall x \in S$.

命题 3 是关于文献[3]的定理 1.1 的推广.

命题 3 设 S 是 po -半群, 则

a. $(\forall e \in OE(S), n \in \mathbb{Z}^+) e^n \in OE(S)$;

b. $(\forall e, f \in OE(S)) e \leq f \Rightarrow e \leq efe$ 且 $ef, fe, efe, fef \in OE(S)$.

证明 只须证明 b 成立. 由 $e \leq e^2, f \leq f^2, e \leq f$ 推出 $e \leq e^2 \leq ef$ (或 fe) 与 $e \leq e^2 \leq e^3 \leq efe$, 故有 $fe \leq (fe)^2$. 类似地, $ef, efe, fef \in OE(S)$.

因为 u 是 pou -半群 S 的最大元, 所以, 命题 4 的结论是明显的.

命题 4 设 S 是 pou -半群, 则 $S = (uS^1] = (S^1u] = (S^1uS^1] = (uS^1u]$.

命题 5 设 S 是富足 pou -半群, 则有下面的

结论成立:

a. $\forall a \in S, e \in (a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S) (f \in (a)_{\mathcal{L}^*} \cap OE(S))$.

(a) $eu \in (a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S) (uf \in (a)_{\mathcal{L}^*} \cap OE(S))$;

(b) $R(a) \subseteq R(ea), R(a) \subseteq R(eua)$, 且 $a \leq eu(L(a) \subseteq L(af), L(a) \subseteq L(auf))$, 并且 $a \leq uf$;

(c) eu 是 $(a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)$ 的最大元 (uf 是 $(a)_{\mathcal{L}^*} \cap OE(S)$ 的最大元).

b. $(\forall a \in OReg(S), a' \in OV(a), e = aa', f = a'a)$.

(a) $(\forall n \in \mathbb{Z}^+) e^n \in (a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S) (f^n \in (a)_{\mathcal{L}^*} \cap OE(S))$ (当 S 是 po -半群时, 这个结论也成立), 并且 $a \leq ea \leq ua (a \leq af \leq au)$;

(b) $ua', a'u, ua'u \in OV(a)$, 并且 $au \in (a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S) (ua \in (a)_{\mathcal{L}^*} \cap OE(S))$.

证明 **a.** (a) 设 $e \in (a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)$, 则由命题 3 的 b 知, $eu \in OE(S)$. 设 $R(xa) \subseteq R(ya)$, 即 $(xaS^1] \subseteq (yaS^1]$, 因为 $(a, e) \in \mathcal{R}^*$, 所以, 由 $\mathcal{R}^*$ 的定义得 $(xeS^1] \subseteq (yeS^1]$. 由命题 4 知

$$(xeuS^1] = (xe(uS^1]) = (xeS^1] \subseteq (yeS^1] = (ye(uS^1]) = (yeuS^1]$$

另一方面, 若 $(xeuS^1] \subseteq (yeuS^1]$, 则有 $(xeS^1] = (xeuS^1] \subseteq (yeuS^1] = (yeS^1]$. 由 $(a, e) \in \mathcal{R}^*$ 得到 $(xaS^1] \subseteq (yaS^1]$. 故 $(a, eu) \in \mathcal{R}^*$ 且 $eu \in (a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)$.

(b) 由 $(a, e) \in \mathcal{R}^*, e \leq e^2$, 即 $R(e) \subseteq R(e^2)$, 得到 $R(a) \subseteq R(ea)$. 类似地, 有 $R(a) \subseteq R(eua)$, $a \in (euaS^1] \subseteq (euS^1]$. 令 $a \leq euv, v \in S^1$, 因 $v \leq u$, 故 $a \leq euv \leq euu = eu$.

(c) 设 $(eu, e') \in \mathcal{R}^*, eu \in OE(S)$, 由 (b) 得到 $R(e') \subseteq R(eue')$, 对 $\forall e' \in (a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)$. 令 $e' \leq eue'v$, 对某一个 $v \in S^1$, 则由 $e'v \leq u$, 得 $e' \leq eue'v \leq euu = eu$. 故 eu 是 $(a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)$ 的最大元.

b. 令 $a \in OReg(S), a' \in OV(a)$, 则

(a) $e = aa' \leq aa'aa' = e^2 \Rightarrow e \in OE(S)$ 且 $a \leq aa'a = ea \leq ua$. 若 $(xaS^1] \subseteq (yaS^1]$, 则

$$(xeS^1] = (xaa'aS^1] \subseteq (xaS^1] \subseteq (yaS^1] \subseteq (yaa'aS^1] \subseteq (yaa'aS^1] = (yeS^1]$$

反之, 若 $(xeS^1] \subseteq (yeS^1]$, 则

$$(xaS^1] = (xaa'aS^1] \subseteq (xaa'aS^1] = (xeS^1] \subseteq (yeS^1] = (yaa'aS^1] \subseteq (yaS^1]$$

故得到

$$aa' = e \in (a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)$$

类似地,可以证明 $e^n \in (a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. 事实上, $e^2 \in OE(S)$, 令 $(xaS^1] \subseteq (yaS^1]$, 则

$$\begin{aligned} (xe^2S^1] &= (xaa'aa'S^1] \subseteq (xaS^1] \subseteq (yaS^1] \subseteq \\ & (yaa'aS^1] \subseteq (yaa'aa'aS^1] \subseteq \\ & (yaa'aa'S^1] = (ye^2S^1] \end{aligned}$$

反之,令 $(xe^2S^1] \subseteq (ye^2S^1]$, 则

$$\begin{aligned} (xaS^1] &= (xaa'aS^1] \subseteq (xaa'aa'aS^1] \subseteq \\ & (xaa'aa'S^1] = (xe^2S^1] \subseteq (ye^2S^1] = \\ & (yaa'aa'S^1] \subseteq (yaS^1] \end{aligned}$$

故 $e^2 = (aa')^2 \in (a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)$. 其余的类似可证.

(b) 由(a)可得 $a' \leq ua'a' \leq a'u$, 且 $a' \leq ua'u$, 可推出 $a \leq aa'a \leq a(ua'a)$, 且 $ua' \leq ua'aa' \leq (ua'a)a(ua')$, 即 $ua' \in OV(a)$. 类似地, $a'u, ua' u \in OV(a)$. 现证明 $au \in (a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)$.

由命题2得, $a \leq ana$, 则 $au \leq (au)^2$, 即 $au \in OE(S)$. 由命题4知

$$(xaS^1] \subseteq (yaS^1] \Leftrightarrow (xauS^1] \subseteq (yauS^1]$$

故 $au \in (a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)$. 类似地, $ua \in (a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)$.

推论1 对于富足 pou-半群 S , 下面的结论成立:

- a. $(\forall e, e' \in (a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)) eu = e'u$;
- b. $(\forall f, f' \in (a)_{\mathcal{L}^*} \cap OE(S)) uf = uf'$.

设 $a \in OReg(S)$, 如果 $OV(a)$ 有最大元, 用 a^0 表示 $OV(a)$ 的最大元. 设 $a \in S$, 如果 $(a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)((a)_{\mathcal{L}^*} \cap OE(S))$ 有最大元, 用 $e_a(f_a)$ 表示 $(a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)((a)_{\mathcal{L}^*} \cap OE(S))$ 的最大元.

引理1 对于富足 pou-半群 S , $a \in OReg(S)$, 下面的叙述是等价的:

- a. $OV(a)$ 有最大元 a^0 ;
- b. $(a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)$ 与 $(a)_{\mathcal{L}^*} \cap OE(S)$ 分别有最大元 e_a 与 f_a .

证明 $a \Rightarrow b$. 由命题5中b的(b)知, $a^0 \leq ua^0u \in OV(a)$, 而 a^0 是 $OV(a)$ 的最大元, 所以, $a^0 = ua^0u$, 并且 $aa^0 = aua^0u \in (a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)$, aa^0u 是 $(a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)$ 的最大元. 而 $aa^0u = aua^0u = aa^0$, 所以, $e_a = aa^0$ 是 $(a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)$ 的最大元. 类似地, $f_a = a^0a$ 是 $(a)_{\mathcal{L}^*} \cap OE(S)$ 的最大元.

$b \Rightarrow a$. 假设 e 与 f 分别是 $(a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)$ 与 $(a)_{\mathcal{L}^*} \cap OE(S)$ 的最大元, 则对 $\forall a' \in OV(a)$, 由命题5中b的(a)得, $aa' \leq e$ 且 $a'a \leq f$. 由命题5中

a的(c)知, eu 与 uf 分别是 $(a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)$ 与 $(a)_{\mathcal{L}^*} \cap OE(S)$ 的最大元, 所以, $e = eu, f = uf$ 且 $a \leq eu, a \leq uf$. 令 $a^0 = fa'e$, 由 $a \leq au, a \leq ua$ 及上述关系容易看出

$$\begin{aligned} aa^0a &= afa'ea = aua'ea'ua \geq aua'aa'aa'ua \geq \\ & aa'aa'aa'a \geq aa'a \geq a \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned} a^0aa^0 &= fa'ea'fa'e \geq fa'aa'aa'aa'e \geq \\ & fa'aa'aa'e \geq fa'aa'e \geq fa'e = a^0 \end{aligned}$$

即 $a^0 \in OV(a)$. 若 $a' \in OV(a)$, 则由 $a'a \leq f$, $aa' \leq e$ 知 $a' \leq a'aa' \leq a'aa'aa' \leq fa'e$. 故 a^0 是 $OV(a)$ 的最大元.

推论2 设 S 是富足 pou-半群, 则

- a. $(a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)$ 与 $(a)_{\mathcal{L}^*} \cap OE(S)$ 分别有最大元 e_a 与 f_a , $\forall a \in OReg(S)$;
- b. $OV(a)$ 有最大元 $ua'u$, $\forall a \in OReg(S)$, $a' \in OV(a)$.

推论3 设 S 是富足 pou-半群, $a \in OReg(S)$, 则有

- a. 存在 $a^0 \in OV(a)$, 使得 $a^0 \in Reg(S)$ 且 $aa^0a \in V(a^0)$;
- b. 存在 $e_a \in (a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)(f_a \in (a)_{\mathcal{L}^*} \cap OE(S))$, 且 $e_a = aa^0 \in E(S)(f_a = a^0a \in E(S))$.

证明 a. 对 $a \in OReg(S)$, 由命题5中a的(c)得知, $(a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)((a)_{\mathcal{L}^*} \cap OE(S))$ 有最大元 $eu(uf)$, 其中, $e \in (a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)(f \in (a)_{\mathcal{L}^*} \cap OE(S))$. 由引理1得知, $OV(a)$ 有最大元 a^0 , 使得 $a \leq aa^0a$ 且 $a^0 \leq a^0aa^0$. 则有 $a^0aa^0 \leq a^0aa^0aa^0$, 与 $a^0aa^0aa^0 \leq (a^0aa^0)a(a^0aa^0)$, 因此, 可推出 $a^0 \leq a^0aa^0 \leq a^0aa^0aa^0 \leq (a^0aa^0)a(a^0aa^0)$ 且 $a \leq aa^0a \leq a(a^0aa^0)a$, 即 $a^0aa^0 \in OV(a)$. 而 a^0 是 $OV(a)$ 的最大元, 所以, $a^0 = a^0aa^0$, 显然, $aa^0a(a^0a)a^0(\cdot aa^0a)$, 且 $a^0 = a^0(aa^0a)a^0$, 即 $aa^0a \in OV(a^0), a^0 \in Reg(S)$.

b. 由引理1的 $a \Rightarrow b$ 的证明可知, $aa^0 = e_a(a^0a = f_a)$ 是 $(a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)((a)_{\mathcal{L}^*} \cap OE(S))$ 的最大元. 因 $a^0 = a^0aa^0$, 故

$$\begin{aligned} e_a^2 &= aa^0aa^0 = aa^0 = e_a \in E(S)(f_a^2 = \\ & a^0aa^0a = a^0a = f_a \in E(S)) \end{aligned}$$

推论4 设 S 是充足 pou-半群, 则 $e_a = aa^0 = a^+, f_a = a^0a = a^*, \forall a \in OReg(S)$.

引理2 一个富足 pou-半群 S 是充足的, 如果 $E(S)$ 是一个半格, 且 $e = e^0, \forall e \in E(S)$.

证明 令 $E(S)$ 是一个半格, 且 $e = e^0, \forall e \in$

$E(S)$, 则 $ef = fe, e = e^0, f = f^0, \forall e, f \in (a)_{\mathcal{L}^*} \cap OE(S)$. 因 $L(e) = L(e^2), L(f) = L(f^2)$, 由 $\mathcal{L}^*$ 的定义知, $L(e) = L(ef)$ 且 $L(f) = L(fe)$, 可推出 $L(e) = L(f)$, 即 $(S^1 e] = (S^1 f]$. 令 $e \leq tf$ 且 $f \leq ve$, 对某 $t, v \in S^1$. 则 $e \leq etf, f \leq fve$. 因 $e \leq eetfe$ 且 $etf \leq eetf \leq eetfeetf = (etf)e(etf)$, 故 $etf \in OV(e)$. 类似地, $fve \in OV(f)$. 由 e^0 与 f^0 的最大元性质, 得到 $e = etf, f = fve$, 并且可推出

$$\begin{aligned} e &= etf = etfve = etffve = ef \\ f &= fve = fveetf = fe \end{aligned}$$

则由 $ef = fe$, 即可得 $e = f$, 即 $|(a)_{\mathcal{L}^*} \cap OE(S)| = 1$. 类似可证 $|(a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)| = 1$, 故 S 是充足的.

命题 6 设 S 是富足 po -半群, 则

a. $(\forall a \in OReg(S)) a^0 = ua^0 = a^0 u, e_a = e_a u = aua^0, f_a = uf_a = a^0 ua; a \leq au = e_a \leq a^0, a \leq ua = f_a \leq a^0$;

b. $(\forall e \in OE(S)) eu = ee^0, ue = e^0 e; e^0 = ueu \in OE(S)$.

证明 **a.** 因为, $a^0 \in OV(a)$, 所以, $ua^0 \in OV(a)(a^0 u \in OV(a))$. 由命题 5 中 b 的(b)及 $a^0 \leq u$, 可推出 $a^0 a \leq ua = u$. 故 $a^0 = a^0 aa^0 \leq ua^0$. 类似地, $a^0 \leq a^0 u$. 由 $ua^0 \in OV(a)(a^0 u \in OV(a))$ 及 a^0 的最大元性质, 有 $a^0 = ua^0 = a^0 u$, 可推出 $e_a = aa^0 = aa^0 u = e_a u = aua^0$ 与 $f_a = a^0 a = ua^0 a = uf_a = a^0 ua$. 另一方面, 由命题 5 中 b 的(b)知, $au \in (a)_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)(ua \in (a)_{\mathcal{L}^*} \cap OE(S))$. 所以, 由 e_a 与 f_a 的最大元性质得 $e_a = aa^0 \geq au$ ($f_a = a^0 a \geq ua$); 反之, 由 $a^0 \leq u$ 容易看出 $e_a \leq au$ ($f_a \leq ua$). 所以, $e_a = au$ 与 $f_a = ua$, 可推出

$$\begin{aligned} a &\leq aa^0 a = e_a a \leq e_a u = auu = au = \\ e_a &= aa^0 \leq ua^0 = a^0, a \leq f_a \end{aligned}$$

b. 容易看出, 由 a 可得 b 成立.

称 S 满足序正则条件, 如果 $OReg(S)$ 是一个 po -子半群. 用 $\overline{OE(S)}$ 表示由 $OE(S)$ 生成的 po -子半群, 则容易证明命题 7 的结论.

命题 7 设 S 是富足 po -半群, 满足序正则条件, 则

a. $(\forall e, f \in OE(S)) ef \in OReg(S)$;

b. $\overline{OE(S)}$ 是序正则 po -半群;

c. 对 $\bar{e}, \bar{f} \in \overline{OE(S)}$, 有

(a) $\bar{e}u = \bar{e}\bar{e}^0 \in (\bar{e})_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)$, $\bar{e}u$ 是 $(\bar{e})_{\mathcal{R}^*} \cap OE(S)$ 的最大元, $\bar{e}u \in OE(S)$;

(b) $\bar{ue} = \bar{e}^0 \bar{e} \in (\bar{e})_{\mathcal{L}^*} \cap OE(S)$, $\bar{ue}$ 是 $(\bar{e})_{\mathcal{L}^*} \cap$

$OE(S)$ 的最大元, $\bar{ue} \in OE(S)$;

(c) $\bar{e}^0 = \bar{ue}u \in E(S)$ 是 $(\bar{e})_{\mathcal{Q}^*} \cap OE(S)$ 的最大元, 且 $\bar{e}^0 = (\bar{e}^0)^0$;

(d) $\bar{e} = \bar{e}\bar{ue}$, 且 $\bar{e} \in Reg(S)$;

(e) $(\bar{e}\bar{f})^0 = \bar{f}^0 \bar{e}\bar{f}\bar{e}^0 = \bar{e}^0 \bar{e}\bar{f}\bar{f}^0$;

d. $u\overline{OE(S)}$ 与 $\overline{OE(S)}u$ 是带;

e. $u\overline{OE(S)}u(u\overline{OE(S)}u)$ 是一个半格.

证明 现只证明 c 的(e)和 e, 其余易证.

c(e) 由 $(\bar{e}\bar{f})^0 = \bar{ue}\bar{f}u \in E(S)$, $\bar{ue}\bar{f}u = \bar{e}^0 \bar{e}\bar{f}\bar{f}^0$ 得 $(\bar{e}\bar{f})^0 = \bar{e}^0 \bar{e}\bar{f}\bar{f}^0$. 另一方面, 由 c 的(d)知, $\bar{e}, \bar{f} \in Reg(S)$, 又 $f_e e_{\bar{f}} = \bar{e}^0 \bar{e}\bar{f}\bar{f}^0 \in E(S)$, 所以, 有

$$\begin{aligned} \bar{e}\bar{f} &= \bar{e}(\bar{e}^0 \bar{e}\bar{f}\bar{f}^0)\bar{f} = \bar{e}(f_e e_{\bar{f}})\bar{f} = \\ \bar{e}f_e e_{\bar{f}} f_e e_{\bar{f}} \bar{f} &= \bar{e}e_{\bar{f}} f_e \bar{f} = \bar{e}\bar{f}(f^0 \bar{e}^0)\bar{e}\bar{f} = \\ \bar{e}\bar{f}(f^0 \bar{e}^0 \bar{e}\bar{f}\bar{f}^0 \bar{e}^0)\bar{e}\bar{f} & \end{aligned}$$

与

$$\bar{f}^0 \bar{e} \bar{e} \bar{e}^0 \bar{e}\bar{f}\bar{f}^0 \bar{e}^0 = \bar{f}^0 \bar{e}^0 \bar{e}\bar{f}\bar{f}^0 \bar{e}^0 (\bar{e}\bar{f}) \bar{f}^0 \bar{e}^0 \bar{e}\bar{f}\bar{f}^0 \bar{e}^0$$

故得到 $\bar{f}^0 \bar{e}^0 \bar{e}\bar{f}\bar{f}^0 \bar{e}^0 \in V(\bar{e}\bar{f})$. 而由 c 的(c)得

$$\bar{f}^0 \bar{e}^0 \bar{e}\bar{f}\bar{f}^0 \bar{e}^0 = u\bar{f}(\bar{e}\bar{f})^0 \bar{e}u \geq (\bar{e}\bar{f})^0$$

故由 c 的(c)可证得

$$\begin{aligned} (\bar{e}\bar{f})^0 &= \bar{f}^0 \bar{e}^0 \bar{e}\bar{f}\bar{f}^0 \bar{e}^0 = \bar{f}^0 \bar{ue}\bar{f}ue^0 = \\ \bar{f}^0 (\bar{f}^0)^0 \bar{e}\bar{f}(\bar{e}^0)^0 \bar{e}^0 &= \bar{f}^0 \bar{e}\bar{f}\bar{e}^0 \end{aligned}$$

e. 设 $\bar{e}^0, \bar{f}^0 \in u\overline{OE(S)}u$, 则

$$\begin{aligned} \bar{e}^0 \bar{f}^0 &= \bar{ue}u\bar{uf}u = \bar{ue}\bar{e}^0 \bar{f}^0 \bar{f}u = \\ \bar{ue}\bar{e}^0 \bar{f}^0 \bar{f}e\bar{e}^0 \bar{f}^0 \bar{f}u &= \bar{e}^0 u\bar{f}e\bar{uf}^0 = \\ \bar{e}^0 \bar{f}e\bar{f}^0 &= u\bar{f}\bar{e}^0 u \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned} \bar{e}^0 \bar{f}^0 &= \bar{ue}\bar{uf}u = \bar{ue}(f_e e_{\bar{f}} f_e e_{\bar{f}})\bar{f}^0 u = \\ \bar{ue}(e_{\bar{f}} f_e)\bar{f}\bar{f}^0 u &= \bar{ue}(e_{\bar{f}} f_e)\bar{f}u = \\ \bar{ue}\bar{f}(f^0 \bar{e}^0)\bar{e}\bar{f}u &= \bar{ue}\bar{f}\bar{ue}\bar{f}\bar{ue}\bar{f}u = \\ (\bar{ue}\bar{f}u)^3 &= (\bar{ue}\bar{f}u)^2 = \bar{ue}\bar{f}u \end{aligned}$$

所以, $\bar{e}^0 \bar{f}^0 = \bar{ue}\bar{f}u = \bar{uf}\bar{e}u$. 类似地, $\bar{f}^0 \bar{e}^0 = \bar{uf}\bar{e}u = \bar{ue}\bar{f}u$. 故 $\bar{f}^0 \bar{e}^0 = \bar{e}^0 \bar{f}^0$, 即 $u\overline{OE(S)}u$ 是一个半格.

类似于文献[9], 有引理 3.

引理 3 设 S 是 po -半群, 则下面的条件是等价的:

a. $(\forall e, f \in OE(S)) ef \in OReg(S)$;

b. $\overline{OE(S)}$ 是 S 的一个序正则 po -子半群;

c. 若 $OReg(S)$ 是 S 的一个 po -子半群, 则 a,

b 成立.

证明 因为, $OE(S) \subseteq \overline{OE}(S) \subseteq OReg(S)$, 所以, 有 $c \Rightarrow a, c \Rightarrow b$ 与 $a \Leftrightarrow b$ 成立.

2 满足序正则条件的富足 $\text{po}u$ -半群的总体结构

现用前面的结论来刻画满足序正则条件的富足 $\text{po}u$ -半群 S 的总体结构. 为此, 假定 $\overline{OE}$ 是一个序幂等元生成的序正则 $\text{po}u$ -半群. 由命题 7 的 a-e 知, $u\overline{OE}$ 与 $\overline{OE}u$ 是带, $u\overline{OE}u$ 是一个半格, 记作 OE^0 . 设 S 为富足 po -半群, 它的幂等元半格为 OE^0 , S 上的格林 $*$ -关系 $\mathcal{R}^*$ 与 $\mathcal{L}^*$ 是正则的.

另一方面, 若 S 是富足 $\text{po}u$ -半群, 满足序正则条件, 则由命题 7 的 b 与 e 知, u 是 S 的一个正规中间幂等元. 因此, 由文献[3, 10]可知, S 与

$$W = W(\overline{OE}(S), uSu) = \{(e, a, f) \in \overline{OE}(S)u \times u\overline{OE}(S) \mid e\mathcal{L}x^+, f\mathcal{R}x^+\}$$

代数同构, 其中, W 上的乘法定义为

$$(e, a, f)(g, b, h) = (e(afg)^+, afgb, (fgb)^*h)$$

现根据以上的结论给出总体结构定理.

定理 1 令 $W_0 = W_0(\overline{OE}, S)$ 表示集合

$$W_0 = W_0(\overline{OE}, S) = \{(e, a, f) \in \overline{OE}u \times S \times u\overline{OE} \mid e\mathcal{L}a^+, f\mathcal{R}a^+\}$$

在集合 W_0 上定义乘法

$$(e, a, f)(g, b, h) = (e(afg)^+, afgb, (fgb)^*h)$$

则 $W_0 = W_0(\overline{OE}, S)$ 关于笛卡尔序构成一个 po -半群, 且满足条件:

a. $\bar{u} = (u, u, u)$ 是 W_0 的最大元, u 是 W_0 的一个幂等元;

b. $\overline{OE}(W_0)$ 与 $\overline{OE}$ 序同构;

c. $\bar{u}W_0\bar{u}$ 与 S 序同构;

d. W_0 上的格林 $*$ -关系 $\mathcal{R}^*$ 与 $\mathcal{L}^*$ 是正则的.

证明 首先证明 W_0 是 po -半群. 显然, W_0 是半群. 假定 $(e, a, f), (g, b, h), (v, c, w) \in W_0$, 并且 $(e, a, f) \leq (g, b, h)$, 则 $e \leq g, a \leq b, f \leq h$, 所以, $afvc \leq bhvc$. 由 S 上 $\mathcal{R}^*$ 与 $\mathcal{L}^*$ 的正则性得, $(afvc)^+ \leq (bhvc)^+$ 与 $(afvc)^* \leq (bhvc)^*$, 可推出 $e(afv)^+ \leq g(bhv)^+$ 与 $(fvc)^*w \leq (hvc)^*w$, 因此,

$$(e, a, f)(v, c, w) = (e(afv)^+, afvc, (fvc)^*w) \leq (g(bhv)^+, bhvc, (hvc)^*w) = (g, b, h)(v, c, w)$$

类似地, 有 $(v, c, w)(e, a, f) \leq (v, c, w)(g, b, h)$.

故 W_0 是 po -半群. 显然, W_0 也是一个富足 $\text{po}u$ -半群. 现分别证明 a-d.

a. 证明略.

b. 已知 $\overline{OE}(W_0) = \{(e, a, f) \in W_0 \mid a \in OE^0\}$. 定义映射 $\varphi: \overline{OE} \rightarrow \overline{OE}(W_0), a \mapsto a\varphi = (au, uau, ua)$. 则 φ 是代数同构映射, 且 $\varphi^{-1}: (e, a, f) \mapsto eaf$. 显然, φ 与 φ^{-1} 是保序的. 故 φ 是 po -半群的一个序同构映射.

c. 由推论 4、引理 2、命题 6 和命题 7 知, $\bar{u}W_0\bar{u} = (u, u, u)W_0(u, u, u) = \{(a^+, a, a^*) \in W_0\}$, 映射 $\phi: S \rightarrow \bar{u}W_0\bar{u}, a \mapsto a\phi = (a^+, a, a^*)$ 是代数同构映射, 且 $\phi^{-1}: (a^+, a, a^*) \mapsto a$. 显然, ϕ^{-1} 是保序的. 对于 ϕ , 若 S 中 $a \leq b$, 则由 S 上 $\mathcal{R}^*$ 与 $\mathcal{L}^*$ 的正则性, 有 $a^+ \leq b^+$ 与 $a^* \leq b^*$, 所以, $a\phi = (a^+, a, a^*) \leq (b^+, b, b^*) = b\phi$, 则 ϕ 也是保序的. 故 ϕ 是 po -半群的一个序同构映射.

d. 假设 $(e, a, f), (g, b, h) \in \overline{OE}(W_0)$, 则

$$e_{(e, a, f)} = (e, a^+, a^+), e_{(g, b, h)} = (g, b^+, b^+)$$

$$f_{(e, a, f)} = (a^*, a^*, f), f_{(g, b, h)} = (b^*, b^*, h)$$

若 $(e, a, f) \leq (g, b, h)$, 则 $e \leq g, a \leq b, f \leq h$, 由 S 上 $\mathcal{R}^*$ 与 $\mathcal{L}^*$ 的正则性可推出 $e \leq g, a^+ \leq b^+, a^* \leq b^*, f \leq h$. 故 $e_{(e, a, f)} \leq e_{(g, b, h)}$ 且 $f_{(e, a, f)} \leq f_{(g, b, h)}$, 即 W_0 上的格林 $*$ -关系 $\mathcal{R}^*$ 与 $\mathcal{L}^*$ 是正则的.

现证明满足序正则条件并且格林 $*$ -关系是正则的任何富足 $\text{po}u$ -半群都可以用这种方法构造.

定理 2 设 S 是富足 $\text{po}u$ -半群, 满足序正则条件, S 上的格林 $*$ -关系 $\mathcal{R}^*$ 与 $\mathcal{L}^*$ 是正则的. 则映射

$$\varphi: S \rightarrow W_0(\overline{OE}(S), uSu), \text{ 定义为 } a\varphi = (e_a, uau, f_a)$$

是一个序同构映射, 即 S 与 $W_0(\overline{OE}(S), uSu)$ 序同构.

证明 只需验证 φ 是同构映射, 且 φ 是保序的, 这里略去这些验证.

3 序拟充足 $\text{po}u$ -半群

称富足 $\text{po}u$ -半群 S 是序拟充足的, 如果 $E(S)$ 构成一个序交换 $\text{po}u$ -半群, 即 $(\forall e, f \in E(S), \exists s \in S^1) ef \leq fse, ef \in E(S)$, 且 $E(S)$ 有最大元 u .

引理 4 序拟充足 $\text{po}u$ -半群满足序正则条件.

证明 设 S 是序拟充足 $\text{po}u$ -半群. 对 $a, b \in$

$OReg(S)$, 令 $a \leq aa^0 a = af_a$, $b \leq bb^0 b = e_b b$, 则 $f_a, e_b \in E(S)$. 由推论 2 和推论 3 知, $f_a e_b \leq e_b s f_a$ ($\exists s \in S^1$), $f_a e_b \in E(S)$. 故 $ab \leq ab(b^0 s a^0)ab$ ($b^0 s a^0 \in S$), $a, b \in OReg(S)$.

设 S 是序拟充足 $po u$ -半群, 则最大元 u 一定是正规中间的. 这种情形下这类半群的构造在上部分已经确定. 然而, 这种构造对这类半群可以得到一系列的简化. 现描述序拟充足 $po u$ -半群的结构.

设 E 是一个序交换 ($po u$ -) 带. 则由命题 7 知, u 是正规中间的. 令 $E^0 = uEu$, uEu 是一个半格. 则 E 与 $W(E, E^0)$ 代数同构, 其中

$$W(E, E^0) = \{(e, \alpha, f) \in Eu \times E^0 \times uE \mid e \mathcal{L}^* \alpha R^* f\}$$

乘法定义为

$$(e, \alpha, f)(g, \beta, h) = (e\alpha\beta, \alpha\beta, \alpha\beta h)$$

若规定

$$(e, \alpha, f) \leq (g, \beta, h) \Leftrightarrow e \leq g, \alpha \leq \beta, f \leq h$$

则 $W(E, E^0)$ 是一个 ($po u$ -) 带, 并且映射 $\varphi: E \rightarrow W(E, E^0)$, 定义为 $a\varphi = (au, uau, ua)$ 是从 E 到 $W(E, E^0)$ 的一个序同构映射. 显然, 集合 $D_\alpha = \{(e, \alpha, f) \in W \mid \forall e \in Eu, f \in uE\}$ 是一个矩形 ($po u$ -) 带, 它的结构半格为 $V = E^0$, $W = \bigcup_{\alpha \in E^0} D_\alpha$ 是矩形 ($po u$ -) 带 D_α 的一个半格. 事实上, W 是矩形 ($po u$ -) 带 D_α ($\alpha \in E^0$) 的一个强半格. 对 $\alpha, \beta \in E^0, \beta \geq \alpha$, 给出结构映射 $\varphi_{\beta, \alpha}: D_\beta \rightarrow D_\alpha, (g, \beta, h) \varphi_{\beta, \alpha} = (g\alpha, \alpha, \alpha h) = (g, \beta, h)(\alpha, \alpha, \alpha)(g, \beta, h)$, 对任意 $(g, \beta, h) \in D_\beta$. 易见, 每一个矩形带 D_α 有一个极大元 (α, α, α) , 并且

$$(e, \alpha, f) \leq (g, \beta, h) \Leftrightarrow \alpha \leq \beta$$

$$(e, \alpha, f) \leq (g, \beta, h) \varphi_{\beta, \alpha}$$

将这些结果归结为定理 3.

定理 3 设 E 是一个序交换 ($po u$ -) 带, $E^0 = uEu$. 则 $E = \mathcal{L}(E^0, D_\alpha, \varphi_{\beta, \alpha})$ 是矩形 ($po u$ -) 带 D_α 的一个强半格, 并且满足条件:

- E^0 有最大元;
- 每一个 D_α 有最大元;
- $(\forall \alpha, \beta \in E^0, \alpha \leq \beta), \beta \varphi_{\beta, \alpha} = \beta \alpha \beta = \alpha$;
- $(\forall x \in D_\alpha, y \in D_\beta), x \leq y \Leftrightarrow \alpha \leq \beta, x \leq y \varphi_{\beta, \alpha}$.

特别地, 有定理 4 成立.

定理 4 设 L 是一个序交换 ($po u$ -) 带, u 是它的一个右单位元, $E^0 = uL$. 则 $L = L(E^0, L_\alpha, \varphi_{\beta, \alpha})$ 是左零 ($po u$ -) 半群 L_α 的一个强半格, 并且满足条件:

- E^0 有最大元;

b. 每一个 L_α 有最大元, 它也是 L_α 的一个右单位元;

- $(\forall \alpha, \beta \in E^0, \alpha \leq \beta), \beta \varphi_{\beta, \alpha} = \beta \alpha \beta = \alpha$;

- $(\forall x \in L_\alpha, y \in L_\beta), x \leq y \Leftrightarrow \alpha \leq \beta, x \leq y \varphi_{\beta, \alpha}$.

现假定 E 是一个序交换 ($po u$ -) 带, $E^0 = uEu$. 设 S 是充足 $po u$ -半群, 其幂等元子半群为 E^0 , S 上的格林 $*$ -关系 $\mathcal{R}^*$ 与 $\mathcal{L}^*$ 是正则的. 则有定理 5 成立.

定理 5 设 $L = Eu, R = uE$, 则 L 是左零 po -半群 L_α 的一个强半格, R 是右零 po -半群 R_α 的一个强半格, R_α 与 L_α 的结构半格均为 E^0 . 命 $M = (L, E^0)$ 表示所有从 L 到 E^0 的映射的集合, $M = (R, E^0)$ 表示所有从 R 到 E^0 的映射的集合. 则存在唯一的反单同态 $\xi: S \rightarrow M(L, E^0)$, 表示为 $x \mapsto \xi_x$, 满足条件(L)

$$(L) \quad (\forall y \in S, e \in L_{y^+}) e \xi_x = (xy)^+$$

对偶地, 存在唯一的反单同态 $\zeta: S \rightarrow M(R, E^0)$, 表示为 $y \mapsto \zeta_y$, 满足条件(R)

$$(R) \quad (\forall x \in S, f \in R_{x^+}) f \zeta_y = (xy)^+$$

并且, ζ 是保序的当且仅当 $\mathcal{R}^*$ 是正则的; ξ 是保序的当且仅当 $\mathcal{L}^*$ 是正则的.

证明 定义 $\xi_x: L \rightarrow E^0, e \mapsto e \xi_x = (xue)^+$. 若 $e \in L_\alpha$, 则 $ue = \alpha$ 是 L_α 的最大元. 现给定 $y \in S$, 对任意 $t \in L_{y^+}$, 有 $t \xi_x = (xut)^+ = (xy^+)^+ = (xy)^+$, 所以, ξ_x 满足条件(L). 假定 $\varphi: S \rightarrow M(L, E^0)$ 是一个反单同态, 使得 φ_x 也满足条件(L), 则对任意 $t \in L_{y^+}$, 有 $t \varphi_x = (xy)^+ = t \xi_x$. 故 $\xi = \varphi$, 唯一性得证.

因为 ξ 是单映射, 设 $x, y \in S$. 则对任意 $t \in L_{x^+}$, 有 $t \xi_y \xi_x = ((yut)^+) \xi_x = (xu(yut)^+)^+ = (xyut)^+ = t \xi_{xy}$. 所以, $\xi_{xy} = \xi_y \cdot \xi_x$, 即 ξ 是一个反单同态. 易见, 若 $\mathcal{R}^*$ 是正则的, 则 ξ_x 是保序的. 现假设 ξ 是保序的. 若 $x, z \in S, x \leq z$, 则 $x^+ = (xu)^+ = u \xi_x \leq u \xi_z = (zu)^+ = z^+$; 反之, 假设 S 上 $\mathcal{R}^*$ 是正则的, $x \leq z$, 则对任意 $t \in L_{y^+}$, 有 $t \xi_x = (xut)^+ = (xy)^+ \leq (xz)^+ = t \xi_z$, 所以 $\xi_x \leq \xi_z$. 对偶地, 可以证明定理的剩余部分.

由以上结论可以建立序拟充足 $po u$ -半群的结构定理.

定理 6 设 E 是一个序交换 ($po u$ -) 带, S 是充足 po -半群, S 的幂等元半格是 $E^0 = uEu$, S 上的格林 $*$ -关系 $\mathcal{R}^*$ 与 $\mathcal{L}^*$ 是正则的. 令 $W_0 =$

$W_0(E, S)$ 表示集合

$$W_0 = W_0(E, S) = \{(e, a, f) \in Eu \times S \times uE \mid e \mathcal{L}^* a^+, f \mathcal{R}^* a^+\}$$

在集合 W_0 上定义乘法

$$(e, a, f)(g, b, h) = (e \cdot g\xi_a, ab, f\xi_b h)$$

则 $W_0 = W_0(E, S)$ 关于笛卡尔序构成序拟充足 po -半群,含有最大元 u ,格林 $*$ -关系 $\mathcal{R}^*$ 与 $\mathcal{L}^*$ 是正则的;反之,每一个这样的 po -半群都可以用上述方法来构造.

为方便讨论起见,称 W_0 是 Eu, S 与 uE 的序拟直积.

定理 7 设 E 是一个序交换(pou -)带, u 是它的一个右单位元. 设 S 是充足 po -半群,它的幂等元半格是 $E^0 = uEu$, S 上的格林 $*$ -关系 $\mathcal{R}^*$ 与 $\mathcal{L}^*$ 是正则的. 命 $Q_0 = Q_0(Eu, S)$ 表示集合

$$Q_0 = Q_0(Eu, S) = \{(e, a) \in Eu \times S \mid e \mathcal{L}^* a^+\}$$

在集合 Q_0 上定义乘法 $(e, a)(g, b) = (e \cdot g\xi_a, ab)$, 则 $Q_0 = Q_0(Eu, S)$ 关于笛卡尔序构成序拟充足 po -半群,含有最大元 u ,同时也是一个右单位元,格林 $*$ -关系 $\mathcal{R}^*$ 是正则的;反之,每一个这样的 po -半群都可以用这种方法来构造.

类似地,可以得到定理 7 的对偶结论,用来刻画含有最大元,同时也是一个左单位元的序拟充足 po -半群的结构. 若 $Eu = \bigcup_{\alpha \in E^0} L_\alpha$, $uE = \bigcup_{\beta \in E^0} R_\beta$, 则 $e \mathcal{L}^* x^+ \Leftrightarrow e \in L_{x^+}$, $f \mathcal{R}^* x^+ \Leftrightarrow f \in R_{x^+}$. 因此,有

$$W_0 = W_0(E, S) = \bigcup_{x \in S} (L_{x^+} \times \{x\} \times R_{x^+})$$

特别地,在正则情形下,由文献[3]中的命题 1.2 知, $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$, $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}$. 所以,这时的结构与文献[3]中描述的一致.

4 Spined overlap 积分解

设 S 是富足 pou -半群,满足有序正则条件,则在这种情形下, u 是正规中间幂等元,所以, $E(S)u$ 与 $uE(S)$ 是 pou -半群. 在正则情形下,文献[3]给出 S 中 Spined overlap 积的一个分解. 文献[6]将这个分解结论推广到含有一个强正规中间幂等元的拟充足半群上. 该部分将类似文献[3]给出 S 中 Spined overlap 积的一个分解. 为此,需要引理 5 和引理 6.

引理 5 对任意 $a, b \in S$, 若 $uau = ubu$, 则 $e_b a = b f_a$.

证明 $a, b \in \text{OReg}(S)$, $e_x u = e_x = x u x^0$, $u f_x = f_x = x^0 u x$, $x \leq e_x f_x$, $e \leq e_x x$. 可推出 $b f_a = b u f_a = b u a^0 a = b a^0 a \leq e_b b a^0 a \leq e_b u a = e_b a$ 与 $e_b a = b b^0 u a = b b^0 a \leq b b^0 a f_a \leq b u f_a = b f_a$. 故 $e_b a = b f_a$.

引理 6 $Fu * uF = F = uF * Fu$.

证明 假设 $(a, b) \in Fu * uF$. 则存在 $c \in S$, 使得 $ua = uc$, $cu = bu$. 所以, $uau = ucu = ubu$, 即 $(a, b) \in F$; 反之, 假设 $(a, b) \in F$. 则由引理 5 知, $uau = ubu$, 且 $e_b a = b f_a$, 令 $e_b a = b f_a = t$. 注意到 $ut = u b f_a = u b u f_a = u a u f_a = u a f_a \geq ua \geq e_b a = e_b u a = u e_b u a \geq u e_b a = ut$, 即 $ut = ua$; $tu = e_b a u = e_b u a u = e_b u b u = e_b b u \geq bu \geq b f_a = b u f_a = b u f_a u \geq b f_a u = tu$, 即 $tu = au$. 所以, $(a, b) \in Fu * uF$, 故 $Fu * uF = F$. 类似可证 $uF * Fu = F$.

现建立与文献[3]中定理 7 类似的定理.

定理 8 定义 $Su \times uS$ 上的乘法为 (xu, ua) $(yu, ub) = (e_x u a y u, u a e_y u b)$. 则 $Su \times uS$ 是半群. 且下面的条件是等价的:

- 该半群是关于笛卡尔序的 po -半群;
- S 的序是右顺从的;
- S 上的格林 $*$ -关系 $\mathcal{R}^*$ 是正则的.

证明 易见, 给出的乘法是有意义的. 现验证结合律.

$$\begin{aligned} [(xu, ua)(yu, ub)](zu, uc) &= (e_x u a y u, u a e_y u b)(zu, uc) = \\ &= (e_{e_x u a y u} u a e_y u b z u, u a e_{e_y u b z u} u b e_z u c); \\ (xu, ua)[(yu, ub)(zu, uc)] &= (xu, ua)(e_y u b z u, u b e_z u c) = \\ &= (e_x u a e_y u b z u, u a e_y u b e_z u c) \end{aligned}$$

现利用文献[2]的引理 1.4, 有

$$\begin{aligned} e_{e_x u a y u} u a e_y u b z u &= e_{e_x} (u e_x u a y u)^+ u a e_y u b z u = \\ e_{e_x} u e_x (u a y a)^+ u a e_y u b z u &= \\ e_x (u a y u)^+ u a y u e_y u b z u &= e_x u a e_y u b z u \end{aligned}$$

类似地, $u a e_{e_y u b z u} u b e_z u c = u a e_y u b e_z u c$, 故 $Su \times uS$ 是半群.

明显地, $b \Leftrightarrow c$.

$a \Rightarrow b$. 假设 a 成立, 并且设 $x \leq y$. 则 $(xu, u) \leq (yu, u)$, 所以

$$(xu, u)(u, u) \leq (yu, u)(u, u)$$

而

$$(xu, u)(u, u) = (e_x u, u) = (e_x, u)$$

$$(yu, u)(u, u) = (e_y u, u) = (e_y, u)$$

故 b 成立.

c $\Rightarrow$ a. 假设 c 成立, 并且设 $(xu, ua), (yu, ub), (zu, uc) \in Su \times uS, (xu, ua) \leq (yu, ub)$. 则 $xu \leq yu$, 所以, $e_x = e_{xu} \leq e_{yu} = e_y$. 因此, 有

$$(xu, ua)(zu, uc) = (e_x uaz u, uae_z uc) \leq (e_y ubzu, ube_z uc) = (yu, ub)(zu, uc)$$

故 a 成立.

仿照文献[3], 称乘法定义如上的 po-半群 $Su \times uS$ 为 Su 与 uS 的 $\mathcal{R}^*$ 重叠积. 对偶地, 定义 $Su \times uS$ 上的乘法为

$$(xu, ua)(yu, ub) = (xuf_a yu, uayuf_b)$$

则 $Su \times uS$ 也是 po-半群, 称 Su 与 uS 的 $\mathcal{L}^*$ 重叠积. 特别地, 当 S 正则时, 结论与文献[3]一致. 现考虑 $Su \times uS$ 的子集

$$Su | \times |_F uS = \{(xu, ua) \in Su \times uS \mid xFa\} = \{(tu, ut) \mid t \in S\}$$

定理 9 若 S 上 $\mathcal{R}^*$ 是正则的, 则 $Su | \times |_F uS$ 是 Su 与 uS 的 $\mathcal{R}^*$ 重叠积的 po-子半群; 若 S 上 $\mathcal{L}^*$ 是正则的, 则 $Su | \times |_F uS$ 是 Su 与 uS 的 $\mathcal{L}^*$ 重叠积的 po-子半群.

证明 在 $\mathcal{R}^*$ 重叠积的情形, 有

$$(xu, ux)(yu, uy) = (e_x uxyu, uxe_y uy) = (e_x xyu, uxe_y y) = (xyu, uxy)$$

对于 $Su \times uS$ 上的两种乘法, $Su | \times |_F uS$ 的积相同. 仿照文献[3]称 $Su | \times |_F uS$ 为 Su 与 uS 的 Spined overlap 积. 于是, 类似文献[1], 建立结构定理 10.

定理 10 若 S 上 $\mathcal{R}^*$ 与 $\mathcal{L}^*$ 有一个是正则的, 则 $S \cong Su | \times |_F uS$, 其中, S 是富足 po-半群, 满足序正则条件.

定理 10 表明, S 的结构由 po-半群 Su 与

uS 的结构所决定. 实际上, Su 是一个序左正规带与有单位元的序充足半群的拟直积. 对偶地, uS 是一个序右正规带与有单位元的序充足半群的拟直积. 因此, 可以断定, 若富足 po-半群 S , 满足序正则条件, S 上格林 $*$ -关系 $\mathcal{R}^*$ 与 $\mathcal{L}^*$ 是正则的, 则 S 是一个 Spined overlap 积 $A | \times | B$, 其中, A 是一个序左正规带与一个富足 po-半群的拟直积, B 是一个序右正规带与一个富足 po-半群的拟直积.

参考文献:

- [1] GAO Z L. On weakly Commutative Abundant po-semigroups [J]. Acta Mathematica Sinica (Chinese), 2001, 44(4): 693 - 700.
- [2] JING F J. Abundant semigroups with a medial idempotent [J]. Semigroup Forum, 1995, 51(2): 247 - 261.
- [3] BIYTH T S, MCFADEN P. Naturally ordered regular semigroups with a greatest idempotent [J]. Proc Rog Soc Edinburgh, 1981, 91A: 107 - 122.
- [4] BIYTH T S, MCFADDEN P. On the construction of a class of regular semigroups [J]. J Algebra, 1983, 81(1): 1 - 22.
- [5] KEHAYOPULU N. On completely regular poe-semigroups [J]. Math Japonich, 1992, 37: 123 - 130.
- [6] QALLALI A E. On the construction of a class of abundant semigroups [J]. Acta Math Hung, 1990, 56(1/2): 71 - 91.
- [7] LAWSON M V. The natural partial order on an abundant semigroup [J]. Proc Edinburgh Math Soc, 1987, 20: 169 - 186.
- [8] FOUNTAIN J B. Abundant semigroups [J]. Proc London Math Soc, 1982, 33(3): 103 - 129.
- [9] HALL T E. Some properties of local subsemigroups inherited by larger Subsemigr-oups [J]. Semigroups Forum, 1982, 25(1): 35 - 49.