

文章编号:1007-6735(2011)01-0030-09

Kakutani-Kawahara 方程衰减振荡解的 近似解及其误差估计

张卫国

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 利用平面动力系统理论对非线性 Kakutani-Kawahara 方程 $u_t + uu_x + bu_{xxx} - a(u_t + uu_x)_x = 0 (b > 0, a \geq 0)$ 的行波解作了定性分析, 得到了其有界行波解存在的条件, 给出了在色散占优的情况下该方程的有界行波解不仅具振荡性而且还具衰减性的结论. 进一步根据相图中解轨线的演化关系, 利用假设待定法求出了该方程衰减振荡解的近似解. 最后, 根据齐次化原理的思想建立了反映所求衰减振荡近似解和精确解间关系的积分方程, 从而得到了所求衰减振荡近似解与精确解间的误差估计, 其误差是以指数形式速降的无穷小量.

关键词: 非线性色散-耗散方程; 定性分析; 衰减振荡解; 近似解; 误差估计

中图分类号: O 175.2

文献标志码: A

Approximate damped oscillatory solution for the Kakutani-Kawahara equation and its error estimate

ZHANG Wei-guo

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The Kakutani-Kawahara equation $u_t + uu_x + bu_{xxx} - a(u_t + uu_x)_x = 0 (b > 0, a \geq 0)$ was considered. By using the theory of planar dynamical systems, its bounded traveling wave solutions was analysed to obtain the conditions for their existence. In dispersion-dominant case, it was found that the unique bounded traveling wave solution of the equation is of oscillatory and damped property. Furthermore, according to the evolution of orbits in the global phase portraits, an approximate damped oscillatory solution for this equation was presented by using the undetermined coefficients method. Finally, in accordance with the idea of homogenization principle, an integral equation which reflects the relation between the approximate solution and the exact damped oscillatory solution was provided and thereby the error estimate was achieved. The error is an infinitesimal speedily decreasing in exponential form.

Key words: nonlinear dispersive-dissipative equation; qualitative analysis; damped oscillatory solution; approximate solution; error estimate.

收稿日期: 2010-11-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11071164); 上海市自然科学基金资助项目(10ZR1420800); 上海市重点学科建设资助项目(S30501).

作者简介: 张卫国(1957-), 男, 教授. 研究方向: 非线性系统的理论与应用. E-mail: zwgzwm@yahoo.com.cn

1 问题的提出

Kakutani 和 Kawahara^[1]于 1970 年在分析由冷离子与热电子组成的二流体等离子模型时得到了 Kakutani-Kawahara 方程

$$u_t + uu_x + bu_{xxx} - a(u_t + uu_x)_x = 0$$

$$b > 0, a \geq 0 \quad (1)$$

Kakutani-Kawahara 方程(1)是一个非线性色散-耗散方程. 文献[1]利用数值分析方法研究了方程(1), 得到在色散占优的情况下方程(1)存在振荡解, 在耗散占优的情况下方程(1)存在拟单调行波解.

Malfliet 和 Isidore^[2-3]等学者研究了比方程(1)广义一些的一类非线性色散-耗散方程

$$u_t + uu_x + bu_{xxx} - a(u_t + muu_x)_x = 0$$

$$b > 0, a \geq 0, m \geq 0 \quad (2)$$

Malfliet 在文献[2]中用 tanh 展开法得到了方程(2)在 $m=0$ 时的一个行波解. Isidore 在文献[3]中对方程(2)作了 Painleve 性质分析, 并求得了该方程在 $a \neq 0, m \neq 0, 1$ 时波速为 $c = \frac{b}{a^2 m(m-1)}$ 的扭状孤波解

$$u(\xi) = c - \sqrt{c^2 + 2g} \tanh\left(\frac{am \sqrt{c^2 + 2g}}{2b} (\xi - \xi_0)\right), \quad \xi = x - ct \quad (3)$$

式中, ξ_0, g 为任意实数.

Isidore 在文献[3]中指出用文献[2]中的 tanh 展开法也可求得方程(2)在 $m \neq 0$ 情况下的扭状孤波解.

自 Kakutani 和 Kawahara 在文献[1]中提出方程(1)有振荡解和拟单调行波解以后, 尚未发现有关求出方程(1)振荡解以及拟单调行波解的精确解或近似解的报道. 本文利用平面动力系统理论对方程(1)的行波解作了定性分析, 得到了其有界行波解存在的条件, 给出了在色散占优的情况下方程(1)的有界行波解不仅具振荡性而且还具衰减性的结论. 进一步根据相图中解轨线的演化关系, 利用假设待定法求出了方程(1)衰减振荡解的近似表达式. 由于在实际应用中不仅需要给出近似解, 同样重要的是还应给出近似解的误差估计, 不然在应用中会使人觉得不可靠. 因此, 本文最后研究了所求衰减振荡解的近似解与相应的精确解间的误差估计的问题. 该问

题的难点是只知衰减振荡解的近似解, 而不知其精确解. 为了克服这个难点, 本文通过适当变换并根据齐次化原理的思想建立了反映所求衰减振荡近似解和精确解间关系的积分方程, 从而得到了所求衰减振荡近似解的误差估计. 从本文可以看出, 用本文方法求出的方程(1)衰减振荡解的近似解与其精确解间的误差为 $O(e^{-\alpha\xi})$ ($\xi \rightarrow -\infty$), 其中, $\alpha = -\frac{a\sqrt{c^2+2g}}{2b}$.

2 方程(1)有界行波解的存在性

设方程(1)有行波解 $u(x, t) = u(\xi) = u(x - ct)$, 则其满足

$$-cu'(\xi) + u(\xi)u'(\xi) + bu'''(\xi) - a(-cu'(\xi) + u(\xi)u'(\xi))' = 0 \quad (4)$$

式中, c 为波速.

对式(4)积分一次, 可得

$$bu''(\xi) - a(-cu'(\xi) + u(\xi)u'(\xi)) + \frac{1}{2}u^2(\xi) - cu(\xi) = g \quad (5)$$

式中, g 为积分常数.

作平移变换 $\bar{u}(\xi) = u(\xi) - c$, 则方程(5)化为

$$b\bar{u}''(\xi) - a\bar{u}(\xi)\bar{u}'(\xi) + \frac{1}{2}\bar{u}^2(\xi) - \frac{1}{2}c^2 - g = 0 \quad (6)$$

令 $x = \bar{u}(\xi)$ 和 $y = \bar{u}'(\xi)$, 可得与方程(6)等价的平面动力系统

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\xi} &= y \triangleq P(x, y) \\ \frac{dy}{d\xi} &= \frac{a}{b}xy - \frac{1}{2b}(x^2 - c^2 - 2g) \triangleq Q(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

由于平面动力系统的同宿轨和闭轨线分别对应于相应非线性发展方程的钟状孤波解和周期行波解, 而异宿轨可能对应于单调扭状孤波解或非单调有界行波解, 故只需研究系统(7)有界解轨线在相平面上的分布便可得到方程(1)有界行波解的存在性.

本文始终假设 $c^2 + 2g > 0$. 这样系统(7)有两个不同的有限远奇点 $P_i(x_i, 0)$ ($i=1, 2$), 其中, $x_1 = \sqrt{c^2 + 2g}$ 和 $x_2 = -\sqrt{c^2 + 2g}$. 相应地, 方程(1)所对应的平面动力系统也有两个不同的有限远奇点 $Q_i(D_i, 0)$ ($i=1, 2$), 其中, $D_1 = c + \sqrt{c^2 + 2g}$ 和 $D_2 = c - \sqrt{c^2 + 2g}$. 系统(7)在 P_i ($i=1, 2$) 处的雅可

比矩阵记为

$$J(x_i, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{x_i}{b} & \frac{ax_i}{b} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2$$

为方便讨论起见, 记 $\Delta = a^2 x_1^2 - 4bx_1$.

利用平面动力系统理论^[4-5], 从下面 3 个方面对系统(7)进行定性分析.

a. 系统(7)有限远奇点的类型.

通过分析, 易知 P_2 为鞍点, P_1 为如下类型的奇点:

(a) 在 $a = 0$ 的情况下, 由于系统(7)存在首次分积

$$H(x, y) \triangleq by^2 + \frac{1}{3}x^3 - (c^2 + 2g)x = h, \quad h \in \mathbb{R} \quad (8)$$

故 P_1 是中心.

(b) 在 $a > 0$ 的情况下, P_1 在 $\Delta > 0$ 的条件下为不稳定结点, 在 $\Delta < 0$ 的条件下为不稳定焦点.

b. 系统(7)无限远奇点的类型.

通过对系统(7)作 Poincaré 变换, 可得如下结论:

(a) 在 $a = 0$ 的情况下.

系统(7)仅在 y 轴上存在一对无穷远奇点 A_i ($i = 1, 2$). A_1 在 y 轴的正方向上, 其周围存在一个抛物型区域; A_2 在 y 轴的负方向上, 其周围存在一个抛物型区域. Poincaré 圆盘的圆周为轨线. 结合前面的分析可得系统(7)在 $a = 0$ 情况下的全局相图, 如图 1 所示.

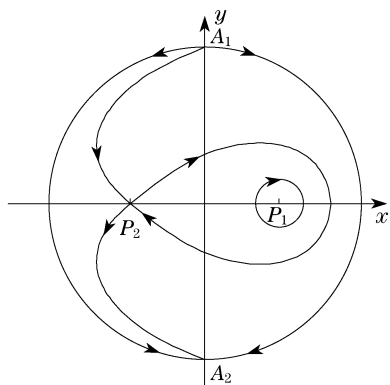


图 1 系统(7)在 $a = 0$ 情况下的全局相图

Fig.1 Global phase portrait of system (7) in case of $a = 0$

(b) 在 $a > 0$ 的情况下.

系统(7)在 y 轴上存在一对无穷远奇点 A_i ($i = 1, 2$). A_1 在 y 轴的正方向上, 其周围存在一个椭圆型区域. A_2 在 y 轴的负方向上, 其周围存在一个双

曲型区域. 系统(7)在直线 $y = \frac{1}{2a}x$ 上存在一对无穷远奇点 B_i ($i = 1, 2$). 射线 $y = \frac{1}{2a}x > 0$ 上为鞍点

B_1 , 射线 $y = \frac{1}{2a}x < 0$ 上为稳定结点 B_2 . Poincaré 圆盘的圆周为轨线.

c. 讨论系统(7)极限环与奇异闭轨线的不存在性.

命题 1 当 $a > 0$ 时, 系统(7)在 (x, y) 平面上不存在闭轨线和具有有限个奇点的奇异闭轨线. 进而, 方程(1)在 $a > 0$ 的情况下不存在周期行波解和钟状孤波解.

证明 当 $a > 0$ 时, 有 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{ax}{b}$. 因 P_1 为

不稳定奇点, 故由 Bendixson - Dulac 判别法仅能说明系统(7)在 $\{(x, y) | x \leq 0, -\infty < y < +\infty\}$ 和 $\{(x, y) | x \geq 0, -\infty < y < +\infty\}$ 内不存在闭轨线和具有有限个奇点的奇异闭轨线, 而不能说明系统(7)在 (x, y) 平面上不存在闭轨线和具有有限个奇点的奇异闭轨线. 为证明命题 1, 将利用文献[6]中定理 5 及其附注.

对系统(7)作平移变换

$$\begin{cases} \bar{x} = x - x_1 \\ \bar{y} = y \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{d\xi} = \bar{y} \\ \frac{d\bar{y}}{d\xi} = \frac{a}{b}(\bar{x} + x_1)\bar{y} - \frac{1}{2b}(\bar{x}^2 + 2x_1\bar{x}) \end{cases}$$

令

$$D = \{(\bar{x}, \bar{y}) | \bar{x} > -2x_1, -\infty < \bar{y} < +\infty\}$$

$$f(\bar{x}) = -\frac{a}{b}(\bar{x} + x_1)$$

$$g(\bar{x}) = \frac{1}{2b}(\bar{x}^2 + 2x_1\bar{x})$$

$$F(\bar{x}) = \int_0^{\bar{x}} f(x)dx \text{ 和 } G(\bar{x}) = \int_0^{\bar{x}} g(x)dx$$

则

$$F(\bar{x}) = -\frac{a}{b}\left(\frac{1}{2}\bar{x}^2 + x_1\bar{x}\right)$$

和

$$G(\bar{x}) = \frac{1}{2b}\left(\frac{1}{3}\bar{x}^3 + x_1\bar{x}^2\right)$$

当 $\bar{x} > -2x_1$ 且 $\bar{x} \neq 0$ 时, 有 $\bar{x}g(\bar{x}) = \frac{1}{2b}\bar{x}^2(\bar{x} + 2x_1) > 0$.

考察方程组

$$\begin{cases} F(u) = F(v) \\ G(u) = G(v) \end{cases} \quad (9)$$

经化简, 式(9)可化为

$$\begin{cases} u + v + 2x_1 = 0 \\ u^2 + uv + v^2 + 3x_1(u + v) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

其解为

$$\begin{cases} v_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{3})x_1 \\ u_{1,2} = (-1 \mp \sqrt{3})x_1 \end{cases} \quad (11)$$

显然, 式(9)有不满足 $-2x_1 < u < 0$ 或 $0 < v < +\infty$ 的实解式(11). 因此, 由文献[6]中定理5及其附注知, 系统(7)在 (x, y) 平面上不存在闭轨线和具有有限个奇点的奇异闭轨线. 进而, 由方程(1)与系统(7)间的关系, 可知方程(1)在 $a > 0$ 的情况下不存在周期行波解和钟状孤波解.

由命题1和系统(7)奇点的性质, 可得系统(7)在 $a > 0$ 情况下的全局相图, 如图2和图3所示.

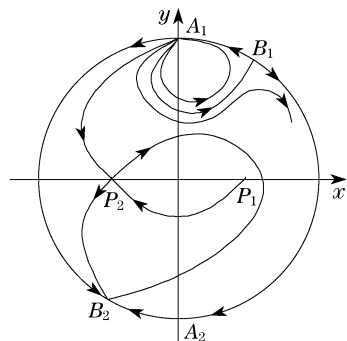


图2 系统(7)在 $a > 0, \Delta > 0$ 情形下的全局相图
Fig.2 Global phase portrait of system (7) in case of $a > 0, \Delta > 0$

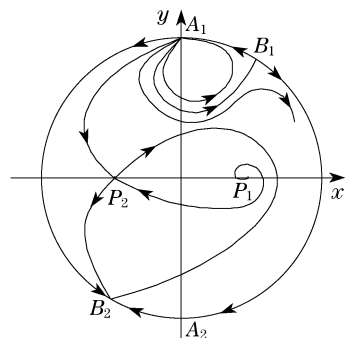


图3 系统(7)在 $a > 0, \Delta < 0$ 情形下的全面相图
Fig.3 Global phase portrait of system (7) in case of $a > 0, \Delta < 0$

由全局相图1~3, 可得下面命题成立.

命题2 设 $c^2 + 2g > 0$.

a. 当 $a = 0$ 时, 除去奇点 P_1, P_2 及轨线 $L(P_2, P_2)$ 外, 系统(7)的非周期轨线都是无界的, 且这些轨线上点的 x, y 坐标值也均是无界的.

b. 当 $a > 0$ 时, 除去奇点 P_1, P_2 及轨线 $L(P_1, P_2)$ 外, 系统(7)的其他轨线都是无界的, 且这些轨线上点的 x, y 坐标值也均是无界的.

证明 a. 当 $c^2 + 2g > 0, a = 0$ 时, 除去奇点 P_1, P_2 及轨线 $L(P_2, P_2)$ 外, 系统(7)的所有非周期轨线都是无界的, 它们在 $|\xi| \rightarrow \infty$ 时或趋于 A_1 或趋于 A_2 . 因此, 这些非周期轨线上点的 y 坐标值一定无界的.

现用反证法证明这些非周期轨线上点的 x 坐标值也是无界的. 假设这些非周期轨线上点的 x 坐标值都是有界的. 一方面, 由于轨线上任意点处的切线斜率满足

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2by}(x^2 - c^2 - 2g)$$

故当 $y \rightarrow \infty$ 时, 有 $\frac{dy}{dx} \rightarrow 0$. 另一方面, 由微分中值定理可以断定当 $y \rightarrow \infty$ 时, $\frac{dy}{dx}$ 不可能保持有界. 这个矛盾表明这些非周期轨线上点的 x 坐标值都是无界的.

b. 命题2的b可类似证明.

记号 $L(P, Q)$ 表示一条轨线, 其 α 极限点是 P , ω 极限点是 Q .

命题3 设 $c^2 + 2g > 0$.

a. 当 $a = 0$ 时, 系统(7)存在一条同宿轨 $L(P_2, P_2)$ 和无穷多条闭轨线(图1).

b. 当 $a > 0$ 时, 系统(7)只存在一条异宿轨 $L(P_1, P_2)$ (图2和图3).

因系统(7)的有界轨线对应方程(1)的有界行波解, 故可得定理1.

定理1 设波速 c 和积分常数 g 满足 $c^2 + 2g > 0$.

a. 当 $a = 0$ 时, 方程(1)存在一个钟状孤波解 (对应图1中同宿轨 $L(P_2, P_2)$) 和无穷多个周期行波解.

b. 当 $a > 0$ 时, 方程(1)只存在一个有界行波解 (对应图2和图3中异宿轨 $L(P_1, P_2)$). 该有界行波解可表现为振荡行波解或其他形式的解.

3 方程(1)振荡行波解的衰减性及其近似解

由前面的定性分析可知,方程(1)在 $c^2 + 2g > 0$ 时存在有界行波解. 这一结论与文献[1]通过运用数值分析方法得到的结论一致. 此外,文献[1]指出在耗散占优的情况下,即 $a \geq \frac{2\sqrt{b\sqrt{c^2+2g}}}{\sqrt{c^2+2g}}$ 时,方程

(1)存在拟单调行波解;在色散占优的情况下,即 $0 < a < \frac{2\sqrt{b\sqrt{c^2+2g}}}{\sqrt{c^2+2g}}$ 时,方程(1)存在振荡行波解. 本文将首先证明方程(1)对应图3中焦-鞍轨线 $L(P_1, P_2)$ 的振荡行波解具有衰减性,更重要的是要给出这种衰减振荡解的近似解.

3.1 方程(1)振荡解的衰减性

定理2 设波速 c 和积分常数 g 满足 $c^2 + 2g > 0$. 当 $0 < a < \frac{2\sqrt{b\sqrt{c^2+2g}}}{\sqrt{c^2+2g}}$ 时,方程(1)对应图3中的

的焦-鞍轨线 $L(P_1, P_2)$ 的振荡行波解 $u(\xi)$ 在 $\hat{\xi}_1$ 处取最大值. 该解在 $\hat{\xi}_1$ 的右侧具有单调递减性,在 $\hat{\xi}_1$ 的左侧具有衰减性,即在 ξ 轴上存在无穷可数个极大值点 $\hat{\xi}_i (i = 1, 2, \dots, +\infty)$ 和极小值点 $\check{\xi}_i (i = 1, 2, \dots, +\infty)$,使得

$$\left. \begin{aligned} -\infty < \dots < \check{\xi}_n < \hat{\xi}_n < \dots < \check{\xi}_1 < \hat{\xi}_1 < +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\xi}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \check{\xi}_n = -\infty \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} u(+\infty) < u(\check{\xi}_1) < \dots < u(\hat{\xi}_n) < \dots < u(\hat{\xi}_1) \\ u(-\infty) < \dots < u(\hat{\xi}_n) < \dots < u(\check{\xi}_1) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u(\hat{\xi}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(\check{\xi}_n) = u(-\infty) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{\xi}_n - \hat{\xi}_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\check{\xi}_n - \check{\xi}_{n+1}) = \frac{4\pi b}{\sqrt{4b\sqrt{c^2+2g} - a^2(c^2+2g)}} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

证明 因方程(1)的有界行波解与方程(6)的有界解间存在关系 $\bar{u}(\xi) = u(\xi) - c$, 故可以通过讨论方程(6)有界解的性质来得到方程(1)有界行波解的性质.

由平面动力系统理论知, P_1 和 P_2 分别为不稳定焦点和鞍点,且当 $\xi \rightarrow -\infty$ 时,轨线 $L(P_1, P_2)$ 将螺旋地趋于 P_1 . 轨线 $L(P_1, P_2)$ 在 P_1 的右侧与 x

轴的交点对应于 $\bar{u}(\xi)$ 的极大值点,在 P_1 的左侧与 x 轴的交点对应于 $\bar{u}(\xi)$ 的极小值点. 因此,式(12)和式(13)成立.

当轨线 $L(P_1, P_2)$ 充分接近 P_1 时,其性质趋于系统(7)在 P_1 的线性近似解的性质,绕 P_1 旋转的频率趋于 $\frac{\sqrt{4b\sqrt{c^2+2g} - a^2(c^2+2g)}}{4\pi b}$. 因此,式(14)成立.

因行波解 $u(\xi)$ 在 ξ 轴上做平行移动不改变波的形状和速度,不失一般性,设 $\hat{\xi}_1 = 0$, 于是定理2中所描述的振荡波可由图4表示. 将这种具有衰减性质的振荡解称为衰减振荡解.

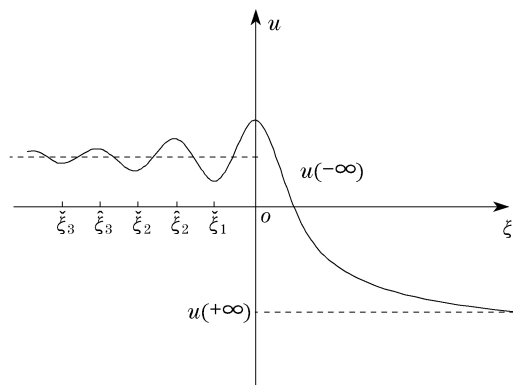


图4 在 $a > 0, \Delta < 0$ 情形下方程(1)解的相图

Fig.4 Phase portrait of solution of equation (1) in case of $a > 0, \Delta < 0$

3.2 方程(1)衰减振荡解的近似解

由平面动力系统理论中的旋转向量场理论知,图3中的焦-鞍轨线 $L(P_1, P_2)$ 是在耗散项 $a(u_t + uu_x)_x$ 的作用下(即耗散系数 a 满足 $0 < a < \frac{2\sqrt{b\sqrt{c^2+2g}}}{\sqrt{c^2+2g}}$ 时)由图1中的同宿轨 $L(P_2, P_2)$ 破裂产生的. 当 $a = 0$ 时,方程(1)化为 KdV 方程

$$u_t + uu_x + bu_{xxx} = 0 \quad (15)$$

众所周知,方程(15)存在如下形式的钟状孤波解^[7,8]

$$u(\xi) = 3\sqrt{c^2+2g} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c^2+2g}{b}}(\xi - \xi_0)\right) + c - \sqrt{c^2+2g} \quad (16)$$

式中, ξ_0 为任意实数.

易证该钟状孤波解对应图1中同宿轨 $L(P_2, P_2)$. 因此,图3中焦-鞍轨线 $L(P_1, P_2)$ 所对应的衰

减振荡解的非振荡部分可用式(16)表示, 即

$$u^*(\xi) = 3\sqrt{c^2 + 2g} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c^2 + 2g}{b}}(\xi - \xi_0)\right) + c - \sqrt{c^2 + 2g}, \quad \xi \in [\xi_0, +\infty) \quad (17)$$

而衰减振荡解的振荡部分可用

$$u(\xi) = e^{a(\xi - \xi_0)} \left[A_1 \cos(B(\xi - \xi_0)) - A_2 \sin(B(\xi - \xi_0)) \right] + C, \quad \xi \in (-\infty, \xi_0) \quad (18)$$

近似表示, 其中, A_1, A_2, B, C, α 待定.

之所以选式(18)形式的解, 是因为该解既具有衰减性也具有振荡性, 其中, $e^{a(\xi - \xi_0)}$ 具有衰减性, $A_1 \cos(B(\xi - \xi_0)) - A_2 \sin(B(\xi - \xi_0))$ 具有振荡性.

将式(18)代入方程(5), 略去含 $e^{2a(\xi - \xi_0)}$ 的项, 可得

$$\left. \begin{aligned} B^2 &= \frac{4b(C - c) - a^2(C - c)^2}{4b^2} \\ \alpha &= \frac{a(C - c)}{2b} \\ C^2 - 2cC - 2g &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

为了构造整个衰减振荡解的近似解, 式(17)和式(18)还需要满足对接条件. 由于行波解的波形不随平移而改变, 故可选取 $\xi_0 = 0$ 作为对接点. 对接条件取为

$$\frac{d^i}{d\xi^i} u(0) = \frac{d^i}{d\xi^i} u^*(0), \quad i = 0, 1$$

即

$$A_1 + C = u^*(0), \quad \alpha A_1 - A_2 B = 0 \quad (20)$$

当 $\xi \rightarrow -\infty$ 时, 式(18)趋于 $D_1 = c + \sqrt{c^2 + 2g}$. 于是, 有 $C = D_1$ 和

$$B^2 = \frac{4b\sqrt{c^2 + 2g} - a^2(c^2 + 2g)}{4b^2} \quad (21)$$

因无论 B 取正值还是负值, $A_1 \cos(B\xi) - A_2 \sin(B\xi)$ 的值都相同, 故不失一般性, 始终假设 $B > 0$. 进而, 由式(20)得

$$A_1 = \sqrt{c^2 + 2g} \quad (22)$$

和

$$A_2 = \frac{a(c^2 + 2g)}{\sqrt{4b\sqrt{c^2 + 2g} - a^2(c^2 + 2g)}} \quad (23)$$

综上, 可得定理 3.

定理 3 若 $0 < a < \frac{2\sqrt{b\sqrt{c^2 + 2g}}}{\sqrt{c^2 + 2g}}$, 波速 c 和

积分常数 g 满足 $c^2 + 2g > 0$, 则方程(1)有对应图 3 中焦-鞍轨线 $L(P_1, P_2)$ 的衰减振荡解, 其近似解为

$$u(\xi) \approx \begin{cases} 3\sqrt{c^2 + 2g} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c^2 + 2g}{b}}\xi\right) + \\ c - \sqrt{c^2 + 2g}, & \xi \in [0, +\infty) \\ e^{\frac{a\sqrt{c^2 + 2g}}{2b}\xi} (A_1 \cos(B\xi) - A_2 \sin(B\xi)) + \\ c + \sqrt{c^2 + 2g}, & \xi \in [-\infty, 0) \end{cases} \quad (24)$$

其中, A_1, A_2 和 B 分别由式(22), (23)和(21)给出.

取 $c = 1, b = 1, g = 0, a = 0.5$, 利用软件 Mathematica 4, 即可画出式(21)的波形如图 5 所示.

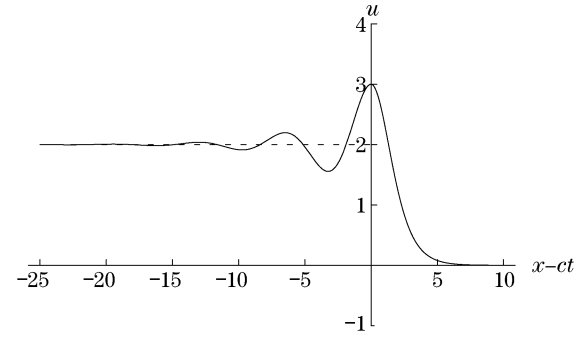


图 5 在 $c = 1, b = 1, a = 0.5$ 情形下方程(1)近似解的相图

Fig. 5 Phase portrait of approximate solution in case of $c = 1, b = 1, a = 0.5$

4 方程(1)衰减振荡近似解的误差估计

研究图 3 中焦-鞍轨线 $L(P_1, P_2)$ 对应的衰减振荡解的精确解与上面所求近似解间的误差估计.

对方程(5)先作变换

$$V(\xi) = \frac{u(\xi) - D_1}{D_2 - D_1} \quad (25)$$

再作变换 $\xi = -\eta (\eta > 0)$, 其中, $D_1 = c + \sqrt{c^2 + 2g}$ 和 $D_2 = c - \sqrt{c^2 + 2g}$, 则求方程(5)满足初始条件

$$u(0) = c + 2\sqrt{c^2 + 2g}, \quad u'(0) = 0 \quad (26)$$

的精确衰减振荡解可化为求如下初值问题的精确解

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_\eta(\eta) - \frac{a}{b}(c - D_1) \bar{V}_\eta(\eta) + \frac{\sqrt{c^2 + 2g}}{b} \bar{V}(\eta) &= \\ \frac{\sqrt{c^2 + 2g}}{b} (a(\bar{V}^2(\eta))_\eta + \bar{V}^2(\eta)) & \\ \bar{V}(0) = -\frac{1}{2}, \quad \bar{V}_\eta(0) = 0 & \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

其中, $\bar{V}(\eta) = V(\xi)$.

用齐次化原理来研究上述问题. 首先易证下列2个引理成立.

引理1 设 $V_1(\eta)$ 和 $V_2(\eta)$ 分别为

$$\left. \begin{aligned} V_{\eta\eta}(\eta) - \frac{a}{b}(c - D_1)V_{\eta}(\eta) + \frac{\sqrt{c^2 + 2g}}{b}V(\eta) &= 0 \\ V(0) &= -\frac{1}{2}, \quad V_{\eta}(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

和

$$\left. \begin{aligned} V_{\eta\eta}(\eta) - \frac{a}{b}(c - D_1)V_{\eta}(\eta) + \frac{\sqrt{c^2 + 2g}}{b}V(\eta) &= 0 \\ V(\eta) &= \frac{\sqrt{c^2 + 2g}}{b}(a(\bar{V}^2(\eta))_{\eta} + \bar{V}^2(\eta)) \\ V(0) &= 0, \quad V_{\eta}(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

的解, 则 $V_1(\eta) + V_2(\eta)$ 是式(27)的解.

引理2 设 $V_3(\eta, \tau)$ 是

$$\left. \begin{aligned} V_{\eta\eta}(\eta) - \frac{a}{b}(c - D_1)V_{\eta}(\eta) + \frac{\sqrt{c^2 + 2g}}{b}V(\eta) &= 0, \quad \eta > \tau \\ V(\tau) &= 0, \\ V_{\eta}(\tau) &= \frac{\sqrt{c^2 + 2g}}{b} \cdot (a(\bar{V}^2(\tau))_{\tau} + \bar{V}^2(\tau)), \quad \eta > \tau \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

的解, 则 $\int_0^{\eta} V_3(\eta, \tau) d\tau$ 是式(29)的解.

易得式(28)的解为

$$V_1(\eta) = e^{a\eta}(c_1 \cos(\beta\eta) + c_2 \sin(\beta\eta))$$

其中, $\alpha = -\frac{a}{2b}\sqrt{c^2 + 2g}$, $c_1 = -\frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{\alpha}{2\beta}$,

$$\beta = \frac{\sqrt{4b\sqrt{c^2 + 2g} - a^2(c^2 + 2g)}}{2b}.$$

为求式(30)的解 $V_3(\eta, \tau)$, 对其作变换 $t = \eta - \tau$, 得

$$\left. \begin{aligned} W_{tt}(t, \tau) - \frac{a}{b}(c - D_1)W_t(t, \tau) + \frac{\sqrt{c^2 + 2g}}{b}W(t, \tau) &= 0 \\ W(0, \tau) &= 0, \\ W_t(0, \tau) &= \frac{\sqrt{c^2 + 2g}}{b}(a(\bar{V}^2(\tau))_{\tau} + \bar{V}^2(\tau)) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

其中, $W(t, \tau) = V_3(t + \tau, \tau)$.

易得式(31)的解为

$$W(t, \tau) = c_3 e^{a\tau} \sin(\beta t)$$

其中, $c_3 = \frac{\sqrt{c^2 + 2g}}{\beta b}(a(\bar{V}^2(\tau))_{\tau} + \bar{V}^2(\tau))$.

于是, 式(30)的解为

$$V_3(\eta, \tau) = \frac{\sqrt{c^2 + 2g}}{\beta b}(a(\bar{V}^2(\tau))_{\tau} + \bar{V}^2(\tau)) e^{a(\eta - \tau)} \sin(\beta(\eta - \tau))$$

进而, 式(29)的解为

$$\begin{aligned} V_2(\eta) &= \int_0^{\eta} V_3(\eta, \tau) d\tau = \\ &= -\frac{a\sqrt{c^2 + 2g}}{\beta b} \bar{V}^2(0) e^{a\eta} \sin(\beta\eta) + \\ &= \frac{\sqrt{c^2 + 2g}}{\beta b} \int_0^{\eta} e^{a(\eta - \tau)} \bar{V}^2(\tau) ((1 + a\alpha) \cdot \\ &\quad \sin(\beta(\eta - \tau)) + a\beta \cos(\beta(\eta - \tau))) d\tau \end{aligned}$$

这样, 式(27)的解为

$$\begin{aligned} \bar{V}(\eta) &= e^{a\eta} [c_1 \cos(\beta\eta) + 2c_2 \sin(\beta\eta)] + \\ &= \frac{\sqrt{c^2 + 2g}}{\beta b} \int_0^{\eta} e^{a(\eta - \tau)} \bar{V}^2(\tau) [(1 + a\alpha) \cdot \\ &\quad \sin(\beta(\eta - \tau)) + a\beta \cos(\beta(\eta - \tau))] d\tau \end{aligned} \quad (32)$$

因方程(5)满足初始条件式(26)的衰减振荡解是经变换式(25)和 $\xi = -\eta (\eta > 0)$ 后满足式(27)的, 将 $\eta = -\xi$ 代入式(32), 并作变换 $t = -\tau$, 得

$$\begin{aligned} V(\xi) &= e^{-a\xi} [c_1 \cos(\beta\xi) - 2c_2 \sin(\beta\xi)] + \\ &= \frac{\sqrt{c^2 + 2g}}{\beta b} \int_{\xi}^0 e^{-a(\xi - t)} V^2(t) [-(1 + a\alpha) \cdot \\ &\quad \sin(\beta(\xi - t)) + a\beta \cos(\beta(\xi - t))] dt \end{aligned} \quad (33)$$

由式(33)和式(25), 即得方程(5)满足初始条件式(26)的隐式精确衰减振荡解

$$\begin{aligned} u(\xi) - D_1 &= e^{-a\xi} [c_4 \cos(\beta\xi) + 2c_5 \sin(\beta\xi)] - \\ &= \frac{1}{2\beta b} \int_{\xi}^0 e^{-a(\xi - t)} (u(t) - D_1)^2 [-(1 + a\alpha) \cdot \\ &\quad \sin(\beta(\xi - t)) + a\beta \cos(\beta(\xi - t))] dt \end{aligned} \quad (34)$$

其中, $c_4 = \sqrt{c^2 + 2g}$, $c_5 = -\frac{a(c^2 + 2g)}{2\beta b}$. 显然, β , c_4 , c_5 分别等于定理3中的 B , A_1 , $-A_2$. 这样, 式(34)反映了衰减振荡近似解式(24)与精确解之间的关系.

由于衰减振荡解具有有界性, 故存在 $K > 0$, 使得 $|u(\xi)| < K$. 进而, 由式(34), 可得

$$|u(\xi) - D_1| \leq T e^{-a\xi} + T_2 \int_{\xi}^0 e^{-a(\xi - t)} \cdot$$

$$\left| u(t) - D_1 \right| dt, \quad \xi < 0 \quad (35)$$

其中

$$T_1 = |c_4| + 2|c_5|, \\ T_2 = \frac{(K + |D_1|)(|1 + a\alpha| + |a\beta|)}{2\beta b}$$

利用 Gronwall 不等式, 式(35)可化为

$$\left| u(\xi) - D_1 \right| \leq T_3 e^{-a\xi}, \quad \xi < 0 \quad (36)$$

其中, $T_3 = T_2 e^{-\frac{T_2}{a}}$. 式(36)表明当 $\xi \rightarrow -\infty$ 时, $u(\xi)$ 将无限接近于 D_1 .

最后, 由式(34)和式(36), 得

$$\left| u(\xi) - \{e^{-a\xi}[c_4 \cos(\beta\xi) + c_5 \sin(\beta\xi)] + D_1\} \right| \leq T_5 e^{-a\xi} (1 + e^{-a\xi} (1 - e^{-a\xi})), \quad \xi < 0 \quad (37)$$

其中

$$T_4 = \frac{T_3^2(|1 + a\alpha| + |a\beta|)}{2\beta b}$$

$$T_5 = \max \left\{ |c_5|, -\frac{T_4}{a} \right\}$$

式(37)表明, 当 $0 < a < \frac{2\sqrt{b\sqrt{c^2+2g}}}{\sqrt{c^2+2g}}$ 时, 方程(1)

的衰减振荡近似解式(37)与精确解间的误差小于

$$\varepsilon(\xi) = T_5 e^{-a\xi} (1 + e^{-a\xi} (1 - e^{-a\xi})) = O(e^{-a\xi}), \quad \xi \rightarrow -\infty$$

5 讨论

利用前面的结果, 可对衰减振荡解作进一步的讨论.

5.1 耗散系数 a , 色散系数 b 及速度 c 与 $u(\xi)$ 趋于 D_1 的速度间的关系

据前面的讨论知, 当 $0 < a < \frac{2\sqrt{b\sqrt{c^2+2g}}}{\sqrt{c^2+2g}}$

时, 方程(1)的行波解是衰减振荡解, 当 $\xi < 0$ 时, $u(\xi)$ 在渐近值 $u(-\infty) = D_1$ 的上下振荡而趋于 D_1 . 据式(36)和式(37), 又得到衰减振荡解 $u(\xi)$ 是以指数函数 $e^{\frac{a\sqrt{c^2+2g}}{2b}\xi}$ 的方式而趋于渐近值 D_1 . 进一步还可以看出:

a. 对于给定的波速 c 和色散系数 b , 耗散系数 a 越大, 解 $u(\xi)$ 收敛于 D_1 的速度越快; 耗散系数 a 较小, 则 $u(\xi)$ 收敛于 D_1 的速度也相对较小;

b. 对于给定的波速 c 和耗散系数 a , 色散系数 b 越大, 解 $u(\xi)$ 收敛于 D_1 的速度越小; 若色散系数 b 越小, 则 $u(\xi)$ 收敛于 D_1 的速度越快;

c. 对于给定的 a, b , 波速 $|c|$ 越大, 解 $u(\xi)$ 收敛于 D_1 的速度越快; 若 $|c|$ 越小, $u(\xi)$ 收敛于 D_1 的速度则较小.

5.2 波形的进一步刻画

由式(36)可知, 在 $\xi < 0$ 范围内, $u(\xi)$ 的图形在两条指数曲线 $u = D_1 \pm T_3 e^{\frac{a\sqrt{c^2+2g}}{2b}\xi}$ 之间, 其振幅不超过 $2T_3 e^{\frac{a\sqrt{c^2+2g}}{2b}\xi}$, 当 $\xi \rightarrow -\infty$ 时, 振幅以指数函数趋于零, 如图 6 所示. 因此, 除第一个波峰外, 其余波峰和波谷都不明显, 在离原点稍远的地方波已很平坦. 当波向右行进时, 对于固定的点而言, 只有第一个波峰的作用明显, 而后衰减振荡波的影响迅速减弱, 表现出一定的孤立波的性质. 这与 $0 < a < \frac{2\sqrt{b\sqrt{c^2+2g}}}{\sqrt{c^2+2g}}$ 时色散占优是一致的.

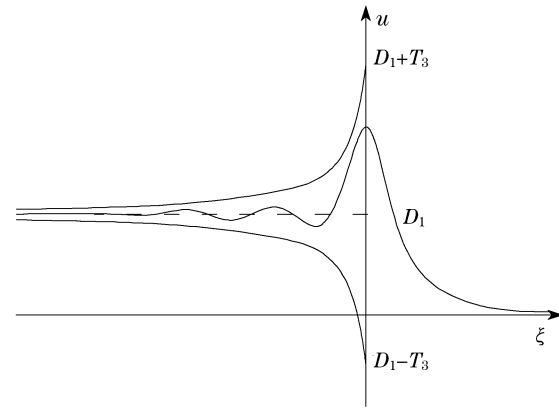


图6 方程(1)衰减指数解的相图

Fig.6 Phase portrait of approximate damped oscillatory solution of equation (1)

最后指出, 本文得到方程(1)衰减振荡解近似的方法基于对方程(1)行波解作平面动力系统的分析和无耗散作用时所研方程(1)精确解的求出. 本文方法还可用于其他许多非线性发展方程衰减振荡近似解的求解. 如 KdV-Burgers 方程^[7-11]

$$u_t + auu_x + \delta u_{xxx} - \gamma u_{xx} = 0$$

BBM-Burgers 方程^[12-13]

$$u_t + auu_x + \gamma u_{xx} - u_{xxt} = 0$$

河床流体方程^[14-18]

$$u_t + \beta(u^2)_x + u_{xxx} + \varepsilon u_{xx} - \delta u_{xt} = 0$$

作者目前正在研究将本文方法推广并应用于具高阶非线性项的方程以及耦合方程的情形.

参考文献:

- [1] KAKUTANI T, KAKUTANI T. Weak ion-acoustic

- shock waves [J]. J Phys Soc Jpn, 1970, 29 (4): 1068 - 1073.
- [2] MALFLIRT M, The tanh Method in Nonlinear Wave Theory[D]. Antwerp, Belgium: University of Antwerp, 1994.
- [3] ISIDORE N, Exact solutions of a nonlinear dispersive-dissipative equation[J]. J Phys A: Math Gen, 1996, 29: 3679 - 3682.
- [4] NEMYTSKII V, STEPANOV V. Qualitative Theory of Differential Equations[M]. New York: Dover, 1989.
- [5] ZHANG Z F. Qualitative Theory of Differential Equations[M]//Translations of Mathematical Monographs, Volume 101. Providence: American Mathematical Society, 1992.
- [6] CHERKAS L A. Estimation of the number of limit cycles of autonomous systems[J]. Diff Eqs, 1977, 13: 529 - 547.
- [7] JEFFERY A, KAKUTANI T. Stability of the Burgers shock wave and the Korteweg-de Vries soliton[J]. Indiana Univ Math Journal, 1970, 20: 463 - 468.
- [8] BONA J L, SCHONBEK M E. Travelling wave solutions to the Korteweg-de Vries-Burgers equation[C]//Proc R Soc Edin, 1985, 101A: 207 - 226.
- [9] GRAD H, HU P N. Unified shock profile in a plasma[J]. Phys Fluids, 1967, 10: 2596 - 2602.
- [10] JOHNSON R S. A nonlinear equation incorporating damping and dispersion[J]. J Fluid Mech, 1970, 42 (1): 49 - 60.
- [11] CANOSA J, GAZBAG J. The Korteweg-de Vries-Burgers equation[J]. J Comput Phys, 1977, 23: 393 - 403.
- [12] BENJAMIN T B, BONA J L, MAHONY J J, Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems[J]. Philos Trans R Soc London Ser A, 1972, 272 (1): 47 - 78.
- [13] BONA J L, DOUGALIS V A, An initial-and boundary-value problem for a model equation for propagation of long waves [J]. J Math Anal Appl, 1980, 75 (2), 503 - 522.
- [14] GANSER G H, DREW D A. Nonlinear periodic waves in two-phase flow model[J]. SIAM J Appl Math, 1987, 47(4): 726 - 736.
- [15] GANSER G H, DREW D A. Nonlinear Stability analysis of a uniformly fluidized bed [J]. Int J Multiphase Flow, 1990, 16(3): 447 - 460.
- [16] ABIA L, CHRISTIE I, SANZ-SERNA J M. Stability of schemes for the numerical treatment of an equation modeling fluided beds[J]. Mathematical Modeling and Numerical Analysis, 1989, 23(2): 191 - 204.
- [17] LOPEZ-MAREOS J C, SANZ-SERNA J M. A definition of stability for nonlinear equations in numerical treatment of differential equation[C]//Proceeding of the Forth Seminar Numerical differential, 1987, 41: 217 - 229.
- [18] FENG M F, MING P B. Stability finite difference method and the nonlinear stability analysis of modeling fluided beds Equation [J]. Journal of Computational Mathematics in Colleges and Universities, 1997, 9(4): 298 - 311.

(责任编辑:石 瑛)