

文章编号:1007-6735(2011)01-0080-04

与分担值相关的亚纯函数的正规性

程素旺, 叶亚盛

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 主要运用了 Pang-Zalcman 引理, 研究分担值与正规族的关系, 得到了与分担值相关的结论: 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族, a, c 是非零的有穷复数, b, d 是正实数. 若对 $\mathcal{F}$ 中任意的函数 f , f 的零点重数至少是 $k+1$, 并且有 $f(z)$ 的 k 阶微分多项式等于 a 推出 f 的模大于等于 b ; f 等于 c 推出 $f(z)$ 的 k 阶微分多项式的模小于等于 d , 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

关键词: 亚纯函数; 分担值; 正规族

中图分类号: O 174.52 **文献标志码:** A

Normality related to shared values of meromorphic functions

CHENG Su-wang, YE Ya-sheng

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: By using Pang-Zalcman lemma, the relation between shared values and normal families, were studied and the conclusion concerned with the shared values was obtained; let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions on domain D , a, c be two non-zero complex numbers and b, d two positive numbers, if all zeros of functions in $\mathcal{F}$ have multiplicities at least $k+1$, and $f^{(k)}(z) + a_1(z)f^{(k-1)}(z) + \dots + a_k(z)f(z) = a \Rightarrow |f| \geq b$, $f(z) = c \Rightarrow |f^{(k)}(z) + a_1(z)f^{(k-1)}(z) + \dots + a_k(z)f(z)| \leq d$, then $\mathcal{F}$ is normal.

Key words: meromorphic function; normality; shared values

1 问题的提出

设 f 和 g 是区域 D 内的两个亚纯函数, a 是一个复数, 令 $\bar{E}_f(a) = \{z : f(z) = a\}$, 其中 z 不计零点的重数. $f(z) = a \Rightarrow g(z) = b$ 表示 $\bar{E}_f(a) \subset \bar{E}_g(b)$.

文献[1]建立了分担值与正规族的联系证明了定理 1.

定理 1 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族, a_1, a_2, a_3 是 3 个互不相同的有穷复数, 若对 $\mathcal{F}$ 中任意的函数 f, f' 和 f 在 D 内分担 a_1, a_2, a_3 , 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

文献[2]改进如上的结果, 证明了定理 2.

定理 2 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族, a, b ,

收稿日期: 2010-3-31

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671067)

作者简介: 程素旺(1987-), 男, 硕士研究生. 研究方向: 复分析. E-mail: chengsuwang188@163.com

c 和 d 是有穷复数且满足 $c \neq a$ 及 $d \neq b$. 若对于 $\mathcal{F}$ 中的任意函数 $f, f(z) = a \Leftrightarrow f'(z) = b, f(z) = c \Leftrightarrow f'(z) = d$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

考虑函数与其高阶导数分担值的正规族问题, 近年来有很多这方面工作^[3-5].

定理 3^[3] 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族, a, b 是非零的有穷复数. 若对 $\mathcal{F}$ 中任意的函数 f, f 的零点重数至少是 $k+1$, 并且有 $f^{(k)} = b \Leftrightarrow f = a$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

推广定理 3, 可得到定理 4.

定理 4 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族, a, c 是非零的有穷复数, b, d 是正实数. 若对 $\mathcal{F}$ 中任意的函数 f, f 的零点重数至少是 $k+1$, 并且

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) + a_1(z)f^{(k-1)}(z) + \cdots + \\ a_k(z)f(z) = a \Rightarrow |f(z)| \geq b \\ f(z) = c \Rightarrow |f^{(k)}(z) + a_1(z)f^{(k-1)}(z) + \cdots + \\ a_k(z)f(z)| \leq d \end{aligned}$$

其中 $a_1(z), a_2(z), \dots, a_k(z)$ 在 D 上解析, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

推论 1 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族, a, b 是非零的有穷复数, 若对 $\mathcal{F}$ 中任意的函数 f, f 的零点重数至少是 $k+1$, 并且

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) + a_1(z)f^{(k-1)}(z) + \cdots + \\ a_k(z)f(z) = a \Leftrightarrow f(z) = b \end{aligned}$$

则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

2 主要的引理

引理 1^[6] 设 $\mathcal{F}$ 是单位圆 Δ 内的亚纯函数族, $\mathcal{F}$ 中的每个函数的零点的重数至少是 k , 并且存在数 $A \geq 1$, 使得 $f \in \mathcal{F}$ 且 $f = 0$ 时, $|f^{(k)}(z)| \leq A$. 如果 $\mathcal{F}$ 在 Δ 上不正规, 则对 $0 \leq \alpha \leq k$, 存在

- 实数 $r \in (0, 1)$;
- 复数序列 $z_n, |z_n| < r < 1$;
- 函数序列 $f_n \in \mathcal{F}$;
- 正数序列 $\rho_n \rightarrow 0^+$.

使得 $g_n(\zeta) = \rho_n^{-\alpha} f_n(z_n + \rho_n \zeta)$ 关于球面距离内闭一致收敛到全平面 C 上的 1 个非常数的亚纯函数 $g(\zeta)$, $g(\zeta)$ 的零点重数至少为 k , 且满足 $g^\#(\zeta) \leq g^\#(0) = kA + 1$ (其中 $g^\#(\zeta) = \frac{|g'(\zeta)|}{1 + |g(\zeta)|^2}$). 特别地, g 的级至多为 2.

引理 2^[7] 设 $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots +$

$a_0 + \frac{q(z)}{p(z)}, a_0, a_1, \dots, a_n$ 是常数, $a_n \neq 0, p(z), q(z)$ 是 2 个互素的多项式, 且 $\deg q < \deg p, k$ 为一正整数, 若 $f^{(k)}(z) \neq 1$, 且 f 的零点重数至少是 $k+1$, 则有 $f(z) = \frac{z^k}{k!} + \cdots + a_1 z + a_0 + \frac{1}{az + b}$.

引理 3^[8] 设 $f(z)$ 是开平面上的有穷级的超越亚纯函数, k 为一正整数, 且 $f(z)$ 的零点重级至少是 $k+1$. 若 $p(z)$ 不是零多项式, 则 $f^{(k)}(z) - p(z)$ 有无穷多个零点.

3 定理的证明

证明 假设 $\mathcal{F}$ 在 D 内不正规, 则由引理 1 知, 存在

- 点列 $z_n \in D$;
- 函数列 $f_n \in \mathcal{F}$;
- 正数序列 $\rho_n \rightarrow 0^+$, 使得函数列 $g_n(\xi) = \rho_n^{-k} f_n(z_n + \rho_n \xi)$ 在复平面上按球距内闭一致收敛于非常数的亚纯函数 $g(\xi)$, 且 $g(\xi)$ 的零点重级至少为 $k+1$.

断言:

- $g^{(k)}(\xi) \neq a$;
- $g(\xi)$ 没有单重极点.

先证断言 a. 设 $g^{(k)}(\xi_0) = a$. 显然有 $g^{(k)}(\xi)$ 不恒等于 a (否则, $g(\xi)$ 为 k 次多项式, 则 $g(\xi) = \frac{a}{k!} (\xi - \xi_1)^k$, 这与 $g(\xi)$ 的零点重级至少是 $k+1$ 矛盾). 由于

$$g_n(\xi) = \rho_n^{-k} f_n(z_n + \rho_n \xi)$$

一致收敛于 $g(\xi)$, 故

$$g_n^{(k)}(\xi) = f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi)$$

在 ξ_0 的某一个邻域内一致收敛于 $g^{(k)}(\xi)$, 从而

$$\begin{aligned} f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi) + a_1(z_n + \rho_n \xi) f_n^{(k-1)}(z_n + \rho_n \xi) + \cdots + a_k(z_n + \rho_n \xi) f_n(z_n + \rho_n \xi) = \\ g_n^{(k)}(\xi) + a_1(z_n + \rho_n \xi) \rho_n g_n^{(k-1)}(\xi) + \cdots + a_{k-1}(z_n + \rho_n \xi) \rho_n^{k-1} g_n'(\xi) + \\ a_k(z_n + \rho_n \xi) \rho_n^k g_n(\xi) \end{aligned}$$

一致收敛于 $g^{(k)}(\xi)$, 再由 Hurwitz 定理得, 存在 $\xi_n \rightarrow \xi_0$, 使得当 n 充分大时, 有

$$\begin{aligned} f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi_n) + a_1(z_n + \rho_n \xi_n) f_n^{(k-1)}(z_n + \rho_n \xi_n) + \cdots + a_k(z_n + \rho_n \xi_n) f_n(z_n + \rho_n \xi_n) = \\ a \Rightarrow |f_n(z_n + \rho_n \xi_n)| \geq b \end{aligned}$$

得出

$$|g_n(\xi_n)| = \left| \frac{f_n(z_n + \rho_n \xi_n)}{\rho_n^k} \right| \geq \left| \frac{b}{\rho_n^k} \right|$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |g_n(\xi_n)| = \infty$$

于是 $g(\xi_0) = \infty$, 此与假设 $g^{(k)}(\xi_0) = a$ 矛盾, 于是断言 a 成立.

再证断言 b. 设 $g(\xi_0) = \infty$, 则 $\frac{1}{g(\xi_0)} = 0$, 故存在闭圆盘 $\bar{\Delta}(\xi_0, \delta) = \{\xi : |\xi - \xi_0| \leq \delta\}$, 使得当 n 充分大时, $\frac{1}{g(\xi)}$ 和 $\frac{1}{g_n(\xi_n)}$ 全纯, 并且 $\frac{1}{g_n(\xi_n)}$ 一致收敛到 $\frac{1}{g(\xi)}$, 从而在 $\bar{\Delta}(\xi_0, \delta)$ 上 $\frac{1}{g_n(\xi_n)} - \frac{\rho_n^k}{c}$ 也一致收敛到 $\frac{1}{g(\xi)}$. 由于 $\frac{1}{g(\xi)}$ 不恒为常数, 所以由 Hur-

$$\left| \left(\frac{1}{g(\xi)} \right)'_{\xi=\xi_0} \right| = \left| -\frac{g'(\xi_0)}{g^2(\xi_0)} \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g'_n(\xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'_n(z_n + \rho_n \xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} \right| =$$

$$\left| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f'_n(z_n + \rho_n \xi_n) + a_1(z_n + \rho_n \xi_n)f_n(z_n + \rho_n \xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} - \frac{a_1(z_n + \rho_n \xi_n)f_n(z_n + \rho_n \xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} \right) \right| = 0$$

因此, ξ_0 为 $g(\xi)$ 的重级极点.

若 $k=2$, 则

$$\left(\frac{1}{g(\xi)} \right)''_{\xi=\xi_0} = -\frac{g''(\xi_0)}{g^2(\xi_0)} + 2\frac{(g'(\xi_0))^2}{g^3(\xi_0)} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{g''_n(\xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} + 2\frac{(g'_n(\xi_n))^2}{g_n^3(\xi_n)} \right]$$

$$\left(\frac{1}{g(\xi)} \right)''_{\xi=\xi_0} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{-f''_n(z_n + \rho_n \xi_n) + a_1(z_n + \rho_n \xi_n)f'_n(z_n + \rho_n \xi_n) + a_2(z_n + \rho_n \xi_n)f_n(z_n + \rho_n \xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} + \right.$$

$$\left. \frac{a_1(z_n + \rho_n \xi_n)f'_n(z_n + \rho_n \xi_n) + a_2(z_n + \rho_n \xi_n)f_n(z_n + \rho_n \xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} + 2\frac{(g'_n(\xi_n))^2}{g_n^3(\xi_n)} \right] =$$

$$0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g'_n(\xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} \left[a_1(z_n + \rho_n \xi_n)\rho_n + 2\frac{g'_n(\xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} \cdot g_n(\xi_n) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\left(\frac{g'_n(\xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} \right)^2 \cdot g_n(\xi_n)$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\xi_n) = \infty$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{g'_n(\xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} \right)^2 = 0$$

因此 ξ_0 为 $g(\xi)$ 的重级极点.

$$\left(\frac{1}{g(\xi)} \right)^{(k)}_{\xi=\xi_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{g_n(\xi_n)} \right)^{(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{g_n^{(k)}(\xi_n)}{g_n^{k+1}(\xi_n)} + k! \frac{(g'_n(\xi_n))^k}{g_n^{k+1}(\xi_n)} + \sum_{0 \leq i \leq k-2} A_i g_n^i(\xi_n) \right] =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a_1(z_n + \rho_n \xi_n)f_n^{(k-1)}(z_n + \rho_n \xi_n) + \cdots + a_k(z_n + \rho_n \xi_n)f_n(z_n + \rho_n \xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} + k! \frac{(g'_n(\xi_n))^k}{g_n^{k+1}(\xi_n)} + \right.$$

witz 定理得, 存在 $\xi_n \rightarrow \xi_0$, 使得当 n 充分大时有

$$\frac{1}{g_n(\xi_n)} - \frac{\rho_n^k}{c} = 0$$

于是有

$$f_n(z_n + \rho_n \xi_n) = c$$

从而有

$$\left| f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi_n) + a_1(z_n + \rho_n \xi_n) \cdot f_n^{(k-1)}(z_n + \rho_n \xi_n) + \cdots + a_k(z_n + \rho_n \xi_n) \cdot f_n(z_n + \rho_n \xi_n) \right| \leq d.$$

若 $k=1$, 即有 $|f'_n(z_n + \rho_n \xi_n) + a_1(z_n + \rho_n \xi_n)f_n(z_n + \rho_n \xi_n)| \leq d$. 注意到

$$\frac{f'_n(z_n + \rho_n \xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} = \frac{\rho_n}{g_n(\xi_n)} \rightarrow 0$$

故

此时

$$\left| f''_n(z_n + \rho_n \xi_n) + a_1(z_n + \rho_n \xi_n) \cdot f'_n(z_n + \rho_n \xi_n) + a_2(z_n + \rho_n \xi_n) \cdot f_n(z_n + \rho_n \xi_n) \right| \leq d$$

故

若 $k \geq 3$, 由归纳法可得, 当 $j \geq 3$ 时,

$$\left(\frac{1}{g} \right)^{(j)} = -\frac{g^{(j)}}{g^2} + j! \frac{(g')^j}{g^{j+1}} + \sum_{0 \leq i \leq j-2} A_i g^i \quad (1)$$

其中 A_i 是 $\left(\frac{1}{g} \right)'$, $\left(\frac{1}{g} \right)''$, $\dots$, $\left(\frac{1}{g} \right)^{(j-1)}$ 的多项式.

反复利用式(1), 则

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i \leq k-2} A_i g_n^i(\xi_n) \Big] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a_1(z_n + \rho_n \xi_n) \rho_n g_n^{(k-1)}(\xi_n) + \cdots + a_k(z_n + \rho_n \xi_n) \rho_n^k g_n(\xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} + \right. \\ &k! \frac{(g'_n(\xi_n))^k}{g_n^{k+1}(\xi_n)} + \sum_{0 \leq i \leq k-2} A_i g_n^i(\xi_n) \Big] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[k! \frac{(g'_n(\xi_n))^k}{g_n^{k+1}(\xi_n)} + (k-1)! a_1(z_n + \rho_n \xi_n) \cdot \rho_n \cdot \right. \\ &\frac{(g'_n(\xi_n))^{k-1}}{g_n^k(\xi_n)} + \cdots + a_{k-1}(z_n + \rho_n \xi_n) \cdot \rho_n^{k-1} \cdot \frac{g'_n(\xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} + \sum_{0 \leq i \leq k-2} B_i g_n^i(\xi_n) \Big] = \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} \left[k! \frac{(g'_n(\xi_n))^k}{g_n^{k+1}(\xi_n)} + (k-1)! a_1(z_n + \rho_n \xi_n) \cdot \rho_n \cdot \frac{(g'_n(\xi_n))^{k-1}}{g_n^k(\xi_n)} + \cdots + a_{k-2}(z_n + \rho_n \xi_n) \rho_n^{k-2} \cdot \right. \\ &\frac{(g'_n(\xi_n))^2}{g_n^3(\xi_n)} + \sum_{0 \leq i \leq k-2} B_i g_n^i(\xi_n) \Big] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[k! \left(-\frac{g'_n(\xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} \right)^k (-1)^k g_n^{k-2}(\xi_n) + \cdots + \right. \\ &a_{k-2}(z_n + \rho_n \xi_n) \cdot \rho_n^{k-2} \cdot \left(-\frac{g'_n(\xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} \right)^2 + \sum_{1 \leq i \leq k-2} B_i g_n^{i-1}(\xi_n) \Big] \cdot g_n(\xi_n) + B_0(\xi_0) \end{aligned}$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\xi_n) = \infty$, 于是

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[k! \left(-\frac{g'_n(\xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} \right)^k \cdot (-1)^k \cdot g_n^{k-2}(\xi_n) + \cdots + \right. \\ \left. a_{k-2}(z_n + \rho_n \xi_n) \cdot \rho_n^{k-2} \cdot \left(-\frac{g'_n(\xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} \right)^2 + \right. \\ \left. \sum_{1 \leq i \leq k-2} B_i g_n^{i-1}(\xi_n) \right] = 0 \end{aligned}$$

即有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[k! \left(-\frac{g'_n(\xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} \right)^k (-1)^k g_n^{k-2}(\xi_n) + \cdots + \right. \\ \left. a_{k-3}(z_n + \rho_n \xi_n) \cdot \rho_n^{k-3} \cdot \left(-\frac{g'_n(\xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} \right)^3 \cdot \right. \\ \left. (-1)^3 \cdot g_n(\xi_n) + \sum_{1 \leq i \leq k-2} B_i g_n^{i-1}(\xi_n) \right] = 0 \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[k! \left(-\frac{g'_n(\xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} \right)^k \cdot (-1)^k \cdot g_n^{k-3}(\xi_n) + \cdots + \right. \\ \left. a_{k-3}(z_n + \rho_n \xi_n) \cdot \rho_n^{k-3} \cdot \left(-\frac{g'_n(\xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} \right)^3 \cdot (-1)^3 + \right. \\ \left. \sum_{2 \leq i \leq k-2} B_i g_n^{i-2}(\xi_n) \right] = 0 \end{aligned}$$

继续此过程, 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{g'_n(\xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} \right]^k = 0$$

即有

$$\left(\frac{1}{g(\xi)} \right)'_{\xi=\xi_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-g'_n(\xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} = 0$$

从而 ξ_0 为 $g(\xi)$ 的重级极点.

情形 1 $g(\xi)$ 是有理函数. 因为 $g(\xi)$ 零点重级 $\geq k+1$, 则根据引理 2 得

$$g(\xi) = \frac{a}{k!} \xi^k + a_{k-1} \xi^{k-1} + \cdots + a_0 + \frac{1}{\alpha \xi + \beta}$$

这与 $g(\xi)$ 没有单重极点矛盾.

情形 2 $g(\xi)$ 是有穷级的超越亚纯函数. 由引理 3 知, $g^{(k)}(\xi) = a$ 有无穷个零点, 与 $g^{(k)}(\xi) \neq a$ 矛盾.

情形 3 $g(\xi)$ 是多项式. 由于 $g(\xi)$ 零点重级 $\geq k+1$ 及断言 a , 可得 $g(\xi)$ 是常数, 矛盾.

综上, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

参考文献:

- [1] SCHWICK W. Sharing values and normality[J]. Arch Math, 1992, 59(1):50-54.
- [2] PANG X C, ZALCMAN L. Normality and shared values [J]. Ark Mat, 2000, 38(2):171-182.
- [3] FANG M L, ZALCMAN L. Normal families and shared values of meromorphic functions[J]. Comput Methods Funct Theory, 2002, 2(2):385-395.
- [4] LI J T, YI H X. Normal families and shared values of meromorphic functions[J]. Appl Math J Chin Univ Ser B, 2006, 21(3):335-342.
- [5] 瞿文娟, 叶亚盛等. 涉及微分多项式的亚纯函数正规性[J]. 上海理工大学学报, 2009, 31(2):122-124.
- [6] PANG X C, ZALCMAN L. Normal families and shared values [J]. Bull London Math Soc, 2000, 32(3):325-331.
- [7] WANG Y F, FANG M L. Picard values and normal families of meromorphic functions with multiple zeros[J]. Acta Math Sinica, 1998, 14(1):17-26.
- [8] 顾永兴, 庞学诚, 方明亮. 正规族理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.

(责任编辑: 巩红晓)