

文章编号:1007-6735(2011)02-0179-05

二阶脉冲微分方程组四点边值问题非负解的存在性

卢振花, 刘锡平, 沈 立
(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 运用 Leggett-Williams 不动点定理, 研究了二阶脉冲微分方程组四点边值问题非负解的存在性, 得到了边值问题 3 个非负解存在的充分条件.

关键词: 脉冲微分方程组; 四点边值问题; 非负解; 不动点定理

中图分类号: O 175.8 **文献标志码:** A

Existence of nonnegative solutions of four-point boundary value problem for second-order system of impulsive differential equations

LU Zhen-hua, LIU Xi-ping, SHEN Li
(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: Based on Leggett-Williams fixed-point theorem, the existence of nonnegative solutions of four-point boundary value problem for second-order system of impulsive differential equations was studied. The sufficient conditions for the existence of three nonnegative solutions of the boundary value problem were presented.

Key words: system of impulsive differential equations; four-points boundary value problem; nonnegative solutions; fixed-point theorem

1 问题的提出

微分方程组理论是研究高阶微分方程相关问题的重要基础, 近年来, 常微分方程组的理论研究受到

了国内外学者的广泛关注^[1-3]. 文献[2]利用 Leggett-Williams 不动点定理研究了一类二阶微分方程组两点边值问题解的存在性, 得到了非负解存在的充分条件. 众所周知, 脉冲微分方程在电子工程和生物工程等领域有着广泛的应用背景, 国内外学者对脉冲微分

收稿日期: 2010-03-01

基金项目: 上海市教育委员会科研创新项目(10ZZ93)

作者简介: 卢振花(1983—), 女, 硕士研究生. 研究方向: 微分方程理论及应用. E-mail: ehuanglu@163.com
刘锡平(联系人), 男, 教授. 研究方向: 微分方程理论及应用. E-mail: xipingliu@usst.edu.cn

方程边值问题进行了大量研究^[4-5]. 文献[4]利用 Leggett-Williams 不动点定理研究了一类二阶脉冲微分方程三点边值问题非负解的存在性. 文献[5]研究了一类二阶脉冲微分方程积分边值问题的存在性和唯一性.

本文研究二阶脉冲微分方程组四点边值问题

$$\left. \begin{aligned} x''_i(t) + f_i(t, x_1(t), x_2(t)) &= 0, \\ t &\in (0, 1) \setminus \{t_1, t_2, \dots, t_m\} \\ \Delta x_i|_{t=t_k} &= I_{ik}(x_1(t_k), x_2(t_k)), \\ k &= 1, 2, \dots, m \\ \Delta x'_i|_{t=t_k} &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \\ x_i(0) &= a_i x_i(\xi_i), \quad x'_i(1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

非负解的存在性. 其中, $f_i \in C([0, 1] \times R_+ \times R_+, R_+)$, $I_{ik} \in C(R_+ \times R_+, R_+)$, $R_+ = [0, +\infty)$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < 1$, $0 < a_1, a_2 < 1$, $0 < \xi_1, \xi_2 < 1$, $\Delta x_i|_{t=t_k} = x_i(t_k^+) - x_i(t_k^-)$, $x_i(t_k^-)$, $x_i(t_k^+)$ 分别为 $x_i(t)$ 在 $t = t_k$ 处的左、右极限, $\Delta x'_i|_{t=t_k} = x'_i(t_k^+) - x'_i(t_k^-)$, 关于 $x'_i(t)$ 有类似的定义, $i = 1, 2$.

令 $J = [0, 1]$, $J' = J \setminus \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$, $PC[J, R] = \{x : J \rightarrow R : x(t) \text{ 在 } t \neq t_k \text{ 连续, } x(t_k^-), x(t_k^+) \text{ 均存在, 且满足 } x(t_k) = x(t_k^-), k = 1, 2, \dots, m\}$.

设 $E = PC(J, R)$, $\|x\|_0 = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t)|$, 则 $(E, \|\cdot\|_0)$ 是 Banach 空间. 设 $X = E \times E$, 并取范数 $\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\|_0 + \|x_2\|_0$, 则 $(X, \|\cdot\|)$ 为 Banach 空间.

2 预备知识

引理 1 设 $y \in C(J)$, $0 < a < 1$, 则脉冲微分方程边值问题

$$\left. \begin{aligned} -x''(t) &= y(t), \quad t \in (0, 1) \setminus \{t_1, t_2, \dots, t_m\} \\ \Delta x|_{t=t_k} &= I_k(x(t_k)), \quad k = 1, 2, \dots, m \\ \Delta x'|_{t=t_k} &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \\ x(0) &= ax(\xi), \quad x'(1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

的解 $x(t)$ 当且仅当满足积分方程

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) y(s) ds + \frac{a}{1-a} \sum_{0 < t_k < \xi} I_k(x(t_k)) + \sum_{0 < t_k < t} I_k(x(t_k)), \quad t \in J$$

其中

$$G(t, s) = \frac{1}{1-a} \begin{cases} s, & s < \xi, s < t \\ as + t(1-a), & t \leq s \leq \xi \\ a\xi + s(1-a), & \xi \leq s \leq t \\ a\xi + t(1-a), & t < s, \xi < s \end{cases}$$

证明 假设 $x(t)$ 是方程(2)的解, 则存在 $\xi_k \in (t_k - h, t_k)$, 使得

$$x(t_k) - x(t_k - h) = x'(\xi_k)h$$

其中, $0 < h < t_k - t_{k-1}$.

由于 $\Delta x'|_{t=t_k} = x'(t_k^+) - x'(t_k^-) = 0$, 那么左导数 $x'_-(t_k)$ 存在, 即

$$x'_-(t_k) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{x(t_k) - x(t_k - h)}{h} = \lim_{\xi_k \rightarrow t_k^-} x'(\xi_k) = x'(t_k^-)$$

设 $x'(t_k) = x'(t_k^-)$, $k = 1, 2, \dots, m$. 易得对任意 $t \in J$, 有

$$x(t) = x(0) + x'(0)t -$$

$$\int_0^t (t-s)y(s)ds + \sum_{0 < t_k < t} I_k(x(t_k))$$

结合边界条件 $x(0) = ax(\xi)$, $x'(1) = 0$, 可得

$$x'(0) = \int_0^1 y(s)ds$$

$$x(0) = \frac{a}{1-a} \left[\xi \int_0^1 y(s)ds - \int_0^\xi (\xi-s)y(s)ds + \sum_{0 < t_k < \xi} I_k(x(t_k)) \right]$$

于是

$$x(t) = \frac{a\xi}{1-a} \int_0^1 y(s)ds - \frac{a}{1-a} \int_0^\xi (\xi-s)y(s)ds +$$

$$t \int_0^1 y(s)ds - \int_0^t (t-s)y(s)ds +$$

$$\frac{a}{1-a} \sum_{0 < t_k < \xi} I_k(x(t_k)) + \sum_{0 < t_k < t} I_k(x(t_k))$$

当 $t \leq \xi$ 时

$$x(t) = \int_0^t \frac{s}{1-a} y(s)ds + \int_t^\xi \frac{1}{1-a} \cdot$$

$$[as + t(1-a)]y(s)ds + \int_\xi^1 \frac{a\xi + t(1-a)}{1-a} \cdot$$

$$y(s)ds + \frac{a}{1-a} \sum_{0 < t_k < \xi} I_k(x(t_k)) + \sum_{0 < t_k < t} I_k(x(t_k))$$

当 $t \geq \xi$ 时

$$x(t) = \int_0^\xi \frac{s}{1-a} y(s)ds + \int_\xi^t \frac{1}{1-a} \cdot$$

$$[a\xi + s(1-a)]y(s)ds + \int_t^1 \frac{1}{1-a} \cdot$$

$$[a\xi + t(1-a)]y(s)ds + \frac{a}{1-a} \cdot$$

$$\sum_{0 < t_k < \xi} I_k(x(t_k)) + \sum_{0 < t_k < t} I_k(x(t_k))$$

那么任意 $t \in J$, 有

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) y(s) ds + \frac{a}{1-a} \cdot \sum_{0 < t_k < \xi} I_k(x(t_k)) + \sum_{0 < t_k < t} I_k(x(t_k))$$

另一方面, 若 $x \in PC[J, R]$ 是积分方程的解, 那么很容易得到 $x \in PC[J, R] \cap C^2[J', R]$ 是边值问题(2)的解. 证毕.

定义算子 $T_1, T_2 : X \rightarrow E$.

$$T_i(x_1, x_2) = \int_0^1 G_i(t, s) f_i(s, x_1(s), x_2(s)) ds + \frac{a_i}{1-a_i} \sum_{0 < t_k < \xi_i} I_{ik}(x_1(t_k), x_2(t_k)) + \sum_{0 < t_k < t} I_{ik}(x_1(t_k), x_2(t_k)), \quad i = 1, 2$$

其中

$$G_i(t, s) = \frac{1}{1-a_i} \begin{cases} s, & s < \xi_i, s < t \\ a_i s + t(1-a_i), & t \leq s \leq \xi_i \\ a_i \xi_i + s(1-a_i), & \xi_i \leq s \leq t \\ a_i \xi_i + t(1-a_i), & t < s, \xi_i \leq s \end{cases}$$

根据 $G_i(t, s)$ 的定义, 不难证明 $G_i(t, s)$ 具有下面引理 2 的性质.

引理 2 函数 $G_i(t, s) \in C([0, 1] \times [0, 1])$, $i = 1, 2$, 并且

$$\text{a. } 0 \leq G_i(t, s) \leq \frac{s}{1-a_i}, t, s \in [0, 1];$$

$$\text{b. } G_i(t, s) \geq \frac{a_i}{1-a_i} \min\{s, \xi_i\}, t \in [0, 1], \text{ 特殊地, 当 } \max\{t_m, \xi_1, \xi_2\} < \delta < 1 \text{ 时, } G_i(\delta, s) \geq \frac{a_i}{1-a_i} \min\{s, \xi_i\}, s \in [0, 1];$$

$$\text{c. } 0 \leq \frac{\partial G_i(t, s)}{\partial t} \leq 1, t, s \in [0, 1].$$

现给出 Leggett-Williams 不动点定理.

设常数 $d, L, r > 0$, 记

$$K_d = \{x \in K : \|x\| < d\}$$

$$K(w, L, r) = \{x \in K : w(x) \geq L, \|x\| < r\}$$

引理 3^[6] 设 E 是一个 Banach 空间, $K \subset X$ 是 X 上的锥, $c > 0$, c 为常数, 若存在 K 上的非负连续凹泛函 w , 对任意 $x \in \bar{K}_c$ 有 $w(x) \leq \|x\|$, 并设 $T : \bar{K}_c \rightarrow \bar{K}_c$ 是全连续算子, 如果存在常数 r, L 和 d 满足 $0 < r < L < d \leq c$, 使得下列条件成立:

a. $\{x \in K(w, L, d) : w(x) > L\} \neq \emptyset$, 并且对任意 $x \in K(w, L, d)$, 有 $w(Tx) > L$;

b. 对任意 $x \in \bar{K}_r$, 有 $\|Tx\| < r$ 成立;

c. 对任意 $x \in K(w, L, c)$, 当 $\|Tx\| > d$ 时, 有 $w(Tx) > L$.

则 T 在 $\bar{K}_c$ 上至少有 3 个不动点 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 \in K_r$, $x_2 \in \{x \in K(w, L, c) : w(x) > L\}$, $x_3 \in \bar{K}_c \setminus (K(w, L, c) \cup \bar{K}_r)$.

3 主要结论及其证明

令 $K = \{(x_1, x_2) \in X : x_i(t) \geq 0, t \in [0, 1], i = 1, 2\}$, 则 K 为 X 上的锥. 定义

$$w(x) = \min_{t \in [\delta, 1]} x_1(t) + \min_{t \in [\delta, 1]} x_2(t)$$

其中, $1 > \delta > \max\{t_m, \xi_1, \xi_2\}$, $x \in K$. 那么易得 w 是 K 上的非负连续凹泛函.

记 $D = [0, 1] \times [0, +\infty) \times [0, +\infty)$, $a_0 = \min\{a_1, a_2\}$, $\xi_0 = \min\{\xi_1, \xi_2\}$.

定理 1 若存在正常数 $r, L, d, c, \lambda_i, \lambda'_i, \mu_i, \mu'_i$, $i = 1, 2$, 满足 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda'_1 + \lambda'_2 = 1, \mu'_1 + \mu'_2 = 1, r < L < \frac{L}{a_0 \xi_0} < d, c \geq \max\left\{d, \frac{L}{a_0 \xi_0 (1-\delta)}\right\}$, 并且下列条件成立:

a. 对任意 $(t, u, v) \in \{(t, u, v) \in D : u + v \leq c\}$, 有 $0 \leq f_i(t, u, v) \leq c(1-a_i)\lambda_i$, $\max_{u+v \in [0, c]} I_{ik}(u, v) \leq \frac{\lambda'_i c(1-a_i)}{2m}, k = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2$;

b. 对任意 $(t, u, v) \in \{(t, u, v) \in D : u + v \leq r\}$, 有 $0 \leq f_i(t, u, v) < r(1-a_i)\mu_i$, $\max_{u+v \in [0, r]} I_{ik}(u, v) < \frac{\mu'_i r(1-a_i)}{2m}, k = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2$;

c. 对任意 $(t, u, v) \in \{(t, u, v) \in D : L \leq u + v \leq d, t \in [\delta, 1]\}$, 有 $f_i(t, u, v) > \frac{L\lambda_i(1-a_i)}{a_i \xi_0 (1-\delta)}, i = 1, 2$.

则边值问题(1)至少存在 3 个非负解, $x^* = (x_1^*(t), x_2^*(t)), y^* = (y_1^*(t), y_2^*(t)), z^* = (z_1^*(t), z_2^*(t))$, 且满足

$$\sup_{t \in [0, 1]} |x_1^*(t)| + \sup_{t \in [0, 1]} |x_2^*(t)| \leq r$$

$$L < \min_{t \in [\delta, 1]} |y_1^*(t)| + \min_{t \in [\delta, 1]} |y_2^*(t)|$$

且

$$\sup_{t \in [0, 1]} |y_1^*(t)| + \sup_{t \in [0, 1]} |y_2^*(t)| \leq c$$

$$\min_{t \in [\delta, 1]} |z_1^*(t)| + \min_{t \in [\delta, 1]} |z_2^*(t)| < L$$

且

$$r < \sup_{t \in [0,1]} |z_1^*(t)| + \sup_{t \in [0,1]} |z_2^*(t)|$$

证明 设 $T: X \rightarrow X, T(x_1, x_2) = (T_1(x_1, x_2), T_2(x_1, x_2))$. 首先证明算子 $T: \bar{K}_c \rightarrow \bar{K}_c$ 是全连续算子.

任意 $x = (x_1, x_2) \in K$, 由算子定义易得 $(T_i x)(t) \geq 0, t \in [0, 1]$, 即 $Tx \in K$, 则 $T(K) \subset K$.

任意 $x = (x_1, x_2) \in \bar{K}_c$, 因为 $\|x\| = \|x_1\|_0 + \|x_2\|_0 \leq c$, 那么 $x_1(t) + x_2(t) \leq c, t \in [0, 1]$, 由引理 2 及定理 1 的条件 a, 可得

$$\begin{aligned} (T_1 x)(t) &= \int_0^1 G_1(t, s) f_1(s, x_1(s), x_2(s)) ds + \\ &\quad \frac{a_1}{1 - a_1} \sum_{0 < t_k < \xi} I_{1k}(x_1(t_k), x_2(t_k)) + \\ &\quad \sum_{0 < t_k < t} I_{1k}(x_1(t_k), x_2(t_k)) \leq \\ &\quad \frac{1}{1 - a_1} \int_0^1 s f_1(t, x_1(s), x_2(s)) ds + \\ &\quad \frac{m}{1 - a_1} \frac{\lambda'_1 c(1 - a_1)}{2m} = \frac{1}{2(1 - a_1)} c(1 - a_1) \lambda_1 + \\ &\quad \frac{m}{1 - a_1} \frac{\lambda'_1 c(1 - a_1)}{2m} = \frac{c}{2} (\lambda_1 + \lambda'_1) \end{aligned}$$

则对任意 $t \in [0, 1]$, 得 $(T_1 x)(t) \leq \frac{c}{2} (\lambda_1 + \lambda'_1)$. 同理,

对任意 $t \in [0, 1]$, 可证得 $(T_2 x)(t) \leq \frac{c}{2} (\lambda_2 + \lambda'_2)$.

那么

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \|T_1 x\|_0 + \|T_2 x\|_0 = \\ &\quad \sup_{t \in [0,1]} |(T_1 x)(t)| + \sup_{t \in [0,1]} |(T_2 x)(t)| \leq \\ &\quad \frac{c}{2} (\lambda_1 + \lambda'_1) + \frac{c}{2} (\lambda_2 + \lambda'_2) \end{aligned}$$

由于定理限定条件 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda'_1 + \lambda'_2 = 1$, 则

对任意 $x = (x_1, x_2) \in \bar{K}_c$, 有

$$\|Tx\| = \|T_1 x\|_0 + \|T_2 x\|_0 \leq c$$

即 $Tx \in \bar{K}_c$. 所以, $T: \bar{K}_c \rightarrow \bar{K}_c$

由于 $(T_i x)'(t) = \int_0^1 \frac{\partial G_i(t, s)}{\partial t} f_i(s, x_1(s), x_2(s)) ds, t \in J, t \neq t_k, i = 1, 2$, 又由引理 2 知, $0 \leq \frac{\partial G_i(t, s)}{\partial t} \leq 1$, 则对 $\bar{K}_c$ 中的任意有界集 S , 可得

$T(S)$ 中的任意函数在每个 $J_k (k = 0, 1, 2, \dots, m)$ 上都是等度连续的. 由 Arzela-Ascoli 定理, 可得 $T: \bar{K}_c \rightarrow \bar{K}_c$ 是全连续算子.

现证明 T 满足引理 3 的条件.

类似于上面的证明过程, 由定理 1 的条件 b 可得, 对任意 $x = (x_1, x_2) \in \bar{K}_r$, 有 $\|Tx\| < r$. 即引理 3 的条件 b 满足.

显然, 对任意 $x \in \bar{K}_c$ 有 $w(x) = \min_{t \in [\delta, 1]} x_1(t) + \min_{t \in [\delta, 1]} x_2(t) \leq \|x\|$. 取 $y_0 = \left(\frac{u_1 L}{a_1 \xi_0}, \frac{u_2 L}{a_2 \xi_0}\right)$, 其中, $u_1, u_2 \geq 0$ 为常数, 且 $u_1 + u_2 = 1$. 则

$$\begin{aligned} \|y_0\| &= \frac{u_1 L}{a_1 \xi_0} + \frac{u_2 L}{a_2 \xi_0} \leq \frac{u_1 L}{a_0 \xi_0} + \\ &\quad \frac{u_2 L}{a_0 \xi_0} = \frac{(u_1 + u_2) L}{a_0 \xi_0} = \frac{L}{a_0 \xi_0} < d \end{aligned}$$

注意到 $0 < a_1, a_2 < 1, 0 < \xi_0 < 1$, 则 $0 < \max\{a_1, a_2\} \xi_0 < 1$, 于是, 有

$$\begin{aligned} w(y_0) &= \frac{u_1 L}{a_1 \xi_0} + \frac{u_2 L}{a_2 \xi_0} \geq \frac{u_1 L}{\max\{a_1, a_2\} \xi_0} + \\ &\quad \frac{u_2 L}{\max\{a_1, a_2\} \xi_0} = \frac{L}{\max\{a_1, a_2\} \xi_0} > L \end{aligned}$$

即 $y_0 \in \{x \in K(w, L, d) : w(x) > L\} \neq \emptyset$.

对任意 $x = (x_1, x_2) \in K(w, L, d)$ 有 $w(x) \geq L, \|x\| \leq d$, 即 $L \leq x_1(t) + x_2(t) \leq d, t \in [\delta, 1]$

因为 $f_i(s, x_1(s), x_2(s)), \frac{\partial G_i(t, s)}{\partial t} \geq 0$, 所以

$$(T_i x)'(t) = \int_0^1 \frac{\partial G_i(t, s)}{\partial t} f_i(s, x_1(s), x_2(s)) ds \geq 0$$

则

$$\begin{aligned} \min_{t \in [\delta, 1]} (T_1 x)(t) &= (T_1 x)(\delta) = \\ &\quad \int_0^1 G_1(\delta, s) f_1(s, x_1(s), x_2(s)) ds + \\ &\quad \frac{a_1}{1 - a_1} \sum_{0 < t_k < \xi_1} I_{1k}(x_1(t_k), x_2(t_k)) + \\ &\quad \sum_{0 < t_k < \delta} I_{1k}(x_1(t_k), x_2(t_k)) \geq \\ &\quad \int_\delta^1 G_1(\delta, s) f_1(s, x_1(s), x_2(s)) ds \end{aligned}$$

由引理 2 知, $G_1(t, s) \geq \frac{a_1}{1 - a_1} \min\{s, \xi_1\}, t \in [0, 1]$, 于是

$$\begin{aligned} \int_\delta^1 G_1(\delta, s) f_1(s, x_1(s), x_2(s)) ds &\geq \\ &\quad \frac{a_1}{1 - a_1} \xi_0 \int_\delta^1 f_1(s, x_1(s), x_2(s)) ds \end{aligned}$$

由定理 1 的条件 c, 有

$$\int_\delta^1 G_1(\delta, s) f(s, x_1(s), x_2(s)) ds >$$

$$\frac{a_1}{1-a_1} \xi_0 \int_{\delta}^1 \frac{\lambda_1 L(1-a_1)}{a_1 \xi_0 (1-\delta)} ds = L \lambda_1$$

即 $\min_{t \in [\delta, 1]} (T_1 x)(t) > \lambda_1 L$.

同理, $\min_{t \in [\delta, 1]} (T_2 x)(t) > \lambda_2 L$. 于是, 有 $w(Tx) > L$, 即引理3的条件a满足.

由引理2, 任意 $x = (x_1, x_2) \in K(w, L, d)$ 且 $\|Tx\| > d$ 时

$$\begin{aligned} \min_{t \in [\delta, 1]} (T_1 x)(t) &= \int_0^1 G_1(\delta, s) f_1(s, x_1(s), x_2(s)) ds + \\ &\frac{a_1}{1-a_1} \sum_{0 < t_k < \xi_1} I_{1k}(x_1(t_k), x_2(t_k)) + \\ &\sum_{0 < t_k < \delta} I_{1k}(x_1(t_k), x_2(t_k)) \geq \frac{a_1}{1-a_1} \cdot \\ &\int_0^1 \xi_0 s f_1(s, x_1(s), x_2(s)) ds + \frac{a_1}{1-a_1} \cdot \\ &\sum_{0 < t_k < \xi_1} I_{1k}(x_1(t_k), x_2(t_k)) + \\ &\sum_{0 < t_k < \delta} I_{1k}(x_1(t_k), x_2(t_k)) \geq \\ &a_1 \xi_0 \sup_{t \in [0, 1]} \int_0^1 G_1(t, s) f_1(s, x_1(s), x_2(s)) ds + \\ &\frac{a_1}{1-a_1} \sum_{0 < t_k < \xi_1} I_{1k}(x_1(t_k), x_2(t_k)) + \\ &\sum_{0 < t_k < t} I_{1k}(x_1(t_k), x_2(t_k)) = a_1 \xi_0 \|T_1 x\|_0 \end{aligned}$$

故 $\min_{t \in [\delta, 1]} (T_1 x)(t) \geq a_1 \xi_0 \|T_1 x\|_0$. 同理, 有 $\min_{t \in [\delta, 1]} |(T_2 x)(t)| \geq a_2 \xi_0 \|T_2 x\|_0$, 于是 $w(Tx) \geq a_1 \xi_0 \|T_1 x\|_0 + a_2 \xi_0 \|T_2 x\|_0 \geq a_0 \xi_0 \|T_1 x\|_0 + a_0 \xi_0 \|T_2 x\|_0 = a_0 \xi_0 \|Tx\| > a_0 \xi_0 d > a_0 \xi_0 \frac{L}{a_0 \xi_0} = L$

因此, 任意 $x \in K(w, L, d)$ 且 $\|Tx\| > d$ 时, 有

$w(Tx) > L$. 则引理3的条件c满足.

综上, 根据引理3可得 T 在 $\bar{K}_c$ 上至少有3个不动点 x^*, y^*, z^* , 满足

$x^* \in K_r, y^* \in \{y^* \in K(w, L, c) : w(y^*) > L\}, z^* \in \bar{K}_c \setminus (K(w, L, c) \cup \bar{K}_r)$.

于是, 边值问题(1)至少存在3个非负解 $x^* = (x_1^*(t), x_2^*(t)), y^* = (y_1^*(t), y_2^*(t)), z^* = (z_1^*(t), z_2^*(t))$, 且满足定理结论. 证毕.

参考文献:

- [1] AGARWAL R P, O'REGAN D. A coupled system of differential equations[J]. Math Comput, 2000, 114(1): 39-49.
- [2] AGARWAL R P, O'REGAN D. A multiplicity result for second order impulsive differential equations via the Leggett Williams fixed point theorem[J]. Appl Math Comput, 2005, 161(2): 433-439.
- [3] 席守亮, 贾梅, 纪慧鹏. 二阶常微分方程组边值问题正解的存在性[J]. 上海理工大学学报, 2009, 31(4): 318-321.
- [4] JIA Mei, LIU Xi-ping. Three nonnegative solutions of three-point boundary value problem for second-order impulsive differential equations [J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 2008, 28(3): 567-574.
- [5] JIA Mei, LIU Xi-ping. Existence of solutions for second-order impulsive differential equations with integral boundary conditions[C]//Proceedings of the 7th Conference on Biological Dynamic System and Stability of Differential Equation. Liverpool: World Academic Press, 2009: 2880-2886.
- [6] GUO Da-jun, LAKSHMILKANTHAM V. Nonlinear Problems in Abstract Cones [M]. San Diego: Academic Press, 1988.