

文章编号:1007-6735(2011)01-0064-07

易逝品最优订货模型与数值分析

葛泽慧¹, 王素娟², 桂 宏³

(1. 上海理工大学 管理学院, 上海 200093; 2. 山西大学 经济与工商管理学院, 太原 030006;
3. 上海大学 管理学院, 上海 200436)

摘要: 通过建立具有两个销售季度的易逝品零售模型, 考察了具有价格替代和库存替代双重效应时的易逝品订货策略, 同时辅以数值分析. 研究发现, 最优订货策略总是存在, 并且与第二季产品的期初库存水平之间呈现互补关系, 而不是与消费者需求对应成比例.

关键词: 库存管理; 零售; 易逝品; 价格替代; 缺货替代

中图分类号: F 274 **文献标志码:** A

Optimal ordering model of perishable products and related numerical analysis

GE Ze-hui¹, WANG Su-juan², GUI Hong³

(1. Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China;
2. School of Economics and Management, Shanxi University, Taiyuan 030006, China;
3. School of Management, Shanghai University, Shanghai 200436, China)

Abstract: The retailing problem of perishable products lasting for two seasons was modelled to discuss order strategies under price and stock-out substitutions, accompanying with numerical analysis. The results show that there always exists equilibrium of order decisions, which is not in direct proportion but in complementary relationship with the inventory level of second-season products.

Key words: inventory management; retail market; perishable products; price substitution; stock-out substitution

竞争日益激烈的商业环境使得企业零售呈现出新特点: 商品的生命周期越来越短、品种数目越来越多、消费者对质量与交货期的要求越来越高、消费者需求日趋多样化、个性化与时尚化等. 因此, 易逝品的销售管理问题在这几年越来越受到重视. 易逝品(perishable products)是指具有生产提前期长、销售期短、期末未售出的商品产值极低甚至还需要处理成本、市场需求不确定性大等显著特征的一类商品的总称^[1]. 易逝品可简单分为以下类型^[2]: a. 由商品

自身物化特性所决定的易逝品, 如易腐食品、水果、鲜花及药品等; b. 伴随人类节假日、潮流、文化或重大事件影响而产生的易逝品, 如圣诞节礼物、新年贺卡、流行时装、时尚玩具及新闻时事类报刊杂志等; c. 由于技术进步推动和消费者需求不断升级而产生的一些高科技类易逝品, 如半导体和数码通讯等消费类电子产品; d. 由于商品消费所需的特殊条件所产生的易逝品, 如飞机上的座位、酒店里的房间等.

由于易逝品具有时效性强、残值低及持有成本高

收稿日期: 2010-11-01
基金项目: 上海市教育委员会科研创新基金资助项目(11YS122); 上海市重点学科建设资助项目(S30501)
作者简介: 葛泽慧(1978-), 男, 讲师. 研究方向: 库存管理、供应链管理及研发管理等. E-mail: gezehui@usst.edu.cn

等特点,因此,如何运用多种措施保证库存和零售环节的科学决策,实现利润最大化,成为目前研究的热点之一.例如,国家农产品保鲜工程技术研究中心发现,我国每年生产的水果、蔬菜从田间到餐桌,损失率高达25%~30%.而造成上述损耗和浪费的最直接原因在于冷链物流的不完善和库存与零售环节管理机制的落后.因此,在发展冷链物流的同时,探索科学合理的库存管理与营销策略,将能够有效降低物流成本、提高利润水平.所以,研究易逝品的订货与定价策略对我国日益迫切的易逝品管理研究具有十分重要的意义.

在进行多商品零售时,零售商往往通过对不同商品需求的替代效应来调节库存与收益.需求的替代效应一般分为两种^[3]:定价(或价格驱动)替代和缺货(或库存驱动)替代.前者表现为当一种商品的定价变动时,会影响到消费者对另一种相关商品的需求;后者表现为当某一种商品缺货而另一种相关商品有剩余时,后者将替代前者为消费者所购买.

Pentico 最先考虑了商品间的单向缺货驱动替代,用动态规划方法得到多商品的最优库存^[4];Chand 等通过推广 Pentico 的购买价格函数并假设需求固定,利用动态规划方法求出最优的零部件库存组合^[5].而在双向缺货替代的情况下,Smith 和 Agrawal 研究了单期多商品的库存管理问题^[6].进一步,Honhon 等通过动态规划模型分析了多个易逝品的品类计划与库存决策问题^[7].而 Xu 等则研究了具有非稳态批量需求的库存系统的订货与替代控制问题^[8].在价格替代效应下,Kok 和 Fisher 利用对数线性回归模型对同一品类的商品需求进行估计^[9].同样是品类计划问题,Bitrán 等利用 Multinomial Logit(MNL)需求模型研究了多个易逝品的定价策略,并提出线性搜索程序来确定最优定价^[3].Deniz 等通过将易逝品分为两个生命期,在相互分离的需求客流下考察了库存和补货策略^[10].在两种替代效应均发生的情况下,Birge 等^[11]和 Anupindi 等^[12]通过考虑新商品定价和老商品订购量的联合决策,研究商品的定价和订货问题.目前还没有文献同时考虑两种效应下的易逝品订货策略.

在国内的研究进展方面,蔡连侨等假设随机需求下的销售价格是由市场决定的,进而给出两产品库存模型并分析了订货策略^[13-14];进一步,陈旭以获得最大期望利润为目标,给出了随机需求环境下两种双向库存替代的易逝品的零售商最优订货策略,并讨论了替代系数、商品的边际利润和商品的零售价格对零售商订货量的影响^[15];黄允成则假设易

逝品在有效期限内的需求为可能性需求,在有数量折扣的条件下探讨了两阶段报童模型中可替代产品的最优订货量和定价策略^[16];彭作和与田澎则在数量折扣基础上建立了一个变质率为指数分布的易逝品定价和库存模型,其结果表明,资本的时间价值性和商品的变质特性对最优决策者有重要影响^[17];曹细玉等^[2]、赵泉午等^[18]、覃毅延等^[19]则分别从供应链的角度研究了易逝品广告投入、产品定价与数量折扣等问题,建立了供应链中易逝品的订货、定价与数量折扣的基本策略,并利用数值结果辅以分析.然而,在库存替代和价格替代同时存在的情况下如何管理易逝品零售,目前还未有文章涉及.因此,本文将研究两种替代效应下的易逝品的订货策略.

1 模型

设市场上存在零售商,销售易逝商品给消费者.为了能够准确体现商品价值的时效性,易逝产品通常被简单地分为新鲜的和折扣的两个销售季节,因此,假设每件商品在市场上至多存在两季.零售商定期检查两季商品的库存,本期未售出的新鲜产品将在下期转入折扣季销售,而本期剩余的折扣季节产品将退出市场,下期不再销售.零售商每期都会检查存货以便确定下期的订货量.消费者将根据两种商品的零售价调整自己的需求,因此,两种季节产品的消费者比例将会依据不同的零售价而变化,此时将产生价格替代效应.由于处于两个季节的产品之间存在很强的替代性,因此,欲购买新鲜产品的顾客发现缺货时,可能寻求折扣产品来替代;反之亦然.此种客流的转移即为缺货替代效应.由于是易逝品,有效期过后的残值将非常低,不妨假设为0.

现引入参数和符号说明. i 为时间周期指数, $i = n, n-1, \dots, 1$; c 为单位订货成本; h 为单位库存成本; k 为单位缺货成本; γ 为折现率; X 为随机需求; x_i 为第 i 期的期初订货量; y_i 为 i 期时第二季产品的期初库存量; p_N 为新鲜产品的零售价; p_E 为第二季产品的零售价; α_N 为新鲜商品的需求所占比例; α_E 为第二季产品的需求所占比例; β_N 为第二季产品缺货时寻求新产品替代的比例; β_E 为新产品缺货时选择第二季产品替代的比例.

注意到 $(p_N - h - c)$ 表示新鲜商品的获利,若转入折扣销售,则作为零售商的机会成本存在.进一步, $\beta_E p_E - (p_N - h - c)$ 表示转入折扣销售时的预期获利.因此,假设缺货成本不至于太大而使得零售

商事前蓄意囤货,即

$$k < \beta_E p_E - (p_N - h - c) \quad (1)$$

由于两季产品之间存在价格替代效应,本文采用常见的 Multinomial Logit 模型来表述^[9]消费者选择购买“新鲜产品、第二季产品、不购物”三种行为的概率分别为

$$\alpha_N = \frac{\exp(A_N - b_N p_N)}{1 + \sum_{s \in \{N, E\}} (A_s - b_s p_s)}$$

$$\alpha_E = \frac{\exp(A_E - b_E p_E)}{1 + \sum_{s \in \{N, E\}} (A_s - b_s p_{E, i})}$$

$$\alpha' = \frac{1}{1 + \sum_{s \in \{N, E\}} (A_s - b_s p_{s, i})}$$

式中, A, b 为表征消费者效用的参数^[9].

假设市场的随机需求 X 的期望值存在,且其密度函数和分布函数分别为 $f(x)$ 和 $F(x)$,则对新鲜产品的需求为 X_{α_N} ,而对第二季产品的需求为 X_{α_E} . 进一步,新产品销量可以分为两部分:直接购买新鲜产品的部分,以及因第二季产品缺货而转向新鲜产品的部分(另有一部分消费者流失). 每期第二季产品的销量亦与此同. 因此,在考虑缺货替代效应时,第 i 期期末两季产品的库存分别为

$$I_{N, i} = [x_i - X_{\alpha_N} - \beta_N(X_{\alpha_E} - I_{N, i+1})]^+ \triangleq y_{i-1}$$

$$I_{E, i} = [I_{N, i+1} - X_{\alpha_E} - \beta_E(X_{\alpha_N} - x_i)]^+$$

其中

$$x^+ = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

不难看出, $x_i/y_i = \alpha_N/\alpha_E$ 是一个分界点,它表示存货的替代比率和价格替代比率相等. 再结合总需求 X 的变化,可得

$$\left. \begin{aligned} I_{N, i} > 0, & \text{当 } \frac{x_i}{\alpha_N} \leq \frac{y_i}{\alpha_E} \text{ 且 } X < \frac{x_i}{\alpha_N}; \\ & \text{或 } \frac{x_i}{\alpha_N} \geq \frac{y_i}{\alpha_E} \text{ 且 } X < \frac{x_i + \beta_N y_i}{\alpha_N + \beta_N \alpha_E} \\ I_{E, i} > 0, & \frac{x_i}{\alpha_N} \leq \frac{y_i}{\alpha_E} \text{ 且 } X < \frac{y_i + \beta_E x_i}{\alpha_E + \beta_E \alpha_N}; \\ & \text{或 } \frac{x_i}{\alpha_N} \geq \frac{y_i}{\alpha_E} \text{ 且 } X < \frac{y_i}{\alpha_E} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

对于给定的 $y_i, i = n, n-1, \dots, 1$, 可将 x_i 与 X 的关系分为 6 种情形($A_1 - A_6$), 如表 1 和图 1 所示. I 为库存水平, t_1, t_2, t_3, t_4 为辅助变量. 由于方程式(1)中库存水平是连续变化的,因此 6 个区域在相应边界处重合,意即式(2)中的严格不等式可扩展到带等号的情况.

表 1 所有区域内的库存水平

Tab.1 Inventory level in all pieces of areas

I	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
$I_{N, i}$	>0	$=0$	$=0$	>0	>0	$=0$
$I_{E, i}$	>0	>0	$=0$	>0	$=0$	$=0$

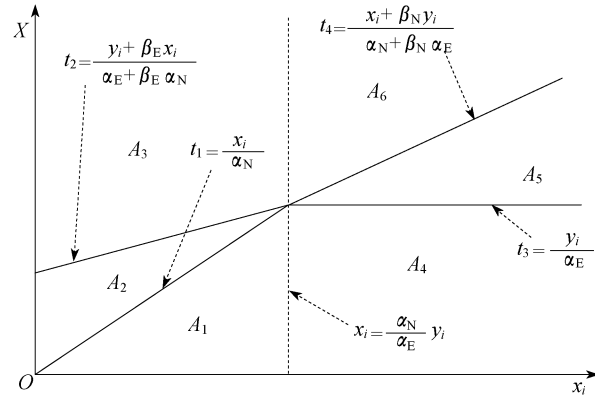


图 1 第 i 期随机需求和订货量的关系

Fig.1 Relationship between stochastic demand and order quantity

由于需求不确定,因此,零售商的利润也随机变动,记为 $\Pi_i(y_i, x_i)$;则任给 y_i ,根据图 1 可得零售商的利润函数为

$$\text{当 } \frac{x_i}{\alpha_{N, i}} \leq \frac{y_i}{\alpha_{E, i}} \text{ 时,}$$

$$\Pi_i(y_i, x_i) =$$

$$\begin{cases} [p_{N, i \alpha_{N, i}} + p_{E, i \alpha_{E, i}}]X - h(x_i + y_i) - cx_i + \\ \gamma E \Pi_{i-1}(x_i - \alpha_{N, i} X), & \text{若为 } A_1 \\ p_{N, i} x_i + p_{E, i} y_i - k(X - x_i - y_i) - h(x_i + \\ y_i) - cx_i + \gamma E \Pi_{i-1}(0), & \text{若为 } A_3 \\ p_{E, i \alpha_{E, i}} X + p_{E, i \beta_{E, i}} (\alpha_{N, i} X - x_i) + \\ p_{N, i} x_i - k(\alpha_{N, i} X - x_i) - \\ h(x_i + y_i) - cx_i + \gamma E \Pi_{i-1}(0), & \text{若为 } A_2 \end{cases}$$

其中, $E \Pi_{i-1}(y) = E \Pi_{i-1}(y, x^*(y))$ 表示第 $i-1$ 期对应于 y 的最优期望利润.

$$\text{当 } \frac{x_i}{\alpha_{N, i}} > \frac{y_i}{\alpha_{E, i}} \text{ 时,}$$

$$\Pi_i(y_i, x_i) =$$

$$\begin{cases} [p_{N, i \alpha_{N, i}} + p_{E, i \alpha_{E, i}}]X - h(x_i + y_i) - \\ cx_i + \gamma E \Pi_{i-1}(x_i - \alpha_{N, i} X), & \text{若为 } A_4 \\ p_{N, i} x_i + p_{E, i} y_i - k(X - x_i - y_i) - h(x_i + \\ y_i) - cx_i + \gamma E \Pi_{i-1}(0), & \text{若为 } A_6 \\ p_{N, i \alpha_{N, i}} X + p_{N, i \beta_{N, i}} (\alpha_{E, i} X - y_i) + \alpha_{E, i} y_i - \\ k(\alpha_{E, i} X - y_i) - h(x_i + y_i) - cx_i + \\ \gamma E \Pi_{i-1}[x_i - \alpha_{N, i} X - \beta_{N, i} \cdot \\ (\alpha_{E, i} X - y_i)], & \text{若为 } A_5 \end{cases}$$

进一步,第 i 期的期望利润为

当 $x_i/\alpha_N \leq y_i/\alpha_E$ 时,

$$\begin{aligned} E\Pi_i(y_i, x_i) = & -h(x_i + y_i) - cx_i - k\mu_i - \\ & k\beta_E\alpha_N(t_2 - t_1)F(t_2) - p_E\beta_E\alpha_N \int_{t_1}^{t_2} F(t)dt + \\ & (p_N + k)[x_i - \alpha_N \int_0^{t_1} F(t)dt] + \\ & (p_E + k)[y_i - \alpha_E \int_0^{t_2} F(t)dt] + \\ & \gamma E\Pi_{i-1}(0)[1 - F(t_1)] + \\ & \gamma \int_0^{t_1} E\Pi_{i-1}(x_i - \alpha_N t)f(t)dt \end{aligned}$$

当 $x_i/\alpha_N > y_i/\alpha_E$ 时,

$$\begin{aligned} E\Pi_i(y_i, x_i) = & -h(x_i + y_i) - cx_i - k\mu_i - \\ & k\beta_N\alpha_E(t_4 - t_3)F(t_4) - p_N\beta_N\alpha_E \int_{t_3}^{t_4} F(t)dt + \\ & (p_N + k)[x_i - \alpha_N \int_0^{t_4} F(t)dt] + \\ & (p_E + k)[y_i - \alpha_E \int_0^{t_3} F(t)dt] + \\ & \gamma E\Pi_{i-1}(0)[1 - F(t_4)] + \gamma \int_0^{t_3} E\Pi_{i-1}(x_i - \\ & \alpha_N t)f(t)dt + \gamma \int_{t_3}^{t_4} E\Pi_{i-1}[x_i + \\ & \beta_N y_i - (\alpha_N + \beta_N\alpha_E)t]f(t)dt \end{aligned}$$

零售商的最优订货策略可以表示为求解优化问题: $\max_{x_i} E\Pi_i(y_i, x_i)$.

2 模型分析

基于上述模型,对零售商第 i 期的期望利润关于 x_i 求偏导,可得:

当 $x_i/\alpha_N \leq y_i/\alpha_E$ 时,

$$\begin{aligned} g_i(y_i, x_i) = & \partial E\Pi_i(y_i, x_i)/\partial x_i = \\ & (p_N + k)[1 - F(t_1)] - p_E\beta_E\alpha_N[F(t_2) - \\ & F(t_1)] - k(t_2 - t_1)f(t_2) \frac{\alpha_N f(t)(\beta_E)^2}{\alpha_E + \beta_E\alpha_N} + \\ & \gamma \int_0^{t_1} E\Pi'_{i-1}[x_i - \alpha_N t]f(t)dt - h - c \quad (3) \end{aligned}$$

当 $x_i/\alpha_N > y_i/\alpha_E$ 时,

$$\begin{aligned} g_i(y_i, x_i) = & (p_N + k)[1 - F(t_4)] + \gamma \int_{t_3}^{t_4} E\Pi'_{i-1} \cdot \\ & [x_i + \beta_N y_i - (\alpha_N + \beta_N\alpha_E)t]f(t)dt - \\ & k(t_4 - t_3)f(t_4) \frac{\beta_N\alpha_E}{\alpha_N + \beta_N\alpha_E} + \\ & \gamma \int_0^{t_3} E\Pi'_{i-1}(x_i - \alpha_N t)f(t)dt - h - c \quad (4) \end{aligned}$$

定理 1 $E\Pi_i(y_i, x_i), g_i(y_i, x_i)$ 是关于 x_i, y_i 的连续函数.

证明 仅证 $g_i(y_i, x_i)$. 由式(3)和式(4)易知,只需考察 $E\Pi_i(y_i, x_i)$ 在边界 $x_i/\alpha_N = y_i/\alpha_E$ 处的连续性即可. 当 (x_i, y_i) 分别在区域 $x_i/\alpha_N < y_i/\alpha_E$ 和 $x_i/\alpha_N > y_i/\alpha_E$ 内趋近于 $x_i/\alpha_N = y_i/\alpha_E$ 时, $g_i(y_i, x_i)$ 的值分别趋向于

$$(p_N + k)[1 - F(t_1)] + \gamma \int_0^{t_1} E\Pi'_{i-1} \cdot (x_i - \alpha_N t)f(t)dt - h - c$$

和

$$(p_N + k)[1 - F(t_4)] + \gamma \int_0^{t_3} E\Pi'_{i-1} \cdot (x_i - \alpha_N t)f(t)dt - h - c$$

而此时 $t_4 \rightarrow t_1 = t_3$. 上述两个极限值相等,所以, $g_i(y_i, x_i)$ 连续.

定理 2 对于单期问题,任给第二季商品的期初库存水平 y_1 ,最优订货策略 $x_1^*(y_1)$ 总存在;特别地,若 X 的分布满足递增广义失效率(increasing generalized failure rate)^[20],则存在一临界值 $\bar{y}$ 使得对所有的 $y_1 < \bar{y}$,零售商总有非零订货策略.

证明 a. 任给库存水平 y_1 . 因为,随机需求 X 的期望值存在,所以,当 $t \rightarrow \infty$ 时 $F(t) \rightarrow 1, f(t) \rightarrow 0$,且 $tf(t) \rightarrow 0$. 当 $x_1 \rightarrow \infty$ 时,有 $x_i/\alpha_N > y_i/\alpha_E$,且 $t_4 \rightarrow \infty$,所以

$$g_1(y_1, x_1) = -h - c + (p_N + k)[1 - F(t_4)] -$$

$$k[t_4 f(t_4) - t_3 f(t_4)] \frac{\beta_N\alpha_E}{\alpha_N + \beta_N\alpha_E} \rightarrow -h - c < 0$$

对于充分大的 $M, E\Pi_1(y_1, x_1)$ 在区间 $[M, +\infty)$ 内的最大值一定在 M 点取得. 而在 $[0, M]$ 内,由于 $E\Pi_1(y_1, x_1)$ 连续,所以,必有最大值. 在 $[0, +\infty)$ 内必存在一点 $x_1^*(y_1)$ 使得 $E\Pi_1(y_1, x_1)$ 最大. 因此,最优订货策略存在.

b. 当 $x_1 = 0$ 时,有 $x_i/\alpha_N \leq y_i/\alpha_E, t_1 = 0, t_2 = y_1/(\alpha_E + \beta_E\alpha_N)$,所以

$$\begin{aligned} g_1(y_1, 0) = & -h - c + p_N + k - p_E\beta_E + p_E\beta_E[1 - \\ & F(t_2)] - kt_2 f(t_2) \alpha_N (\beta_E)^2 / (\alpha_E + \beta_E\alpha_N) = \\ & -h - c + p_N + k - p_E\beta_E + [1 - F(t_2)] \cdot \\ & \left[p_E\beta_E - k \frac{t_2 f(t_2)}{1 - F(t_2)} \frac{\alpha_N (\beta_E)^2}{\alpha_E + \beta_E\alpha_N} \right] \end{aligned}$$

由 X 满足递增广义失效率可知, $t_2 f(t_2)/[1 - F(t_2)]$ 随 t_2 递增,所以, $g_1(y_1, 0)$ 随 t_2 进而随 y_1 递减. 所以,当 $y > \bar{y}$ 时, $g_1(y, 0) > g_1(\bar{y}, 0)$.

可以验证, $g_1(0, 0) = -h - c + p_N + k > 0$,而

$g_1(\infty, 0) = -h - c + p_N + k - p_E \beta_E < 0$. 令 $\bar{y} = \min\{y | g_1(y, 0) = 0, y > 0\}$, 则对所有 $y_1 < \bar{y}$, 有 $g_1(y_1, 0) > 0$. 又因为 $g_1(y_1, \infty) = -h - c < 0$, 则 $x_1^*(y_1)$ 存在, 且 $x_1^*(y_1) > 0$. 证毕.

定理 3 对于单期决策, 若 X 的分布满足递增广义失效率, 则当第二季产品的期初库存水平足够多时, 最优订货策略始终为零, 即当 y_1 足够大时, $x_1^*(y_1) = 0$.

证明 任给 x_1 , 若 $y_1 \rightarrow \infty$, 则 $x_1 < y_1 \alpha_N / \alpha_E$, 此时 $F(t_2) \rightarrow 1$, 且

$$k(t_2 - t_1)f(t_2) \leq kt_2 f(t_2) \rightarrow 0$$

所以

$$g_1(y_1, x_1) \rightarrow (p_1^0 + k - p_1^1 \beta_1^1)[1 - F(t_1)] - h - c \leq p_1^0 + k - p_1^1 \beta_1^1 - h - c < 0$$

即期望利润随订货量递减, 因此, 最优订货量在 $x_1^*(y_1) = 0$ 处取得. 而且, 此时 $g_1(y_1, x_1^*) < 0$, 所以, 命题成立. 证毕.

定理 4 任给第 i 期期初库存水平 y_i , 最优订货策略 $x_i^*(y_i)$ 总存在.

证明 a. 由定理 2 可知, 当 $i = 1$ 时, 命题成立, 且满足定理 3.

b. 现利用归纳法证 $i > 1$ 时成立. 设 $i - 1$ 时命题成立, 且 y_{i-1} 足够大时有 $x_{i-1}^*(y_{i-1}) = 0$, 则

$$\begin{aligned} E\Pi'_{i-1}(y) &= \partial E\Pi_{i-1}(y, x^*(y)) / \partial y \Big|_{y \rightarrow \infty} = \\ &= \lim_{x=0, y \rightarrow \infty} (p_N + k)[1 - F(t_2)] - k(t_2 - t_1) \cdot \\ &= f(t_2) \alpha_N \beta_E / (\alpha_E + \beta_E \alpha_N) = -h < 0 \end{aligned} \quad (5)$$

存在 $\tilde{y}$ 使得当 $y > \tilde{y}$ 时 $E\Pi'_{i-1}(y) < 0$. 令 $z = x_i + \beta_N y_i - (\alpha_N + \beta_N \alpha_E)t$, 则

$$\begin{aligned} \int_{t_3}^{t_4} E\Pi'_{i-1}[x_i + \beta_N y_i - (\alpha_N + \beta_N \alpha_E)t] f(t) dt &= \\ &= \frac{1}{\alpha_N + \beta_N \alpha_E} \int_0^{x_i - y_i \alpha_N / \alpha_E} E\Pi'_{i-1}(z) \cdot \\ &= f\left(\frac{x_i + \beta_N y_i - z}{\alpha_N + \beta_N \alpha_E}\right) dz = \\ &= \frac{1}{\alpha_N + \beta_N \alpha_E} \left(\int_0^{\tilde{y}} + \int_{\tilde{y}}^{x_i - y_i \alpha_N / \alpha_E} \right) \cdot \\ &= E\Pi'_{i-1}(z) f\left(\frac{x_i + \beta_N y_i - z}{\alpha_N + \beta_N \alpha_E}\right) dz \end{aligned} \quad (6)$$

现证当 x_i 足够大时式(6)为负. 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $f(t) \rightarrow 0$, 所以

$$\lim_{x_i \rightarrow \infty} \int_0^{\tilde{y}} E\Pi'_{i-1}(z) f\left(\frac{x_i + \beta_N y_i - z}{\alpha_N + \beta_N \alpha_E}\right) dz = 0$$

由式(5)可知

$$\begin{aligned} &\lim_{x_i \rightarrow \infty} \int_{\tilde{y}}^{x_i - y_i \alpha_N / \alpha_E} E\Pi'_{i-1}(z) \cdot \\ &= f\left(\frac{x_i + \beta_N y_i - z}{\alpha_N + \beta_N \alpha_E}\right) dz < 0 \end{aligned}$$

当 x_i 足够大时有

$$\int_{t_3}^{t_4} E\Pi_{i-1}[x_i + \beta_N y_i - (\alpha_N + \beta_N \alpha_E)t] f(t) dt < 0$$

同理, 可证当 x_i 足够大时有

$$\int_0^{t_3} E\Pi'_{i-1}[x_i - \alpha_N t] f(t) dt < 0$$

类似定理 2 的证明, 知 $i > 1$ 时存在最优订货策略 x_i^* . 同理, 可证定理 3 的结论对于 i 期决策仍然成立. 因此, 利用归纳法可知命题成立. 证毕.

3 数值分析

令 $[\gamma, c, h, k, \beta_N, \beta_E] = [0.8, 1, 0.4, 0.8, 0.8, 0.5]$, X 服从 Gamma 分布 $g(1, 1)$, $p_N = 4$, $p_E = 3$, 进一步假设 $A_N = A_E = 5$, $b_N = b_E = 0.5$. 继而可知第一、二季商品的需求比例为 $[\alpha_N, \alpha_E] = [0.3775, 0.6225]$, 这类情形中第一季产品的销售量低于第二季的, 常见于刚上市的新鲜水果蔬菜、电子产品、家居装修及时装等, 因为这些产品在刚进货销售时价格略高, 而在其后的常规销售中可通过打折来提升销量.

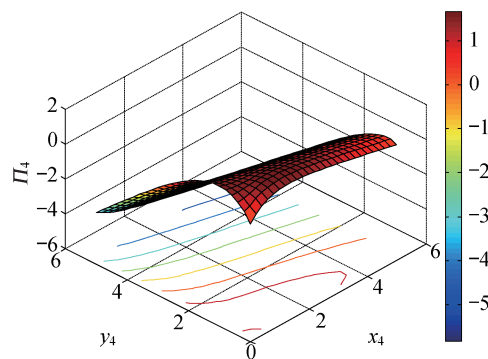


图 2 $E\Pi_i$ 随 x_4, y_4 变化图
Fig.2 $E\Pi_i$ changing with x_4, y_4

图 2 利用数值结果证实了定理 1-4, 并指出当 $x(y)$ 足够大时, 利润将随之递减. 图 2 显示了 $i = 4$ 时零售商利润随第一、二季库存水平的变化情况. 可以看出, 零售商利润是 x_4, y_4 的连续函数. 改变参数值和 X 的分布类型, 大量的数值结果仍然证明: 即使 X 的分布满足递增广义失败率 (IGFR), 利润函数也可能是非凹的. 同时发现, 在 $x_i / y_i = \alpha_N / \alpha_E$

处零售商的利润并不是局部最优的.实际上,当第二季库存 y 较小时,最优订货量 x^* 高于 $y_{i\alpha_N/\alpha_E}$;反之, x^* 低于 $y_{i\alpha_N/\alpha_E}$. 因此,对每期期初的决策而言,第一季商品的订货量与第二季商品的库存量之间表现出互补关系,而非正比关系,即与客户需求对应成比例.

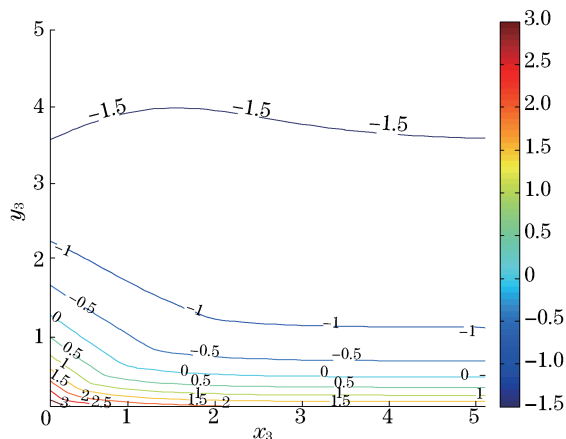


图3 $\partial E\Pi_3(y_3, x_3)/\partial y_3$ 的等高线图

Fig.3 Contour lines of $\partial E\Pi_3(y_3, x_3)/\partial y_3$

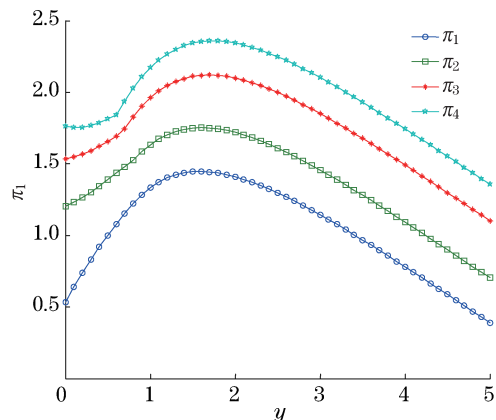


图4 $i=1,2,3,4$ 时零售商利润随折扣品库存的变化

Fig.4 Profits changing with y when $i=1,2,3,4$

图3证实了定理2-4的结论.例如,此时 $\bar{y}_3 \approx 1.3$, 当 $y_3 \gg \bar{y}_3$ 时,最优订货策略始终为0,而当 $y_3 < \bar{y}_3$ 时,总有正的订货量发生.图4给出了 $i=1,2,3,4$ 时零售商期望利润随第二季库存量的变化关系.结果显示,零售商期望利润是第二季库存水平的单峰函数.因此,在第二季商品存在一定的消费群且存在缺货成本时零售商的订货可以稍微多一点,以便下期能够混同销售两季商品,充分利用替代效应调节需求.进一步分析发现,使得期望利润最优的 y 具有相对稳定的范围(如图4中的区间 $[1,2]$),与 i 的取值无关.相应地,零售商每期的订货量也比较稳

定,所以,具有替代效应的订货策略便于在实践中操作,每期初只需根据库存量进行微小调整即可.此外,当 X 服从常见的均匀分布、指数分布和对数正态分布时,数值结果显示上述结论仍然成立.

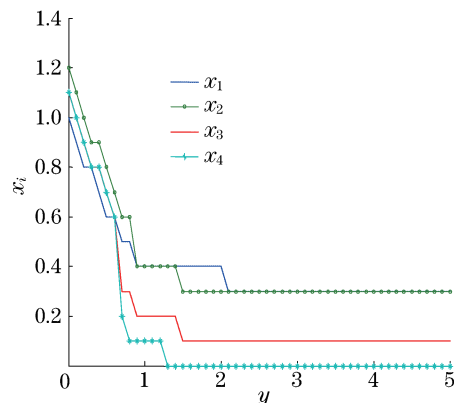


图5 $i=1,2,3,4$ 时 x_i^* 随 y 的变化示意图

Fig.5 Shift of x_i^* with y when $i=1,2,3,4$

特别是当剩余新品足够多时,下期的订货量为零,即完全销售第二季产品.因此,对于定期光顾的客户来讲,可以通过推断上一期商品的库存水平做出购买决策,避免下一期面临缺货替代的可能.特别是当剩余新品足够多时,下期的最优订货量将足够小(近似为零),亦即主要销售上期的存货.因此,对于定期光顾的客户来讲,可以通过推断上一期商品的库存水平做出购买决策.

4 结论

本文通过建立具有两个销售季度的易逝品零售模型,考察了具有价格替代和库存替代双重效应时的易逝品订货策略.研究发现,最优订货策略总是存在,并且与第二季产品的期初库存水平之间呈现互补关系,而不是与消费者需求对应成比例.换言之,每期新鲜商品剩余的越多,下一期的新鲜商品订货量则越少.每期的订货量在一个相对稳定的区间内变化.特别是当剩余新品足够多时,下期的订货量为零,即完全销售第二季产品.因此,对于定期光顾的客户来讲,可以通过推断上一期商品的库存水平做出购买决策,避免下一期面临缺货替代的可能.多产品的多个替代效应问题增加了理论分析的难度,破坏了单个易逝品或一种替代效应下所具有的单调性和凹性.尽管如此,对多个产品的多替代效应问题等更复杂问题的求解与仿真将对管理实践具有非常重要的意义,因此,未来可以从仿真和数据分析的角度入手,在本文的基础上进行深入研究.

参考文献:

- [1] NAHMIAS S. Perishable inventory theory: A review [J]. *Operations Research*, 1982, 30(4):680-708.
- [2] 曹细玉, 宁宣熙, 覃艳华. 易逝品供应链中的联合广告投入、订货策略与协调问题研究[J]. *系统工程理论与实践*, 2006, 26(3):102-107.
- [3] BITRAN G, CALDENTEY R, VIAL R. Pricing policies for perishable products with demand substitution [R]. Massachusetts, Sloan School of Management, MIT, 2007.
- [4] PENTICO D W. The assortment problem with probabilistic demands [J]. *Management Science*, 1974, 21(3):286-290.
- [5] CHAND S, WARD J E, WENG Z K. A parts selection model with one-way substitution [J]. *European Journal of Operational Research*, 1994, 73(11):65-69.
- [6] SMITH S A, AARAWAL N. Management of multi-item retail inventory systems with demand substitution [J]. *Operations Research*, 2000, 48(1):50-64.
- [7] HONHON D, GAUR V, SESHADRI S. Assortment planning and inventory decisions under stock-out based substitution [R]. Austin: University of Texas, 2009.
- [8] XU He, YAO D D, ZHENG S. Optimal control of replenishment and substitution in an inventory system with nonstationary batch demand [J]. *Production and Operations Management*, 2011, 29(2):1-10.
- [9] KOK A G, FISHER M L. Demand estimation and assortment optimization under substitution: Methodology and application [J]. *Operations Research*, 2007, 55(6):1 001-1 021.
- [10] DENIZ B, KARAESMEN I, SCHELLER - WOLF A. Managing perishables with substitution: inventory issuance and replenishment heuristics [J]. *Manufacturing & Service Operations Management*. 2010, 12(2): 319-329.
- [11] BIRGE J R, DROGOSZ J, DEUNYAS I. Setting single-period optimal capacity levels and prices for substitutable products [J]. *The International Journal of Flexible Manufacturing Systems*, 1998, 10(4):407-430.
- [12] ANUOINDI R, DADA M, GUOTA S. Estimation of consumer demand with stock-out based substitution: an application to vending machine products [J]. *Marketing Science*, 1998, 17(4):406-423.
- [13] 蔡连侨, 陈剑, 严厚民. 可替代产品的库存模型研究 (I): 最优订货量 [J]. *系统工程理论与实践*, 2003, 23(6):63-68.
- [14] 蔡连侨, 陈剑, 严厚民. 可替代产品的库存模型研究 (II): 基本性质 [J]. *系统工程理论与实践*, 2003, 23(8):59-66.
- [15] 陈旭. 面向随机需求的可替代易逝品订货策略 [J]. *系统工程理论方法应用*, 2004, 13(4):14-18.
- [16] 黄允成. 报童模式在机率性需求与数量折扣下最适订购量与订购策略之研究 [J]. *工业工程学报*, 2001, 18(6):43-52.
- [17] 彭作和, 田澎. 一个基于数量折扣的变质商品定价和库存模型 [J]. *上海理工大学学报*, 2004, 26(6):565-574.
- [18] 赵泉午, 熊中楷, 杨秀苔, 等. 易逝品两级供应链中的数量折扣问题研究 [J]. *系统工程学报*, 2005, 20(3):318-322.
- [19] 覃毅延, 郭崇慧. 在弹性需求和物品易变质条件下数量折扣定价模型 [J]. *管理学报*. 2007, 4(2):163-168.
- [20] LARIVIERE M, PORTEUS E. Selling to the newsvendor: An analysis of price-only contracts [J]. *Manufacturing and Service Operations Management*, 2001, 3(4):293-305.

(责任编辑:石 瑛)