

文章编号:1007-6735(2011)02-0155-08

广义对称正则长波方程孤波解的轨道稳定性

张海燕, 张卫国, 李韶伟, 杨 刘
(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 研究具两个非线性项的广义对称正则长波方程孤波解的轨道稳定性. 利用方程的两个精确孤波解, 推出了判别它们轨道稳定的显式表达式. 进一步利用分析方法, 给出了较为容易判别这两个孤波解轨道稳定的若干充分条件.

关键词: 广义对称正则长波方程; 稳定性; 孤立波解; 谱分析

中图分类号: O 175.21 **文献标志码:** A

Stability of solitary wave solutions of generalized symmetric regularized-long-wave equations

ZHANG Hai-yan, ZHANG Wei-guo, LI Shao-wei, YANG Liu
(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The orbital stability of solitary wave solutions of the generalized symmetric regularized-long-wave equations with two nonlinear items was studied. By using the two precise solitary wave solutions of the given equations, the explicit expression to determine their orbital stability was obtained. Furthermore, several sufficient conditions for the orbital stability of the two solitary wave solutions were provided by corresponding analysis.

Key words: generalized symmetric regularized-long-wave equations; stability; solitary wave solutions; spectrum analysis

1 问题的提出

广义对称正则长波方程为

$$\left. \begin{aligned} u_{xxt} - u_t &= (\rho + b_2 u^2 + b_3 u^3)_x \\ b_i &= C, \quad b_3 \neq 0, \quad i = 2, 3 \\ \rho_t + u_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

当 $b_2 = 1/2, b_3 = 0$ 时, 方程(1)成为对称正则长波方程

$$\left. \begin{aligned} u_{xxt} - u_t &= (\rho + \frac{1}{2} u^2)_x \\ \rho_t + u_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

方程(2)是用于描述弱非线性作用下等离子声波传播的数学模型^[1], 它也出现在其他的许多非线

收稿日期: 2010-04-28
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11071164); 上海市重点学科建设资助项目(S30501); 上海市自然科学基金资助项目(10ZR1420800)
作者简介: 张海燕(1984—), 女, 硕士研究生. 研究方向: 非线性系统的理论与应用. E-mail: lamar822@yahoo.com.cn
张卫国(联系人), 男, 教授. 研究方向: 非线性系统的理论与应用. E-mail: zwgzwm@126.com

性数学物理问题中^[2]. 文献[1-2]给出了方程(2)的孤波解、守恒律和孤波解间的相互作用. 关于方程(2)整体解和数值解方面的研究结果可参见文献[3-5]. 文献[6]求出了方程(1)及一类更广义的对称正则长波方程的精确孤波解. 文献[7]讨论了广义对称正则长波方程

$$u_{tt} - u_{xx} + (f(u))_{xt} - u_{xxtt} = 0 \quad (3)$$

孤波解的轨道稳定性和不稳定性. 文中假设 $f \in C^1$, 当 $s > 0$ 时, $f(s) > 0$, 且当 $s \rightarrow 0$ 时, $|f(s)| = o(|s|^p)$, $|f'(s)| = o(|s|^{p-1})$, $p > 1$, 而且其假设 1 中要求所考虑的孤波解 $(\varphi_c, \psi_c)^T$ 中的 $\varphi_c > 0$. $(\cdot, \cdot)^T$ 表示转置运算, 以下相同.

本文研究广义对称正则长波方程(1)孤波解的轨道稳定性. 若将所研究的方程(1)化为方程(3)的形式, 则 $f(u) = b_2 u^2 + b_3 u^3$, 这里 $f(u)$ 的表达式中有两个非线性项, 且 b_2, b_3 不取定符号, 故所研问题没有被包含于文献[7]中. 而且由定理 1 可知, 方程(1)实际上有两个钟状孤波解 $(\varphi_i, \psi_i)^T, i = 1, 2$, 其中, $\varphi_1(\xi) > 0, \varphi_2(\xi) < 0$, 本文也将讨论 $(\varphi_2, \psi_2)^T$ 的轨道稳定性. 故本文所研问题是新的且有意义的.

2 方程(1)的钟状孤波解及柯西问题解的局部存在性

根据文献[6], 方程(1)的孤波解

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(\xi) = u(x - ct) \\ \rho(x, t) &= \rho(\xi) = \rho(x - ct) \end{aligned}$$

满足

$$\begin{cases} -cu'''(\xi) + cu'(\xi) = \\ \rho'(\xi) + (b_2 u^2(\xi) + b_3 u^3(\xi))_\xi \\ \rho'(\xi) = \frac{1}{c} u'(\xi) \end{cases}$$

其中, $u'(\xi), u''(\xi) \rightarrow 0, |\xi| \rightarrow \infty$, 且孤波解的精确表达式由定理 1 给出.

定理 1 设 $c^2 - 1 > 0$.

a. 若 $b_3 c > 0$ 或 $b_3 = 0$ 且 $b_2 c > 0$, 则广义对称正则长波方程(1)有一个钟状孤波解

$$\begin{cases} u(x, t) = \varphi_1(\xi) = \varphi_1(x - ct) \\ \rho(x, t) = \psi_1(\xi) = \frac{1}{c} \varphi_1(x - ct) \end{cases} \quad (4a)$$

$$\varphi_1(\xi) = \frac{A_1 \operatorname{sech}^2 \frac{\alpha_1}{2} \xi}{2 + B_1 \operatorname{sech}^2 \frac{\alpha_1}{2} \xi} \quad (4b)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\sqrt{c^2 - 1}}{c}, \quad B_1 = -1 + \frac{b_2 A_1}{3 \alpha_1^2 c} \\ A_1 &= \frac{3\sqrt{2}(c^2 - 1)}{\sqrt{c[2b_2^2 c + 9b_3(c^2 - 1)]}} \end{aligned} \quad (4c)$$

b. 若 $b_3 c > 0$ 或 $b_3 = 0$ 且 $b_2 c < 0$, 则广义对称正则长波方程(1)还有一个钟状孤波解

$$\begin{cases} u(x, t) = \varphi_2(\xi) = \varphi_2(x - ct) \\ \rho(x, t) = \psi_2(\xi) = \frac{1}{c} \varphi_2(x - ct) \end{cases} \quad (5a)$$

$$\varphi_2(\xi) = \frac{A_2 \operatorname{sech}^2 \frac{\alpha_2}{2} \xi}{2 + B_2 \operatorname{sech}^2 \frac{\alpha_2}{2} \xi} \quad (5b)$$

$$\alpha_2 = \alpha_1, \quad A_2 = -A_1, \quad B_2 = -2 - B_1 \quad (5c)$$

现利用半群理论研究方程(1)柯西问题解的局部存在性. 首先给出两个引理^[8-9].

引理 1 一个线性无界算子 A 是 C_0 半群 $\{T(t); t \geq 0\}$ 的无穷小生成元的充分必要条件是 A 为稠定的闭算子, 且存在实数 M 与 ω , 使当 $\lambda > \omega$ 时, 有

$$\lambda \in \rho(A)$$

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

其中, $\rho(A)$ 为预解集, $R(\lambda; A)^n$ 为预解式.

引理 2 对非线性方程的柯西问题

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t > 0 \\ u(0) = u_0, \quad u_0 \in X \end{cases} \quad (6)$$

a. A 是空间 X 上的某个 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元;

b. $f \in C(R^+ \times X, X)$ 满足 Lipschitz 条件: 对 $\forall T > 0$, 存在 $K = K(t)$, 使 $\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq K(t) \|u - v\|, \forall u, v \in X, t \in [0, T]$, 则初值问题(6)在 R^+ 上存在唯一解

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s))ds$$

根据引理 1 与引理 2 可以推出关于方程(1)柯西问题解的局部存在性的引理 3.

引理 3 对任意的 $\vec{u}_0 \in X(H^1(R) \times L^2(R))$, 存在 $t_0 > 0, t_0$ 仅依赖于 $\|\vec{u}_0\|_X$, 使得方程(1)存在唯一的解 $\vec{u}_0 \in C([0, t]; H^1(R) \times L^2(R))$, 满足 $\vec{u}(0) = \vec{u}_0$.

证明 首先可将方程(1)化为

$$\left. \begin{aligned} u_t &= (\Delta - 1)^{-1} (b_1 \rho + b_2 u^2 + b_3 u^3)_x \\ b_i &= C, b_3 \neq 0 \\ \rho_t &= -u_x \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $(\Delta - 1)^{-1}$ 是典型的拟微分算子. 方程(7)的初值问题可以化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{u}(t)}{dt} &= A\vec{u}(t) + f(t, \vec{u}(t)), t > 0 \\ \vec{u}(0) &= \vec{u}_0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \vec{u}(t) &= \begin{pmatrix} u(t) \\ \rho(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_0 = \begin{pmatrix} u(0) \\ \rho(0) \end{pmatrix} \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & b_1(\Delta - 1)^{-1} \partial x \\ -\partial x & 0 \end{pmatrix} \\ f(t, \vec{u}(t)) &= \begin{pmatrix} (\Delta - 1)^{-1} (b_2 u^2 + b_3 u^3)_x \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

由于对 $\forall T > 0$, 存在 $K = K(t)$, 使得 $\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in X, t \in [0, T]$, 有

$$\begin{aligned} \|f(t, \vec{u}_1) - f(t, \vec{u}_2)\| &= \\ \left\| \begin{pmatrix} (\Delta - 1)^{-1} [b_2(u_1^2 - u_2^2) + b_3(u_1^3 - u_2^3)]_x \\ 0 \end{pmatrix} \right\| &\leq \\ K(t) \|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\| & \end{aligned}$$

故 $f(t, \vec{u}(t))$ 在 X 上满足 Lipschitz 条件.

现证明 A 是空间 X 上的某个 (C_0) 半群的无穷小生成元, 且 $D(A) = H^1 \times L^2$.

据引理 1 可知, 只要证明存在实数 ω , 使得当 $\lambda > \omega$ 且 $\lambda \in \rho(A)$ 时, 有

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega} \quad (9)$$

成立. 事实上, 由于 $\lambda \in \rho(A)$, 对任意的 $\vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{pmatrix} \in$

X , 存在 $\vec{u} = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{pmatrix} \in D(A)$, 使得 $(\lambda I - A)\vec{u} = \vec{v}$, 故 $\vec{u} = (\lambda I - A)^{-1}\vec{v}$. 对其作傅立叶变换可以得到

$$\hat{u}_1 = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \frac{\xi^2}{\xi^2 + 1}} \hat{v}_1 - \frac{\frac{i\xi}{1 + \xi^2}}{\lambda^2 + \frac{\xi^2}{1 + \xi^2}} \hat{v}_2 \quad (10)$$

$$\hat{u}_2 = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \frac{\xi^2}{\xi^2 + 1}} \hat{v}_2 - \frac{\frac{i\xi}{\xi^2}}{\lambda^2 + \frac{\xi^2}{1 + \xi^2}} \hat{v}_1 \quad (11)$$

由式(10)可知

$$\begin{aligned} |(\lambda - \omega) \hat{u}_1| &\leq \left| \frac{\lambda(\lambda - \omega)}{\lambda^2 + \frac{\xi^2}{\xi^2 + 1}} \hat{v}_1 \right| + \\ &\left| \frac{(\lambda - \omega)\xi}{\lambda^2(\xi^2 + 1) + \xi^2} \hat{v}_2 \right| \leq |\hat{v}_1| + \\ &\left| \frac{(\lambda - \omega)\xi}{\lambda^2(\xi^2 + 1) + \xi^2} \hat{v}_2 \right| \end{aligned}$$

因为, 当 $|\xi| \rightarrow \infty$ 时, $\frac{(\lambda - \omega)\xi}{\lambda^2(\xi^2 + 1) + \xi^2} \rightarrow 0$, 所以, 存

在正实数 N_1 , 当 $|\xi| \geq N_1$ 时, 有 $\left| \frac{(\lambda - \omega)\xi}{\lambda^2(\xi^2 + 1) + \xi^2} \right| \leq 1$, 即 $|(\lambda - \omega) \hat{u}_1| \leq |\hat{v}_1| + |\hat{v}_2|$. 当 $|\xi| \leq N_1$ 时, 解不等式

$$\left| \frac{(\lambda - \omega)\xi}{\lambda^2(\xi^2 + 1) + \xi^2} \right| \leq \left| \frac{(\lambda - \omega)\xi}{\lambda^2} \right| \leq 1$$

可得当 $\omega \geq \frac{N_1}{4}$ 时, 有

$$|(\lambda - \omega) \hat{u}_1| \leq |\hat{v}_1| + |\hat{v}_2| \quad (12)$$

根据式(11)可知

$$\begin{aligned} |(\lambda - \omega) \hat{u}_2| &\leq \left| \frac{\lambda(\lambda - \omega)}{\lambda^2 + \frac{\xi^2}{\xi^2 + 1}} \hat{v}_2 \right| + \\ &\left| \frac{(\lambda - \omega)\xi}{\lambda^2 + \frac{\xi^2}{\xi^2 + 1}} \hat{v}_1 \right| \leq |\hat{v}_2| + \left| \frac{(\lambda - \omega)\xi}{\lambda^2} \hat{v}_1 \right| \end{aligned}$$

因为, 当 $|\xi| \rightarrow 0$ 时, $\frac{(\lambda - \omega)|\xi|}{\lambda^2} \rightarrow 0$, 所以, 存

在实数 N_2 , 当 $|\xi| \leq N_2$ 时, $\left| \frac{(\lambda - \omega)\xi}{\lambda^2} \right| \leq 1$, 即

$|(\lambda - \omega) \hat{u}_2| \leq |\hat{v}_2| + |\hat{v}_1|$. 当 $|\xi| \geq N_2$ 时, 解不等式 $\frac{(\lambda - \omega)|\xi|}{\lambda^2} \leq 1$, 得 $\omega \geq \frac{N_2}{4}$ 时

$$|(\lambda - \omega) \hat{u}_2| \leq |\hat{v}_2| + |\hat{v}_1| \quad (13)$$

由式(12)和式(13), 取 $\omega = \max\left\{\frac{N_1}{4}, \frac{N_2}{4}\right\}$, 由

算子范数的定义可知, 式(9)成立.

综上, 据引理 1 和引理 2 即知引理 3 成立.

3 孤波解轨道稳定的一般性结论

首先将方程(1)化为 Hamilton 系统

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = J\vec{E}'(\vec{u})$$

其中

$$J = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} (1-\Delta)^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b_1} \end{bmatrix}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$E(\vec{u}) = - \int_R \left(\rho u + \frac{b_2}{3} u^3 + \frac{b_3}{4} u^4 \right) dx \quad (14)$$

$$E'(\vec{u}) = \begin{pmatrix} E'(u) \\ E'(\rho) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho - b_2 u^2 - b_3 u^3 \\ -u \end{pmatrix} \quad (15)$$

设在空间 $X = H^1(R) \times L^2(R)$ 上有内积

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \int_R (u_1 u_2 + \rho_1 \rho_2 + \rho_{1x} \rho_{2x}) dx,$$

$$\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in X \quad (16)$$

X 的对偶空间为 $X^* = H^{-1}(R) \times H^{-1}(R)$. X 与 X^* 间存在自然同构 $I: X \rightarrow X^*$, 定义为 $\langle I \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, 其中, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 X 与 X^* 之间的配对

$$\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = \int_R (u_1 u_2 + \rho_1 \rho_2) dx \quad (17)$$

由式(16)和式(17)可知, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\Delta \end{pmatrix}$. 可验证

J 为反对称算子, 即 $\langle J \vec{u}, \vec{v} \rangle = -\langle \vec{u}, J \vec{v} \rangle$.

设 T 是 X 上具有单参数的酉算子群, 定义为

$$T(s) \vec{u}(\cdot) = \vec{u}(\cdot - s), \forall s \in R, \vec{u}(s) \in X$$

显然

$$T'(0) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

由 $T'(0) = JB$, 可以推出 $B = \begin{pmatrix} \Delta - 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. 所以, 可以定义

$$Q(\vec{u}) = \frac{1}{2} \langle B \vec{u}, \vec{u} \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} \Delta - 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$\frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} u_{xx} - u \\ -\rho \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2} \int_R (u_{xx} u - u^2 - \rho^2) dx \quad (18)$$

易知

$$Q'(\vec{u}) = \begin{pmatrix} Q'(u) \\ Q'(\rho) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{xx} - u \\ -\rho \end{pmatrix}$$

$$Q''(\vec{u}) = B = \begin{pmatrix} \Delta - 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

方程(1)的孤波解式(4b)、式(5)可表为

$$\vec{\phi}_{ic} = \begin{pmatrix} \varphi_{ic}(x-ct) \\ \psi_{ic}(x-ct) \end{pmatrix} = T(ct) \vec{\phi}_i(x), i = 1, 2$$

式中, $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 分别由式(4b)、式(5b)给出. 现考虑孤立波解 $T(ct) \vec{\phi}_i(x)$ 的轨道稳定性. 为不重复, 取定 $\vec{\phi}_c(x)$ 为 $\vec{\phi}_1(x)$ 和 $\vec{\phi}_2(x)$ 之一. 验证 $T(ct) \vec{\phi}_c(x)$ 满足 Grillakis-Shatah-Strauss 提出的轨道稳定性理论^[10-11]的条件.

首先, 由引理3可知, 方程(1)的初值问题存在唯一解, 且易证由式(14)、式(18)定义的 $E(\vec{u})$ 、 $Q(\vec{u})$ 分别满足

$$E(\vec{u}(t)) = E(\vec{u}(0)) = E(\vec{u}_0)$$

$$Q(\vec{u}(t)) = Q(\vec{u}(0)) = Q(\vec{u}_0)$$

其次, 可证引理4.

引理4 $\vec{\phi}_c$ 是方程(1)的有界态解, 且满足 $E'(\vec{\phi}_c) - cQ'(\vec{\phi}_c) = 0$.

证明 将 $\vec{\phi}_c = \begin{pmatrix} \varphi_c \\ \psi_c \end{pmatrix}$ 代入方程(1), 可得

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{c\xi} &= c\psi_{c\xi} \\ -c\varphi_{c\xi\xi} + c\varphi_{c\xi} &= (\psi_c + b_2\varphi_c^2 + b_3\varphi_c^3)_{\xi} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

对式(19)两边积分, 得

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_c &= c\psi_c + a_1 \\ -c\varphi_{c\xi\xi} + c\varphi_c &= (\psi_c + b_2\varphi_c^2 + b_3\varphi_c^3) + a_2 \end{aligned} \right.$$

式中, a_1, a_2 为积分常数.

由于 $\varphi_c, \psi_c, \varphi_{c\xi\xi} \rightarrow 0$, 当 $|\xi| \rightarrow \infty$ 时, 故有 $a_1 = 0, a_2 = 0$, 从而有

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_c &= c\psi_c \\ -c\varphi_{c\xi\xi} + c\varphi_c &= \psi_c + b_2\varphi_c^2 + b_3\varphi_c^3 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

将 $\vec{\phi}_c = \begin{pmatrix} \varphi_c \\ \psi_c \end{pmatrix}$ 代入 $E'(\vec{\phi}_c) - cQ'(\vec{\phi}_c)$, 可得

$$E'(\vec{\phi}_c) - cQ'(\vec{\phi}_c) = \begin{bmatrix} -\psi_c - b_2\varphi_c^2 - b_3\varphi_c^3 - c\varphi_{c\xi\xi} + c\varphi_c \\ -\varphi_c + c\psi_c \end{bmatrix}$$

由式(20)即可知, $E'(\vec{\phi}_c) - cQ'(\vec{\phi}_c) = 0$ 成立.

现考虑算子 H_c , 并进行谱分析.

算子 $H_c: X \rightarrow X^*$ 定义为 $H_c = E''(\vec{\phi}_c) - cQ''(\vec{\phi}_c)$, 这里

$$E''(\vec{u}) = \begin{bmatrix} -2b_2u - 3b_3u^2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q''(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \Delta - 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

故有

$$H_c = E''(\vec{\phi}_c) - cQ''(\vec{\phi}_c) =$$

$$\begin{pmatrix} -2b_2\varphi_c - 3b_3\varphi_c^2 - c\frac{\partial^2}{\partial x^2} + c & -1 \\ -1 & c \end{pmatrix}$$

对于 $\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in H^1(R) \times L^2(R)$

$$\langle H_c \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle =$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} -2b_2\varphi_c u_1 - 3b_3\varphi_c^2 u_1 - cu_{1xx} + cu_1 - \rho_1 \\ -u_1 + c\rho_1 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} u_2 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \int_R (-2b_2\varphi_c u_1 u_2 - 3b_3\varphi_c^2 u_1 u_2 -$$

$$cu_{1xx} u_2 + cu_1 u_2 - \rho_1 u_2 - u_1 \rho_2 + c\rho_1 \rho_2) dx$$

$$\langle H_c \vec{u}_2, \vec{u}_1 \rangle =$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} -2b_2\varphi_c u_2 - 3b_3\varphi_c^2 u_2 - cu_{2xx} + cu_2 - \rho_2 \\ -u_2 + c\rho_2 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} u_1 \\ \rho_1 \end{pmatrix} \right\rangle = \int_R (-2b_2\varphi_c u_1 u_2 - 3b_3\varphi_c^2 u_1 u_2 -$$

$$cu_{2xx} u_1 + cu_1 u_2 - \rho_2 u_1 - u_2 \rho_1 + c\rho_1 \rho_2) dx$$

即有 $\langle H_c \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = \langle H_c \vec{u}_2, \vec{u}_1 \rangle$, 这说明 H_c 是一个自共轭算子, 即 $H_c = H_c^*$. 同时意味着 $I^{-1}H_c$ 在 X 上为有界自共轭算子, H_c 的特征值由那些使得 $H_c - \lambda I$ 不可逆的实数 λ 组成.

由式(19)可得

$$-c\varphi_{\text{ess}} + c\varphi_c \xi = \left(\frac{1}{c}\varphi_c + b_2\varphi_c^2 + b_3\varphi_c^3 \right) \xi$$

整理得

$$\left[-2b_2\varphi_c - 3b_3\varphi_c^2 - c\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(c - \frac{1}{c} \right) \right] \varphi_{\text{cx}} = 0 \quad (21)$$

令

$$L = -2b_2\varphi_c - 3b_3\varphi_c^2 - c\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(c - \frac{1}{c} \right)$$

由于方程(1)孤波解 $\vec{\phi}_c = \begin{pmatrix} \varphi_c \\ \psi_c \end{pmatrix}$ 的存在性是以

$c^2 - 1 > 0$ 为前提条件, 故当 $c > 1$ 时, 有 $c - \frac{1}{c} > 0$;

而 $|\xi| \rightarrow \infty$ 时, $-2b_2\varphi_c - 3b_3\varphi_c^2 \rightarrow 0$, 由 Weyl 本质谱定理得 $\sigma_{\text{ess}}(L) = \left[c - \frac{1}{c}, +\infty \right)$. 又由式(21)可知,

$L\varphi_{\text{cx}} = 0$, 且 $x = 0$ 是 φ_{cx} 的唯一零点, 从而由 Sturm-Liouville 定理可知, 0 是 L 的第二特征值, 故 L 只有一个负特征值, 设为 $-\sigma^2$, 相应的特征函数定义为 χ , 则 $L\chi = -\sigma^2\chi$.

根据文献[10-11]可得引理 5.

引理 5 对满足 $\langle y, \chi \rangle = \langle y, \varphi_{\text{cx}} \rangle = 0$ 的任意实函数 $y \in H^1(R)$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\langle Ly, y \rangle \geq \delta \|y\|_{H^1(R)}^2$$

令

$$\vec{\chi}_c = \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{1}{c}\chi \end{pmatrix}$$

有

$$\langle H_c \vec{\chi}_c, \vec{\chi}_c \rangle = \int_R \left[-2b_2\varphi_c \chi^2 - 3b_3\varphi_c^2 \chi^2 - c\chi_{xx}\chi + \left(c - \frac{1}{c} \right) \chi^2 \right] dx = \langle L\chi, \chi \rangle = -\sigma^2 \langle \chi, \chi \rangle < 0$$

令

$$\vec{\varphi}_{\text{cx}} = \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_{\text{cx}} \\ \frac{1}{c}\varphi_{\text{cx}} \end{pmatrix}$$

有

$$\langle H_c \vec{\varphi}_{\text{cx}}, \vec{\varphi}_{\text{cx}} \rangle = \int_R \left[-2b_2\varphi_c \varphi_{\text{cx}}^2 - 3b_3\varphi_c^2 \varphi_{\text{cx}}^2 - c\varphi_{\text{cx}xx} \varphi_{\text{cx}} + \left(c - \frac{1}{c} \right) \varphi_{\text{cx}}^2 \right] dx = \langle L\varphi_{\text{cx}}, \varphi_{\text{cx}} \rangle = 0$$

令

$$P = \left\{ \vec{p}_c \in X \mid \vec{p}_c = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \langle p_1, \chi \rangle = \right.$$

$$\left. \langle p_1, \varphi_{\text{cx}} \rangle = 0, \left\langle p_2, \frac{1}{c}\chi \right\rangle = \left\langle p_2, \frac{1}{c}\varphi_{\text{cx}} \right\rangle = 0 \right\}$$

则

$$\langle H_c \vec{p}_c, \vec{p}_c \rangle = \int_R \left[-2b_2\varphi_c p_1^2 - 3b_3\varphi_c^2 p_1^2 - cp_{1xx} p_1 + \left(c - \frac{1}{c} \right) p_1^2 + \frac{1}{c} (p_1 - cp_2)^2 \right] dx$$

当 $c > 1$ 时, 可知对 $\forall \vec{p}_c \in P$, 有 $\langle H_c \vec{p}_c, \vec{p}_c \rangle \geq \langle Lp_1, p_1 \rangle > \delta \|\vec{p}_c\|^2 > 0$.

综上所述, 当 $c > 1$ 时, 可对 H_c 谱分解为

$$N = \{k_1 \vec{\chi}_c \mid k_1 \in R\}, \quad Z = \{k_2 \vec{\varphi}_{\text{cx}} \mid k_2 \in R\}$$

$$P = \left\{ \vec{p}_c \in X \mid \vec{p}_c = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \langle p_1, \chi \rangle = \right.$$

$$\left. \langle p_1, \varphi_{\text{cx}} \rangle = 0, \left\langle p_2, \frac{1}{c}\chi \right\rangle = \left\langle p_2, \frac{1}{c}\varphi_{\text{cx}} \right\rangle = 0 \right\}$$

对 $\forall \vec{u} \in N, \vec{u} \neq 0, \langle H_c k_1 \vec{\chi}_c, k_1 \vec{\chi}_c \rangle = k_1^2 \langle H_c \vec{\chi}_c, \vec{\chi}_c \rangle = -k_1^2 \sigma^2 \langle \chi, \chi \rangle < 0$, 即 $\langle H_c \vec{u}, \vec{u} \rangle < 0$; 对

$\forall \vec{z} \in Z, \vec{z} \neq 0, \langle H_c k_2 \vec{\varphi}_{cx}, k_2 \vec{\varphi}_{cx} \rangle = 0$, 即 $\langle H_c \vec{z}, \vec{z} \rangle = 0$; 对 $\forall \vec{p}_c \in P, \vec{p}_c \neq 0, \langle H_c \vec{p}_c, \vec{p}_c \rangle > \delta \|\vec{p}_c\|_{H^2(R)}^2$.

因此, 空间 X 可分解为直和 $X = N + Z + P$, 其中, Z 为 H_c 的核空间, N 为一个有限维空间, P 为一个闭子空间.

现定义 $d(c): R \rightarrow R$ 为 $d(c) = E(\vec{\phi}_c) - cQ(\vec{\phi}_c)$, 有

$$d'(c) = \langle E'(\phi_c), \phi'_c \rangle - c \langle Q'(\vec{\phi}_c), \vec{\phi} \rangle - Q(\vec{\phi}_c) = -Q(\vec{\phi}_c) \quad (22)$$

于是, 由引理 3~5, 以及对 H_c 的谱分析, 可得关于广义对称正则长波方程(1)孤波解轨道稳定的一般性结论.

定理 2 设 $c > 1, b_3 > 0, \vec{\phi}_c = T(ct)\vec{\phi}(x)$ 为方程(1)的孤波解. 若 $d''(c) > 0$, 则 $\vec{\phi}_c$ 是轨道稳定的.

4 孤波解轨道稳定性的充分条件

利用定理 1 中给出的孤波解 $\vec{\phi}_{ic}$ 的两个精确表达式(4)和式(5), 导出判别它们轨道稳定的判别式 $d''_i(c)$ 的显式表达式. 进一步利用分析方法给出较为容易判别这两个孤波解轨道稳定的充分条件.

4.1 关于 $\vec{\phi}_{ic}$ 轨道稳定的判别式

根据式(22), 对于方程(1)孤波解 $\vec{\phi}_{ic}$ 的轨道稳定性有判别式

$$d'_i(c) = -Q(\vec{\phi}_{ic}) = \frac{1}{2} \int_R (\varphi_{ic}^2 - \varphi_{icx} \varphi_{ic} + \psi_{ic}^2) dx, \quad i = 1, 2 \quad (23)$$

首先将式(23)化为显式且化简. 据定理 1 中式(4)和式(5)可知, $\psi_i = \frac{1}{c} \varphi_i$, 将它代入式(23), 再作代换 $z = e^{\alpha_i \xi} (\alpha_i > 0)$, 则有

$$\begin{aligned} d'_i(c) &= \frac{1}{2} \int_R (\varphi_{ic}^2 - \varphi_{icx} \varphi_{ic} + \psi_{ic}^2) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_R \left[\left(1 + \frac{1}{c^2}\right) \varphi_{ic}^2 + \varphi_{icx}^2 \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_R \left[\left(1 + \frac{1}{c^2}\right) \varphi_{ic}^2 + \varphi_{ic\xi}^2 \right] d\xi = \\ &= \frac{1}{2\alpha_i} \int_0^{+\infty} \frac{1}{z} \left[\frac{2A_i z}{(1+z)^2 + 2B_i z} \right]^2 \cdot \\ &\quad \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} + \left[\frac{\alpha_i(z^2 - 1)}{(1+z)^2 + 2B_i z} \right]^2 \right\} dz = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{1}{c^2}\right) \frac{2A_i^2}{\alpha_i} \int_0^{+\infty} \frac{z}{[(1+z)^2 + 2B_i z]^2} dz + \\ &2A_i^2 \alpha_i \int_0^{+\infty} \frac{z(z^2 - 1)^2}{[(1+z)^2 + 2B_i z]^4} dz \end{aligned}$$

由于 $-2 < B_i < 0$, 解出 $d'_i(c)$ 中的积分, 并代入原式, 可得

$$\begin{aligned} d'(c) &= \left\{ \left(1 + \frac{1}{c^2}\right) A_i^2 \left\{ \frac{B_i + 1}{\sqrt{-B_i(B_i + 2)}} \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left[\pi - 2 \arctan \left[\frac{B_i + 1}{\sqrt{-B_i(B_i + 2)}} \right] \right] - 2 \right\} \Bigg/ \\ &\quad (2\alpha_i B_i (B_i + 2)) + \left\{ A_i^2 \alpha_i \left\{ 2(3 + 2B_i + B_i^2) - \right. \right. \\ &\quad \left. \frac{3(B_i + 1)}{\sqrt{-B_i(B_i + 2)}} \left[\pi - 2 \arctan \left[\frac{B_i + 1}{\sqrt{-B_i(B_i + 2)}} \right] \right] \right\} \Bigg/ \\ &\quad (12B_i^2 (B_i + 2)^2) \end{aligned} \quad (24)$$

当 $B_i = B_1$ 时

$$\begin{aligned} d'_1(c) &= \frac{2}{3\sqrt{b_3 c}} \left\{ 6\alpha \sqrt{b_3 c} - \sqrt{2} b_2 \left[\pi - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. 2 \arctan \left[\frac{\sqrt{2} b_2}{3} \sqrt{\frac{c}{b_3(c^2 - 1)}} \right] \right] \right\} \left(\frac{c}{b_3} + \frac{b_2^2}{9b_3^2} \right) - \frac{c\alpha^3}{3b_3} \end{aligned}$$

当 $B_i = B_2$ 时

$$\begin{aligned} d'_2(c) &= \frac{2}{3\sqrt{b_3 c}} \left\{ 6\alpha \sqrt{b_3 c} + \sqrt{2} b_2 \left[\pi + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. 2 \arctan \left[\frac{\sqrt{2} b_2}{3} \sqrt{\frac{c}{b_3(c^2 - 1)}} \right] \right] \right\} \left(\frac{c}{b_3} + \frac{b_2^2}{9b_3^2} \right) - \frac{c\alpha^3}{3b_3} \end{aligned}$$

化简, 得

$$\begin{aligned} d''_1(c) &= -\frac{k(2c - k^2)D_1}{2b_3 c^{\frac{3}{2}}} + \\ &\quad \frac{\sqrt{c^2 - 1}(11c^4 + 5k^2 c^3 - (1 + 3k^4)c^2 + 4k^2 c + 2)}{3b_3 c^3 (c^2 - 1 + k^2 c)} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} d''_2(c) &= \frac{k(2c - k^2)D_2}{2b_3 c^{\frac{3}{2}}} + \\ &\quad \frac{\sqrt{c^2 - 1}(11c^4 + 5k^2 c^3 - (1 + 3k^4)c^2 + 4k^2 c + 2)}{3b_3 c^3 (c^2 - 1 + k^2 c)} \end{aligned} \quad (26)$$

其中

$$\begin{aligned} k &= \frac{\sqrt{2} b_2}{3\sqrt{b_3}}, \quad D_1 = \pi - 2 \arctan \left[k \sqrt{\frac{c}{c^2 - 1}} \right], \\ D_2 &= \pi + 2 \arctan \left[k \sqrt{\frac{c}{c^2 - 1}} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

进一步, 设

$$M_1 = k \sqrt{\frac{c}{c^2 - 1}} D_1 = k \sqrt{\frac{c}{c^2 - 1}}.$$

$$\begin{aligned} & \left[\pi - 2\arctan \left(k \sqrt{\frac{c}{c^2-1}} \right) \right] \lim_{x \rightarrow -\infty} M_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\pi + 2\arctan x) = -2 \quad (28) \\ M_2 &= k \sqrt{\frac{c}{c^2-1}} D_2 = k \sqrt{\frac{c}{c^2-1}} \cdot \\ & \left[\pi + 2\arctan \left(k \sqrt{\frac{c}{c^2-1}} \right) \right] \quad (29) \end{aligned}$$

则式(25)可等价表示为

$$d''_1(c) = \frac{\sqrt{c^2-1}}{6b_3c^2} \left[-3M_1(2c-k^2) + \frac{2(11c^4+5k^2c^3-(1+3k^4)c^2+4k^2c+2)}{c(c^2-1+k^2c)} \right] \quad (30)$$

式(26)可等价表示为

$$d''_2(c) = \frac{\sqrt{c^2-1}}{6b_3c^2} \left[3M_2(2c-k^2) + \frac{2(11c^4+5k^2c^3-(1+3k^4)c^2+4k^2c+2)}{c(c^2-1+k^2c)} \right] \quad (31)$$

由此,为研究孤波解 $\vec{\phi}_{1c}$ 和 $\vec{\phi}_{2c}$ 的轨道稳定性,只需分别研究式(30)和式(31)中 $d''_i(c) > 0$ 成立的条件.

4.2 关于 M_1 与 M_2 的讨论

在定理2的条件 $c > 1, b_3 > 0$ 成立的情况下,考察 M_1, M_2 .

a. 对于 M_1 , 当 $b_2 > 0$ 时, 易知此时 $k > 0$, 并且若设 $x = k \sqrt{\frac{c}{c^2-1}} \in (0, +\infty)$, 有

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} x = \lim_{c \rightarrow +\infty} k \sqrt{\frac{c}{c^2-1}} = 0$$

$$\lim_{c \rightarrow 1} x = \lim_{c \rightarrow 1} k \sqrt{\frac{c}{c^2-1}} = +\infty$$

令 $g(x) = x(\pi - 2\arctan x)$, 有

$$g'(x) = \pi - 2\arctan x - \frac{2x}{1+x^2}$$

$$g''(x) = -\frac{4}{(1+x^2)^2} < 0$$

$g(x)$ 在 x_0 处取极大值, 这里 x_0 满足 $g'(x_0) = 0$, 有 $g(x_0) = x_0(\pi - 2\arctan x_0) = \frac{2x_0^2}{1+x_0^2} < 2$

又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} M_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\pi - 2\arctan x) = 2$, 故 $M_1 \in (0, 2)$. 当 $b_2 < 0$ 时, 易知 $x \in (-\infty, 0)$, $M_1 \in (-\infty, 0)$.

b. 对于 M_2 . 当 $b_2 > 0$ 时, 有 $x \in (0, +\infty)$, $M_2 \in (0, +\infty)$. 当 $b_2 < 0$, 则 $k < 0$, $x = k \sqrt{\frac{c}{c^2-1}} \in$

与考察 M_1 同理, 可证 $M_2 \in (-2, 0)$.

4.3 $2c-k^2 > 0$ 时孤波解轨道稳定的充分条件

基于 $d''_i(c)$ 的显式表达式(30)、式(31)和关于其中 M_1, M_2 的讨论, 现给出较为容易判别孤波解 $\vec{\phi}_{1c}$ 和 $\vec{\phi}_{2c}$ 轨道稳定的充分性条件.

4.3.1 对于 $\vec{\phi}_{1c}$

当 $b_2 > 0$ 时, 为得到 c 满足何种条件时 $d''_1(c) > 0$, 只需考虑在式(30)中取 $M_1 = 2$ 时, $d''_1(c) > 0$ 的条件. 现在式(30)中取 $M_1 = 2$, 通分并注意此时分母恒正, 可知当 c 的取值满足

$$5c^4 + 2k^2c^3 + 5c^2 + k^2c + 2 > 0 \quad (32)$$

时, $d''_1(c) > 0$. 此时的孤波解 $\vec{\phi}_{1c}$ 轨道稳定.

当 $b_2 < 0$ 时, 式(30)中 $-3M_1(2c-k^2) > 0$. 为使 $d''_1(c) > 0$, 即孤波解 $\vec{\phi}_{1c}$ 轨道稳定, 只需取 c 满足

$$11c^4 + 5k^2c^3 - (1+3k^4)c^2 + 4k^2c + 2 > 0 \quad (33)$$

4.3.2 对于 $\vec{\phi}_{2c}$

当 $b_2 > 0$ 时, 因此时有 $M_2 \in (0, +\infty)$, 为使 $d''_2(c) > 0$, 只需取 c 满足式(33).

当 $b_2 < 0$ 时, 因此时有 $M_2 \in (-2, 0)$, 为使 $d''_2(c) > 0$, 只需考虑在式(31)中取 $M_2 = -2$ 时 $d''_2(c) > 0$ 的条件, 易知只需取 c 满足不等式(32).

综上可得定理3.

定理3 设 $b_3 > 0, c > 1, c \in \left(\frac{b_2^2}{9b_3}, +\infty\right)$.

a. 若 $b_2 > 0$, 且波速 c 使不等式(32)成立, 或当 $b_2 < 0$ 时, 波速 c 使不等式(33)成立, 则孤波解 $\vec{\phi}_{1c}$ 轨道稳定.

b. 若 $b_2 > 0$, 且波速 c 使不等式(33)成立, 或当 $b_2 < 0$ 时, 波速 c 使不等式(32)成立, 则孤波解 $\vec{\phi}_{2c}$ 轨道稳定.

4.4 $2c-k^2 < 0$ 时孤波解轨道稳定的充分条件

4.4.1 对于 $\vec{\phi}_{1c}$

当 $b_2 > 0$ 时, 因此时式(30)中 $-3M_1(2c-k^2) > 0$, 为使 $d''_1(c) > 0$, 只需考虑取 $M_1 = 0$ 时 $d''_1(c) > 0$ 的条件. 易知当 c 满足式(32)时, $d''_1(c) > 0$, 从而孤波解 $\vec{\phi}_{1c}$ 轨道稳定.

4.4.2 对于 $\vec{\phi}_{2c}$

当 $b_2 < 0$ 时, 因此时式(31)中 $3M_2(2c-k^2) > 0$, 为保证 $d''_2(c) > 0$, 只需考虑取 $M_2 = 0$ 时

$d''_2(c) > 0$ 的条件. 易知此时只需取 c 满足式(33), $d''_2(c) > 0$ 即成立, 从而孤波解 $\vec{\phi}_{2c}$ 轨道稳定.

综上可得定理 4.

定理 4 设 $b_3 > 0, c > 1, c \in \left(\frac{b_2^2}{9b_3}, +\infty\right)$, 且 c

还使不等式(33)成立, 则当 $b_2 > 0$ 时, 孤波解 $\vec{\phi}_{1c}$ 轨道稳定; 当 $b_2 < 0$ 时, 孤波解 $\vec{\phi}_{2c}$ 轨道稳定.

5 结束语

研究了具两个非线性项的广义对称正则长波方程(1)孤波解的轨道稳定性. 应用文献[10-11]中提出的轨道稳定性理论, 经过方程解的局部存在性证明、有界态存在的证明以及算子 H_c 的谱分析与计算, 给出了判别方程(1)孤波解轨道稳定的一般性定理. 利用所求方程(1)的两个精确孤波解 $(\varphi_i, \psi_i)^T$, $i = 1, 2$, 给出了判断它们轨道稳定的判别式 $d''_i(c)$ 的显式表达式. 进一步利用分析方法导出了较为容易判别这两个孤波解 $(\varphi_i, \psi_i)^T$ 轨道稳定的充分条件——定理 3 和定理 4.

参考文献:

- [1] SEYLER C E, FENSTERMACHER D L. A symmetric regularized-long-wave equation [J]. Phys Fluids, 1984, 27(1): 4-7.
- [2] BOGOLUBSKY L L. Some examples of inelastic soliton interaction[J]. Comp Phys Comm, 1977, 13: 149-157.

- [3] GUO Bo-ling. The spectral method for symmetric regularized wave equation[J]. J Comp Math, 1987, 5(4): 297-306.
- [4] GUO Bo-ling. The existence of global solution and “blow up” phenomenon for the system of multi-dimensional symmetric regularized wave equations [J]. Acta Math Appl Sinica, 1992, 8(1): 59-72.
- [5] 郑家栋, 张汝芬, 郭本瑜. SRLW 方程的 Fourier 拟谱方法[J]. 应用数学与力学, 1989, 10(9): 801-810.
- [6] ZHANG Wei-guo. Explicit exact solitary wave solutions for generalized symmetric regularized long-wave equations with high-order nonlinear terms [J]. Chin Phys Soc, 2003, 12(2): 144-148.
- [7] LIN Chen. Stability and instability of solitary waves for generalized symmetric regularized-long-wave equations [J]. Physica D, 1988, 118: 53-68.
- [8] 李延保, 秦国强, 王在华. 有界线性算子半群应用基础 [M]. 沈阳: 辽宁科学技术出版社, 1992.
- [9] PAZY A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations [M]. New York: Springer, 1983.
- [10] GRILLAKIS M, SHATAH J, STRAUSS W. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I [J]. J Funct Anal, 1987, 74: 160-179.
- [11] GRILLAKIS M, SHATAH J, STRAUSS W. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry II [J]. J Funct Anal, 1987, 94: 308-348.

• 下期发表论文摘要预告 •

Supernetworks: The Science of Complexity

Anna Nagurney

(Department of Finance and Operations Management, Isenberg School of Management,
University of Massachusetts, Amherst, Massachusetts 01003, United States)

This paper provides an overview of the science of supernetworks, highlighting some of the major achievements in terms of theory, methodology, and applications. The goal is to demonstrate the depth and breadth of contributions to the modeling, analysis, and solution of complex networks that underly our modern economies and societies. Some promising areas for future research are also identified.