

文章编号:1007-6735(2011)02-0198-07

一种广义富足半群

高振林, 田 丽

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 在半群 S 上引进新的 Green $*$ -关系 $\mathcal{L}_G^*$ 和 $\mathcal{R}_G^*$, 它们虽不同于 Green $*$ -关系 $\mathcal{L}^*$ 和 $\mathcal{R}^*$, 但与之有联系, 且有 $\mathcal{L}^* \subseteq \mathcal{L}_G^*$, $\mathcal{R}^* \subseteq \mathcal{R}_G^*$. 引进另一种广义富足(或充足)半群即 G -富足(或充足)半群, 在 G -富足半群上, 引进 G -充足断面. 给出了有 G -充足断面的 G -富足半群的性质和结构.

关键词: G -富足半群; G -充足断面; G -Green $*$ -关系

中图分类号: O 152.7 **文献标志码:** A

On generalized abundant semigroups

GAO Zhen-lin, TIAN Li

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: New Green's $*$ -relations $\mathcal{L}_G^*$ and $\mathcal{R}_G^*$ were introduced on a semigroup S . Though they are different from the old Green's $*$ -relations $\mathcal{L}^*$ and $\mathcal{R}^*$, yet are related to each other by Green's relation on some over semigroups and it holds that $\mathcal{L}^* \subseteq \mathcal{L}_G^*$ and $\mathcal{R}^* \subseteq \mathcal{R}_G^*$. Another class of semigroups, the G -abundant (or adequate) semigroups and their G -adequate transversals were defined and the properties and structures of G -abundant semigroups with some G -adequate transversals were discussed.

Key words: G -abundant semigroup; G -adequate transversal; G -Green $*$ -relation

1 预备知识

在半群 S 上, 对 $a, b \in S$, Green $*$ -关系 $\mathcal{R}^*$ 和 $\mathcal{L}^*$ 定义见文献[1].

$a\mathcal{R}^*b$ 当且仅当 $x, y \in S^1, [xa = ya \Leftrightarrow xb = yb]$;

$a\mathcal{L}^*b$ 当且仅当 $x, y \in S^1, [ax = ay \Leftrightarrow bx = by]$.

它们满足 $\mathcal{R}^*|_{\text{Re } g(S)} = \mathcal{R}|_{\text{Re } g(S)}$ 且 $\mathcal{L}^*|_{\text{Re } g(S)} = \mathcal{L}|_{\text{Re } g(S)}$, 其中, $\text{Re } g(S)$ 为 S 的正则元集, 且 $\mathcal{R}^*$ (或

$\mathcal{L}^*$) 为 S 上的左(或右)同余.

现通过定义 1 和引理 1 引进关系 $\bar{\mathcal{R}}^*$ 和 $\bar{\mathcal{L}}^*$.

定义 1 设 S 为半群, 对 $a, b \in S$

$a\bar{\mathcal{R}}^*b$ 当且仅当 $x, y \in S^1, [L(xa) \subseteq L(ya) \Leftrightarrow L(xb) \subseteq L(yb)]$;

$a\bar{\mathcal{L}}^*b$ 当且仅当 $x, y \in S^1, [R(ax) \subseteq R(ay) \Leftrightarrow R(bx) \subseteq R(by)]$.

其中, $R(z) = zS^1, L(z) = S^1z, z \in S$.

引理 1 对半群 S 上的关系 $\bar{\mathcal{R}}^*$ 和 $\bar{\mathcal{L}}^*$ 有以下结

收稿日期: 2010-06-03

作者简介: 高振林(1949—), 男, 教授. 研究方向: (序)半群理论. E-mail: zlgao@sina.com

论:

- a. $\bar{\mathcal{R}}^*$ (或 $\bar{\mathcal{L}}^*$) 是左(或右)同余.
- b. $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}^* \subseteq \bar{\mathcal{R}}^*$, 且 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^* \subseteq \bar{\mathcal{L}}^*$.
- c. $(\forall a \in S, e \in E(S)) e \bar{\mathcal{R}}^* a \Rightarrow ea \mathcal{L} a$.

证明 根据定义可以看出, $\bar{\mathcal{R}}^*$ 与 $\bar{\mathcal{L}}^*$ 是左、右对偶的, 因此, 对于结论 a 和结论 b 只需对 $\bar{\mathcal{R}}^*$ 进行证明.

a. 易证 $\bar{\mathcal{R}}^*$ 是 S 上的一个等价关系. 设 $a \bar{\mathcal{R}}^* b$, $\forall c \in S$, 则 $L(xa) \subseteq L(ya)$ 当且仅当 $L(xb) \subseteq L(yb)$, 对 $x, y \in S^1$ 成立. 于是, 对 $xc, yc \in S^1$ 也有 $L(xca) \subseteq L(yca)$ 当且仅当 $L(xcb) \subseteq L(ycb)$, 即 $ca \bar{\mathcal{R}}^* cb$.

b. 需证 $\mathcal{R}^* \subseteq \bar{\mathcal{R}}^*$. 令 $a \mathcal{R}^* b$, 若 $L(xa) \subseteq L(ya)$, $\forall x, y \in S^1$, 则存在 $u \in S^1$ 使得 $xa = uya = (uy)a$; 因 $a \mathcal{R}^* b$, 故 $xb = (uy)b = uyb$, 从而 $L(xb) \subseteq L(yb) \subseteq L(yb)x$, $y \in S^1$, 同样方法可推出 $L(xa) \subseteq L(ya)$. 因此, $a \bar{\mathcal{R}}^* b$, 即 $\mathcal{R}^* \subseteq \bar{\mathcal{R}}^*$.

c. 结论 c 显然成立.

现举例说明存在半群 S 使得 $\bar{\mathcal{L}}^* \mid_{\text{Re } g(S)} \neq \mathcal{L} \mid_{\text{Re } g(S)}$. 记 $(a)_\sigma$ 表示包含 a 的 σ -等价类.

例 1 半群 S 的 Cayley 表为

	a	b	c	d
a	a	b	a	a
b	a	b	a	b
c	a	b	a	a
d	a	b	c	d

由定义 1 经过计算得到 S 上的部分 $\mathcal{L}$ -类和 $\bar{\mathcal{L}}^*$ -类为

$$(a)_{\bar{\mathcal{L}}^*} = \{a, b, c\}, (a)_{\mathcal{L}} = \{a\}, (b)_{\mathcal{L}} = \{b\}$$

那么, 对于 $a, b \in \text{Re } g(S)$, 能够得出 $a \bar{\mathcal{L}}^* b$, 但是, a 与 b 并没有关系 $\mathcal{L}$ 成立. 因此 $\bar{\mathcal{L}}^* \mid_{\text{Re } g(S)} \neq \mathcal{L} \mid_{\text{Re } g(S)}$.

定义 2 若 $\bar{\mathcal{L}}^*$ 和 $\bar{\mathcal{R}}^*$ 满足 $\bar{\mathcal{L}}^* \mid_{\text{Re } g(S)} = \mathcal{L}^* \mid_{\text{Re } g(S)}$ 和 $\bar{\mathcal{R}}^* \mid_{\text{Re } g(S)} = \mathcal{R}^* \mid_{\text{Re } g(S)}$, 则称 $\bar{\mathcal{L}}^*$ 和 $\bar{\mathcal{R}}^*$ 为广义的 (或 G -)Green $*$ -关系, 记为 $\mathcal{L}_G^*$ 和 $\mathcal{R}_G^*$.

对于 $\mathcal{L}_G^*$ 和 $\mathcal{R}_G^*$, 根据引理 1, 易得出命题 1.

命题 1 a. 在 S 上 $\mathcal{L}_G^*$ (或 $\mathcal{R}_G^*$) 是右(或左)同余;

b. $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^* \subseteq \mathcal{L}_G^*$ (或 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}^* \subseteq \mathcal{R}_G^*$);

c. $\mathcal{L}_G^* \mid_{\text{Re } g(S)} = \mathcal{L}^* \mid_{\text{Re } g(S)}$ (或 $\mathcal{R}_G^* \mid_{\text{Re } g(S)} = \mathcal{R}^* \mid_{\text{Re } g(S)}$);

d. $(\forall a \in S, e \in E(S)) e \mathcal{R}_G^* a$, 则 $ea \mathcal{L} a$.

现举例说明 $\mathcal{R}_G^*$ (或 $\mathcal{L}_G^*$) 是 Green $*$ -关系 $\mathcal{R}^*$ (或 $\mathcal{L}^*$) 的真推广, 即命题 1 中 b 的包含关系, 可以是真包含关系.

例 2 半群 S 的 Cayley 表为

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	b	c	d
d	a	b	d	c

通过计算得到 $\mathcal{L}_G^* = \mathcal{L}^*$, 但是, $\mathcal{R}_G^* \subseteq \mathcal{R}^*$. 实际上在这里能够得出

$$(a)_{\mathcal{R}_G^*} = \{a\} = (a)_{\mathcal{R}^*}$$

$$(c)_{\mathcal{R}_G^*} = \{b, c, d\} \supset \{c, d\} = (c)_{\mathcal{R}^*}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^* = \{ & (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), \\ & (c, d), (d, c) \} \subseteq \mathcal{R}_G^* = \{ & (a, a), \\ & (b, b), (c, c), (d, d), (c, d), \\ & (d, c), (b, c), (b, d), (c, b), (d, b) \} \end{aligned}$$

应用 $\mathcal{R}_G^*$ 和 $\mathcal{L}_G^*$ 引进定义 3.

定义 3 半群 S 是 G -富足的, 如果 S 满足 $(x)_{\mathcal{R}_G^*} \cap E(S) \neq \emptyset$ 且 $(x)_{\mathcal{L}_G^*} \cap E(S) \neq \emptyset$, $\forall x \in S$ 其中, $(a)_\sigma$ 表示包含 a 的 σ -等价类, 称幂等元可交换的 G -富足半群是 G -充足的.

例 2 中的半群 S 还是 G -充足的, 因为 $E(S) = \{a, c\}$ 是半格.

命题 2 若 S 是一个 G -充足半群, 则

a. $(\forall a \in S) \exists 1a^+ \in (a)_{\mathcal{R}_G^*} \cap E(S)$ 且 $\exists 1a^* \in (a)_{\mathcal{L}_G^*} \cap E(S)$;

b. $\text{Re } g(S)$ 是 S 的正则子半群;

c. $(\forall a, b \in S) (ab)^+ = (ab^+)^+$ 且 $(ab)^* = (a^*b)^*$;

d. $(\forall a, b \in S) a \mathcal{R}_G^* b$, 当且仅当 $a^+ = b^+$; $a \mathcal{L}_G^* b$, 当且仅当 $a^* = b^*$;

e. $\forall a \in \text{Re } g(S) aa^* = a = a^+ a$.

证明 a. S 是 G -富足的, 设 $e, f \in (a)_{\mathcal{R}_G^*} \cap E(S)$ ($a \in S$), 则根据命题 1 得 $e \mathcal{R} f$, 故 $e = fe$, $f = ef$, 又 $E(S)$ 是半格, 故 $ef = fe$, 所以, $e = f$.

b. 根据文献[2]和定义 3, b 得证.

c. 根据 $b \mathcal{R} b^+$ 和命题 1, 则 $ab \mathcal{R}_G^* ab^+ \mathcal{R}_G^* (ab^+)^+$, 因此, 由 a 得, $(ab)^+ = (ab^+)^+$.

d. 由 a 显然成立.

e. 由命题 1 的 c 和文献[1]即可推出.

称 S 的一个子半群 T 是一个 $*$ -子半群, 如果 $(x)_{\mathcal{R}_G^*} \cap T \neq \emptyset, \forall x \in S$.

定义 4 记 S^0 为 G -富足半群 S 的一个 G -充足 $*$ -子半群, 有以下条件:

a. 对每一个 $x \in S$, 都存在幂等元 $e, f \in E(S)$ 和唯一的元素 $x^0 \in S^0$, 使得 $x = ex^0f$, 其中, $e \mathcal{L}_G^* x^{0+}, f \mathcal{R}_G^* x^{0+}$.

b. $S^0 SS^0 \subseteq S^0$.

c. $(\forall x, y \in S)((x^0xyy^0)^0 \in E(S^0))x^0xyy^0 \in E(S^0)$.

如果 S^0 满足条件 a, 则 S^0 称为 S 的一个 G -充足断面.

如果 S^0 满足条件 a 和 b, 则 S^0 称为 S 的一个拟理想 G -充足断面.

如果 S^0 满足条件 a 和 c, 则称 S^0 为 S 的一个(弱)乘 G -充足断面.

现举例说明 G -富足(或充足)半群和 G -充足断面的存在性.

由命题 1 可知, 任何正则半群均是 G -富足半群.

例 3 半群 S_1 和 S_2 满足的 Cayley 表为

S_1	a	b	c	d	e	S_2	a	b	c	d	e
a	a	a	a	e	d	a	a	a	a	d	d
b	a	b	c	e	d	b	a	b	c	d	d
c	a	c	b	e	d	c	a	c	b	d	d
d	e	d	d	a	a	d	d	d	d	a	a
e	d	e	e	a	a	e	d	e	e	a	a

通过计算可知:

a. S_1 和 S_2 不是富足的.

b. S_1 和 S_2 是 G -充足的. 在 S_1 中, 有

$$(a)_{\mathcal{L}_G^*} = (a)_{\mathcal{R}_G^*} = \{a, d, e\}$$

$$(b)_{\mathcal{L}_G^*} = (b)_{\mathcal{R}_G^*} = \{b, c\}$$

且 $E(S_1) = \{a, b\}$ 是一个半格. 在 S_2 中, $E(S_2) = \{a, b\}$ 也是一个半格, 且有

$$(a)_{\mathcal{R}_G^*} = \{a, d, e\}, (b)_{\mathcal{R}_G^*} = \{b, c\}$$

$$(a)_{\mathcal{L}_G^*} = \{a, d\}, (b)_{\mathcal{L}_G^*} = \{b, c, e\}$$

c. 对 S_1 来说, S_1 满足定义 4 的 a, 即每个元素都能够唯一地表示成以下三元乘积的形式. 因此, S_1 是它本身的一个 G -充足断面.

$$a = aaa, b = bbb, c = bc, d = ada, e = aea$$

d. S_2 不是它本身的一个 G -充足断面.

通过计算能够得出 S_2 包含一个子半群 $S_{21} = \{a, b, c, d\}$, 且 S_{21} 是它本身的一个充足断面, 但

是, S_{21} 不是 S_2 的一个 G -充足断面. 这个例子说明了一个 G -充足半群不必是自身的 G -充足断面, 这与逆半群不一样.

命题 3 S 是一个半群, 则

a. $(\forall x \in S)(x)_{\mathcal{L}_G^*} \subseteq (x)_{\mathcal{L}_G^*}^* \text{ 且 } (x)_{\mathcal{R}_G^*} \subseteq (x)_{\mathcal{R}_G^*}^*$.

b. 如果 S 是富足(或充足)的, 则 S 也是 G -富足(或充足)的, 但是, 反之则不一定成立.

c. 如果 S 是一个有充足断面 S^0 的富足半群, 则 S 也是一个有 G -充足断面 S^0 的 G -富足半群.

证明 只需证明 c. 由 b 可知, S^0 也是 G -充足的. 根据充足断面的定义, 对任意的 $x \in S$, 则有 $x^0 \in S^0, f \in (x^{0+})_{\mathcal{R}_G^*} \cap E(S)$ 且 $e \in (x^{0+})_{\mathcal{L}_G^*} \cap E(S)$ 使得 $x = ex^0f$. 于是, 由 a 可知, 存在 $x^0 \in S^0, f \in (x^{0+})_{\mathcal{R}_G^*} \cap E(S)$ 和 $e \in (x^{0+})_{\mathcal{L}_G^*} \cap E(S)$ 使得 $x = ex^0f$. 故根据定义 4 可知, 对于 G -富足半群 S , 它有一个 G -充足断面 S^0 .

由此得出结论, G -富足半群和 G -充足断面的概念是富足半群和充足断面概念的推广.

引理 2 a. 在定义 4 的条件 a 中, e 和 f 被 x 唯一确定, 将它们各自表示为 $e = e_x$ 和 $f = f_x$.

b. $a \mathcal{R}_G^* b$ 当且仅当 $e_a = e_b$; $a \mathcal{L}_G^* b$ 当且仅当 $f_a = f_b$.

c. 如果 $a \in S^0$, 则 $e_a = a^+, f_a = a^*$ 且 $a^0 = a$; 如果 $a \in E(S^0)$, 则 $a^0 = e_a = f_a = a$.

证明 a. 令 $x \in S$ 且 $a, b \in (x^{0+})_{\mathcal{R}_G^*} \cap E(S)$, 则由命题 1 的 d, $ab \mathcal{L}_a$ 且 $ba \mathcal{L}_b$. 因此, $b = a' \in V(a)$ 且 $a \mathcal{R}_G^* a'$. 从而得到 $a = bb' \mathcal{L}_a a' = b$. 故 $a = bb' = aa' = b$.

b. 假设 $a \mathcal{R}_G^* b, \forall a, b \in S$ 则 $a \mathcal{R}_G^* a^{0+}, b \mathcal{R}_G^* b^{0+}$. 由 a 有 $e_a \mathcal{R}_G^* a^{0+} \mathcal{R}_G^* b^{0+} \mathcal{R}_G^* e_b$ 从而 $e_a = e_b$; 相反地, 由 $a \mathcal{R}_G^* e_a = e_b \mathcal{R}_G^* b$ 得到 $a \mathcal{R}_G^* b$.

c. 如果 $a \in S^0$ 由唯一性容易得出 $a^0 = a$. 从而 $e_a \in E(S^0) \cap (a)_{\mathcal{L}_G^*}$. 因此, $e_a = a^{0+} = a^+$.

同理, $f_a = (a^0)^* = a^*$. 特别地, 如果 $a \in E(S^0)$, 则显然有 $a = e_a = f_a = a^0$.

由引理 2 的 a, 可以表示为两个集合

$$I = \{e_x | x \in S\}, \Lambda = \{f_x | x \in S\}$$

本文中没有给出定义的术语, 见文献[1-8].

2 S^0 和 I (或 Λ) 之间的关系

设 S 是一个有 G -充足断面 $S^0 = \{x^0 \in S | \forall x$

$\in S \exists 1x^0$ 的 G -富足半群.

引理 3 a. $(\forall e_x \in I, f_x \in \Lambda) e_x^0 = x^{0^+}$ 且 $f_x^0 = x^{0^+}$.

b. $I \cap \Lambda = E(S^0)$.

c. $I = \{e = eg \in E(S) \mid \exists 1g \in (e)_{\mathcal{L}} \cap E(S^0)\} = \{x \in S \mid x = e_x\}$.

$\Lambda = \{f = hf \in E(S) \mid \exists 1h \in (f)_{\mathcal{R}} \cap E(S^0)\} =$

$\{x \in S \mid x = f_x\}$.

d. $IE(S^0) \subseteq I; E(S^0)\Lambda \subseteq \Lambda$.

e. $(\forall e \in E(S)), e_x \in I, f_x \in \Lambda$. 如果 S^0 是一个拟理想且 $e^0 e_x \in \text{Re } g(S^0)$ (或 $f_x e^0 \in \text{Re } g(S^0)$), 则 $e^0 e_x = e^0 e_x^0$ (或 $f_x e^0 = f_x^0 e^0$).

证明 a. 因为 $e_x \mathcal{L} x^{0^+}$ 且 $e_x = e_x x^{0^+} x^{0^+}$. 由 x^0 的唯一性就有 $e_x^0 = x^{0^+}$.

b. 由引理 2 的 c, 对 $x \in E(S^0), x = x^0 = e_x = f_x \in I \cap \Lambda$; 相反地, 对 $a \in I \cap \Lambda$, 则 $a = e_x = f_y$ 对某 $x, y \in S$ 成立, 由引理 2 的 a 得 $x^{0^+} \mathcal{L} a \mathcal{R} y^{0^+}$ 和 $a = ax^{0^+} x^{0^+} = y^{0^+} y^{0^+} a$. 因此, $a = x^{0^+} = y^{0^+} \in E(S^0)$.

c. 显然, 对 $e \in I$ 有 $e = e_x \mathcal{L} x^{0^+} = g$ 使得 $e = eg$ 对一些 $x \in S$ 成立; 相反地, 如果 $e \in E(S)$ 使得 $\exists 1g \in E(S^0) \cap (e)_{\mathcal{L}}, e = eg = egg$. 则由命题 1 的 c 和定义 4 中条件 a 得 $e \in I$.

令 $x \in I$ 则有 $x = e_a, a \in S$ 成立, 所以, $x^0 = e_a^0 = a^{0^+}, x = e_a \mathcal{L} a^{0^+} = x^0$. 故 $x = xx^0 = e_x$. 反之, 显然也成立.

d. 取 $e \in I$ 和 $f \in E(S^0)$, 由 b 则 $\exists 1g \in E(S^0) \cap (e)_{\mathcal{L}}$ 因此, $ef \mathcal{L} gf$. 由定义 4 中条件 a, $(ef)^2 = egfef = efgef = efgf = egff = egf = ef \in E(S)$. 由 b 和 $ef \mathcal{L} gf \in E(S^0)$ 得 $ef \in I$.

e. 令 $e^0 \in E(S^0), e_x \in I$, 则由 $e^0 e_x \in \text{Re } g(S^0)$ 和 b 得 $f_{e^0} = e^0$. 因此, 由 $e^0 e_x = f_{e^0} e \in E(S^0)$ 和 $e_x \mathcal{L} x^{0^+} = x^0$ 得 $e^0 e_x = e^0 e_x^0$.

引理 4 令 S^0 为 S 的一个拟理想, 则

a. $E(S^0)I \subseteq S^0$ 且 $\Lambda E(S^0) \subseteq S^0$.

b. $|V(x) \cap S^0| = 1$ 对 $x \in \text{Re } g(S)$ 成立.

c. $\Lambda I \subseteq S^0$; 相反地, 若 $\Lambda I \subseteq S^0$, 则 S^0 是一个拟理想.

d. 如果 $e^0 \in E(S^0)$ 对任意 $e \in E(S)$ 成立, 则 S^0 是乘的; 反之亦然.

引理 5 如果 S^0 是乘的, 则

a. $\text{Re } g(S)$ 是一个子半群 (即 S 满足正则性条件).

b. S 是局部 G -充足半群 (即对任意的 $e \in E(S), eSe$ 是 G -充足的)^[7].

引理 4 和引理 5 的证明与富足的情况相类似, 见文献[7].

命题 4 如果 S^0 是乘的, 则下面的条件相互等价:

a. S 是拟 G -充足的 (即幂等元组成一个子半群);

b. 对 $x, y \in S, f_x e_y = x^{0^+} y^{0^+}$;

c. $x, y \in S, (xy)^0 = x^0 y^0$;

d. 对 $e, f \in E(S), (ef)^0 = e^0 f^0$.

证明 a $\Rightarrow$ b. 假设 S 是拟 G -充足的. 由引理 5, S 是本原 G -充足的, $E(S)$ 是带. 令 $x, y \in S$, 则 $f_x \mathcal{R} x^*, e_y \mathcal{L} y^+$, 因此

$$f_x e_y = x^{0^+} f_x e_y y^{0^+} = x^{0^+} f_x x^{0^+} y^{0^+} e_y y^{0^+} = x^{0^+} y^{0^+}$$

b $\Rightarrow$ c. 令 $x, y \in S$ 则 $(xy)^0 = x^0 f_x e_y y^0$. 实际上, 由 $f_x x^{0^+} = x^{0^+}, e_y y^{0^+} = y^{0^+}$, 有

$$(xy)^0 = (xy)^{0^+} (xy)^0 (xy)^{0^+} \text{ 定义 4 中的条件 a}$$

$$(xy)^{0^+} e_{xy} (xy)^0 f_{xy} (xy)^{0^+} =$$

$$(xy)^{0^+} x^{0^+} e_{xy} (xy)^0 f_{xy} y^{0^+} (xy)^{0^+} =$$

$$x^{0^+} e_{xy} (xy)^{0^+} (xy)^0 (xy)^{0^+} f_{xy} y^{0^+} =$$

$$x^{0^+} e_{xy} (xy)^0 f_{xy} y^{0^+} = x^{0^+} (xy) y^{0^+} =$$

$$x^{0^+} e_x (x^0 f_x e_x y^0) f_y y^{0^+} =$$

$$x^{0^+} x^0 f_x e_y y^0 y^{0^+} = x^0 f_x e_y y^0$$

因此, 得到

$$(xy)^0 = x^0 f_x e_y y^0 = x^0 x^{0^+} y^{0^+} y^0 = x^0 y^0$$

c $\Rightarrow$ d. 显然成立.

d $\Rightarrow$ a. 设 $x, y \in E(S)$ 经计算有 $(xy)^0 = x^0 f_x e_y y^0 = x^0 y^0$. 同样地, $y^0 x^0 = y^0 f_y e_x x^0$. 但是, $x^0 y^0 \in E(S^0)$, 因此, $(xy)^0 \in E(S^0)$, 由引理 2, $(xy)^{0^+} = x^0 y^0 = (xy)^{0^+}$, 因此

$$xy = e_{xy} (xy)^0 f_{xy} = e_x x^0 y^0 x^0 y^0 x^0 y^0 f_x =$$

$$e_x x^0 y^0 x^0 y^0 f_y = e_x x^0 f_x e_y y^0 x^0 f_x e_y y^0 f_y =$$

$$x e_y y^0 x^0 f_x y = x e_y y^0 f_y e_x x^0 f_x y = (xy)^2$$

故 $xy \in E(S)$.

引理 6 如果 S^0 是拟-理想且 S 满足正则条件, 则 I (或 Λ) 是带且满足条件 $efh = ehf$, 对 $e, f, h \in I, E(S^0)$ 是 I 和 Λ 的共同的半格断面.

证明 由已知条件知 $\Lambda I \subseteq \text{Re } g(S)$. 取 $e, f \in I$, 则由引理 3 的 b, 令 $e = eg, f = fh$. 其中, $g, h \in E(S^0)$. 由引理 3 的 c, $ef = egfh = efh \in IE(S^0) \subseteq I$. 取 $e, f, h \in I$, 同样地, 令 $f = ff_1, h = hh_1, f_1, h_1$

$\in E(S^0)$, 则 $efh = efhh_1 = eff_1 hh_1$.

由引理3的d, $f_1 h = f_1 h^0, h^0 \in E(S^0)$, 且 $fh^0 = f^0 h^0, f^0 \in E(S^0)$. 故

$$\begin{aligned} efh &= eff_1 hh_1 = effh^0 h_1 = efh^0 f_1 h_1 = \\ &ef^0 h^0 f_1 h_1 = eh^0 h_1 ff_1 = eh h_1 ff_1 = ehf \end{aligned}$$

另一结论的证明是显然的.

引理7 a. 在 S 上存在两个映射 $\varphi: I \rightarrow E(S^0)$, $e \mapsto e\varphi$ 和 $\psi: \Lambda \rightarrow E(S^0), f \mapsto f\psi$ 具有性质 $\varphi|_{E(S^0)} = \psi|_{E(S^0)} = id_{E(S^0)}$.

b. 在 S 上存在两种运算 $\otimes: I \times E(S^0) \rightarrow I$ 和 $\times: E(S^0) \times \Lambda \rightarrow \Lambda$ 满足

$$\left. \begin{aligned} (\forall a, b \in E(S^0), e \in I) e \otimes (ab) &= (e \otimes a) \otimes b \\ (\forall a, b \in E(S^0), f \in \Lambda) (ab) \times f &= a \times (b \times f) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

c. 对 $e \in I, f \in \Lambda, a \in E(S^0), \varphi, \psi, \otimes, \times$ 满足

$$\left. \begin{aligned} e \otimes e\varphi &= e, f\psi \times f = f \\ (e \otimes a)\varphi &= e\varphi \otimes a, (a \times f)\varphi = a \times f\psi \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

证明 由引理3的a-c, 显然成立.

a. 如果 $e, f \in E(S^0)$, 有 $e \otimes f = e \times f = ef$;

b. 如果 S 满足引理6的条件, 有 $e\varphi = e^0, f\varphi = f^0, e \otimes a = ea, a \times f = af$.

3 主要结构定理

这部分的主要目标是给出有拟理想 G -充足断面的 G -富足半群的结构定理.

定义5 令 S^0 是有幂等元半格 $E(S^0)$ 的 G -充足半群, I, Λ 是两个集合. 若 (S^0, I, Λ) 满足条件:

a. 存在映射 $\varphi: I \rightarrow E(S^0), \psi: \Lambda \rightarrow E(S^0)$, 使得 $\varphi|_{E(S^0)} = \psi|_{E(S^0)} = id_{E(S^0)}$.

b. 存在映射 $\otimes: I \times E(S^0) \rightarrow I, \times: E(S^0) \times \Lambda \rightarrow \Lambda$, 使得条件a成立.

c. $\varphi, \psi, \otimes, \times$ 使得条件b成立.

d. 在 S^0 上, 由 $f * e$ 表示的 $\Lambda \times I$ 矩阵满足 $(\forall a, b \in E(S^0)) a(f * e)b = (a \otimes f)(e \times b)$

e. $(\forall f \in \Lambda, e \in I), \psi * e\varphi = f\psi e\varphi; f * f\varphi = f\psi, e\varphi * e = e\varphi$.

若 $f\psi * e \in \text{Re } g(S^0)$ 则 $f\psi * e = f\psi e\varphi$.

若 $f * e\varphi \in \text{Re } g(S^0)$ 则 $f * e\varphi = f\psi e\varphi$.

则称 (S^0, I, Λ) 为 G -结构系统, 记为 $GS(S^0, I, \Lambda)$.

设 $GS(S^0, I, \Lambda)$ 是一个 G -结构系统, 令 W 为由式(3)和式(4)确定的集合

$$W = \{(e, a, f) \in I \times S^0 \Lambda \mid e\varphi = a^+, f\varphi = a^*\} \quad (3)$$

$$(e, a, f)(g, b, h) = (e \otimes x^+, x, x * \times h) \quad (4)$$

其中, $x = a(f * g)b \in S^0$. 有引理8成立.

引理8 W 是半群.

证明 令 $X = (e, x, f), X_1 = (e_1, x_1, f_1), X_2 = (e_2, x_2, f_2) \in W$.

由式(4), $XX_1 = (e \otimes a^+, a, a^+ \times f_1)$, 其中, $a = x(f e_1) x_1$, 且

$$\begin{aligned} (e \otimes a^+)\varphi &= e\varphi a^+ = e\varphi(x(f * e_1)x_1)^+ = \\ &(e\varphi x(f * e_1)x_1)^+ = (x(f * e_1)x_1)^+ = a^+ \end{aligned}$$

同理, $(a^+ \times h)\varphi = a^*$, 即 $XX_1 \in W$. 通过计算得

$$\begin{aligned} (XX_1)X_2 &= (e \otimes a^+, a, a^+ \times f_1)(e_2, x_2, f_2) = \\ &(e \otimes a^+ \otimes b^+, b, b^+ \times f_2) \end{aligned}$$

其中

$$a = x(f * e_1)x_1$$

$$b = a((a^+ \times f_1) * e_2)x_2 =$$

$$a(f_1 * e_2)x_2 = x(f * e_1)x_1(f_1 * e_2)x_2$$

$$e \otimes a^+ \otimes b^+ = e \otimes (a^+ b^+) = e \otimes (a^+ b)^+$$

由命题1, $e \otimes b^+$, 即 $(XX_1)X_2 = (e \otimes b^+, b, b^+ \times f_2)$.

同样地

$$X(X_1 X_2) = (e \otimes d^+, d, d^+ \times c^+ \times f_2)$$

其中, $c = x_1(f_1 * e_2)x_2$, 且

$$d = xe_1 x_1(f_1 * e_1)x_1 e_2(f_1 * e_2)x_2 = b$$

$$e \otimes d^+ = e \otimes a^+ \otimes b^+$$

$$d^+ \times c^+ \times f_2 = b^+ \times f_2$$

因此, 结合律成立.

引理9 令 $X = (e, x, f) \in W, u = (e, x^+, x^+), v = (x^*, x^*, f) \in W$, 则

a. $x \in E(W)$ 当且仅当 $x = x(f * e)x \in \text{Re } g(S^0)$;

b. $E(W) = \{(e, x^+, x^+), (x^*, x^*, f) \mid x \in S^0, e\varphi \mathcal{L} x^+, f\varphi \mathcal{R} x^*\}$;

c. $u, v \in E(W)$ 且 $u \mathcal{R}_G^* X \mathcal{L}_G^* v$.

证明 **a.** 易证a成立.

b. 令 $(e, x, f) \in E(W)$, 则 $(e, x, f)^2 = (e \otimes a^+, a, a^+ \times f) = (e, x, f)$. 其中, $a = x(f * e)x$, 因此, 由a, $e = e \otimes a^+, x = a = x(f * e)x$ 且 $f = x \times f$, 且 $x \in \text{Re } g(S^0)$, 于是, $f * e = x^0, x \in \bigvee (x^0)$. 所以

$$\begin{aligned} x^0 \in E(S^0) \text{ 且 } E(W) &\subseteq \{(e, x, f) \in \\ &W \mid x \in E(S^0) \text{ 且 } x = x(f * e)x\} \end{aligned}$$

因此, 对任意的 $(e, x, f) \in E(W)$ 有 $x = x^+ \in$

$(x)_{\mathcal{R}_G^*} \cap E(S^0)$ 或 $x = x^* \in (x)_{\mathcal{L}_G^*} \cap E(S^0)$. 若 $x = x^+$, 则 $f\varphi = x^* = x^0$, 就有 $f = x^+$ 因此, $(e, x, f) = (e, x^+, x^+)$. 同理, 若 $x = x^*$, 则 $(e, x, f) = (x^*, x^*, f)$, 那么, $E(W)$ 即为所求.

对于 c, 只需证 $v\mathcal{L}_G^* X$. 因 $x^*(f * x^*)x^* = x^*$, 由 a, 有 $v \in E(W)$. 易证 $X = Xv$. 假设 $X_1 = (e_1, v, f_1)$, $X_2 = (e_2, x_2, f_2) \in W$. 使得 $R(vX_1) \subseteq R(vX_2)$, 显然, 有 $R(XvX_1) \subseteq R(XvX_2)$. 由 $X = Xv$ 得到 $R(XX_1) \subseteq R(XX_2)$; 相反地, 令 $R(XX_1) \subseteq R(XX_2)$, 则 $R(XvX_1) \subseteq R(XvX_2)$ 且存在 $t = (e_3, x_3, f_3) \in W$ 使得 $XX_1 = XX_2 t$, 则 $XvX_1 = XvX_2 t$. 通过计算有

$$\begin{aligned} XX_1 &= (e \otimes a^+, a, a^+ \times f_1 = XX_2 t = \\ & (e \otimes b^+, b, b^+ \times f_2) t = (e \otimes b^+ \otimes c^+, c, \\ & c^+ \times f_3) = (e \otimes c^+ \otimes c^+, c, c^+ \times f_3) \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $a = x(f * e_1)x_1$, $b = x(f * e_2)x_2$, $c = x(f * e_2)x_2(f_2 * e_3)x_3$ 且 $e \otimes b^+ \otimes c^+ = e \otimes c^+$, 于是, $e \otimes a^+ = e \otimes c^+$, $a = c$, $a^+ \times f_1 = c^+ \times f_3$ 且有 $c^+ = a^+$. 另一方面, 由 $X = Xv$ 得 $XX_2 t \in R(XvX_2)$. 通过计算得

$$\begin{aligned} vX_1 &= (x^* \otimes d^+, d, d^+ \times f_1) \\ vX_2 t &= (x^* \otimes h^+ \otimes k^+, k, k^+ \times f_3) \end{aligned}$$

其中, $d = x^*(f * e_1)x_1$, $h = x^*(f * e_2)x_2$. 由 $x\mathcal{L}_G^* x^*$ 得 $k = x^*(f * e_2)x_2(f_2 * e_3)x_3$, 又 $a = c$, 故 $k = c$, $vX_2 t = (x^* \otimes h^+ \times c^+, c, c^+ \times f_3)$. 根据 W 的定义可知, $vX_2 t = XX_2 t \in R(vX_2)$. 最后由 $XX_1 = XvX_1 = XX_2 t$ 得到 $e \otimes d^+ \otimes a^+ = e \otimes a^+$, $e \otimes h^+ \otimes c^+ = e \otimes c^+ = e \otimes a^+$.

记 $a = x(f * e_1)x_1$, $d = x^*(f * e_1)x_1$. 由 $x\mathcal{L}_G^* x^*$ 得 $a = d$.

同样地, $e \otimes d^+ = e \otimes a^+$, $vX_1 = (e \otimes a^+, a, a^+ \times f_1) = (e \otimes c^+, c, c^+ \times f_3) = vX_2 t$.

由关系式(5), 得到结论 $R(vX_1) \subseteq R(vX_2)$. 综合得 $v\mathcal{L}_G^* X$ 成立.

引理 10 W 是 G -富足的.

证明 由引理 9, 显然成立.

引理 11 令 $T = \{(a^+, a, a^*) \mid a \in S^0\}$, 则 T 是 W 的一个 G -充足 $*$ -子半群, 且 T 同构于 S^0 .

证明 由定义 5 的条件 a 得, $T \subseteq W$. 令 $u = (a^+, a, a^*)$, $v = (b^+, b, b^*) \in T$. 根据定义 5 的条件 a—e, 易证 $uv = ((ab)^+, ab, (ab)^*) \in T$, 即 T 是子半群. 令 $(a^+, a, a^*) \in T$, 由引理 10 得, $u = (a^+, a^+, a^+)$, $v = (a^*, a^*, a^*) \in E(T)$ 且 $u\mathcal{R}_G^*(a^+$,

$a, a^*)\mathcal{L}_G^* v$, 则 T 是 $*$ -子半群. 为证明 T 与 S^0 同构, 令 $a\theta = (a^+, a, a^*)$, 显然, θ 是同构的. 因此, S^0 同构于 T .

引理 12 令 $x = (e_1, a_1, f_1)$, $y = (e_2, a_2, f_2) \in W$, 则有

- a. $x\mathcal{R}_G^* y$ 当且仅当 $e_1 = e_2$;
- b. $x\mathcal{L}_G^* y$ 当且仅当 $f_1 = f_2$.

证明 由引理 9 得, $u = (e_1, a_1^+, a_1^+)$, $\mathcal{R}_G^*(e_2, a_2^+, a_2^+) = v$, 当且仅当 $e_1 = e_2$. 若 $e_1 = e_2$ 则 $a_1^+ = e_1\varphi = e_2\varphi = a_2^+$, 故 $u\mathcal{R}_G^* v$; 相反地, 若 $u\mathcal{R}_G^* v$, 则根据 $\mathcal{R}_G^*$ 的定义由 $L(u) = L(uu)$ 得 $L(v) = L(vu)$. 令 $v = w_1 vu$ 对一些 $w_1 \in W$ 成立. 同理, $L(u) = L(uv)$, 令 $u = w_2 uv$ 对一些 $w_2 \in W$ 成立. 因此, $uv = u, vu = v$.

故 $a_1^+ e_2 = a_2^+, a_2^+ e_1 = a_1^+, e_1 \otimes a_2^+ = e_2, e_2 \otimes a_1^+ = e_1$. 由定义 5 的条件 c, 于是, 有 $a_2^+ = a_1^+ a_2^+$ 且 $a_1^+ = a_2^+ a_1^+$. 同时有 $a_2^+ \in V(a_1^+) \cap E(S^0)$. 由唯一性得 $a_1^+ = a_2^+$, 即 $e_1\varphi = e_2\varphi, e_1 = e_2 \otimes a_1^+ = e_2 \otimes a_2^+ = e_2$.

引理 13 T 是 W 的 G -充足断面.

证明 令 $x = (e, a, f) \in W, x^0 = (a^+, a, a^*) \in T, e_x = (e, a^+, a^+), f_x = (a^*, a^*, f)$, 易证 $x = e_x x^0 f_x$. 其中, $e_x \mathcal{L}_G^* x^{0+} = (a^+, a^+, a^+), f_x \mathcal{R}_G^* x^{0+} = (a^*, a^*, a^*)$. 假设 x 能用另外一种中间元素表示成 $x = e'_x \bar{x} f'_x$, 其中, $e'_x = (e_1, t_1, f_1) \in E(W), f'_x = (e_2, t_2, f_2) \in E(W), \bar{x} = (b^+, b, b^*) \in T$ 且有 $e'_x \mathcal{L}_G^* \bar{x}^+ = (b^+, b^+, b^+), f'_x \mathcal{R}_G^* \bar{x}^+ = (b^*, b^*, b^*)$, 由引理 10 得, $t_1 = b^+, e_2 = b^*$. 又 $e_1 = e$, 所以, $e_x \mathcal{R}_G^* x \mathcal{R}_G^* e'_x$. 同样地 $f_2 = f$, 所以, $e'_x = (e, t_1, b^+), f'_x = (b^*, t_2, f)$. 由于 $e'_x, f'_x \in E(W)$,

根据引理 9 和定义 5 的条件 e, $t_1^0 (b^+)^0 = b^+ * e = b^+ e\varphi i = b^+ a^+$.

得到 $t_1 = b^+ a^+, t_1^+ = t_1^* = t_1$. 也有 $t_1^+ = e\varphi = a^+, t_1^+ = b^+ \varphi = b^+$. 所以, $a^+ = b^+ = t_1$.

同理, $t_2 = b^* = a^*$. 因此, $x = (e, b^+, b^+)(b^+, b, b^*)(b^*, b^*, f) = (e, b, f)$, 故 $a = b$ 且 $\bar{x} = x^0$.

由定义 4 的条件 a, 结论成立.

引理 14 T 是 W 的拟-理想.

证明 由引理 4 的 c, 只需证 $f_y e_x \in T, x = (e, a, f), y = (e_1, a_1, f_1) \in W$. 由引理 12 的结论知 $f_y = (a_1^*, a_1^*, f_1), e_x = (e, a^+, a^+)$, 所以, $f_y e_x = (a_1^* \otimes b^+, b, b^+ \times a^+)$. 其中, $b = a_1^* (f_1 * e) a^+ = f_1 * e$.

由定义 5 的条件 c, 有

$$\begin{aligned} a_1^* \otimes b^+ &= a_1^* b^+ = (a_1^* b)^+ = b^+ \\ b^+ \times a^+ &= b^* a^+ = (ba^+)^* = b^* \end{aligned}$$

故 $f_y e_x = (b^+, b, b^*) \in T$.

综上所述,完成了对下面的定理1的第一部分的证明.

定理1 假设 $GS(S^0, I, \Lambda)$ 是一个 G -结构系统,且 W 由式(3)和式(4)定义,则 W 是一个有拟-理想 G -充足断面 T 的 G -富足半群且 T 同构于 S^0 ;相反地,每一个有拟-理想 G -充足断面的 G -富足半群也有同样的结构.

证明 为了证明定理的余下部分,令 S 是一个有拟-理想 G -充足断面 S^0 的 G -富足半群. 记 $I = \{e_x | x \in S\}$, $\Lambda = \{f_x | x \in S\}$. 由引理3, $I \cap \Lambda = E(S^0)$. 由引理7知, (S^0, I, Λ) 满足定义5的条件 a—c. 对 $f \in \Lambda, e \in I$. 由 S^0 是拟-理想, $I \times \Lambda$ 矩阵 $xf * e = fe \in S^0$. 易证定义5的条件 d 和 e 是满足的. 因此,可应用 G -结构系统 $GS(S^0, I, \Lambda)$ 构造一个有拟-理想 G -充足断面 T 的 G -富足半群 W 且 $T \cong S^0$. 为证明 W 同构于 S , 对 $(e, a, f) \in W$, 令 $(e, a, f)\theta = eaf \in S$. 易证 θ 是同构映射,故同构于 S .

参考文献:

- [1] EI-Qallali A. On the construction of a class of abundant semigroup [J]. Acta Math Hung, 1990, 56 (1/2): 77 - 91.
- [2] HALL T E. Some properties of local subsemigroups inherited by larger subsemigroups [J]. Semigroup Forum, 1982, 25: 35 - 49.
- [3] EI-Qallali A. Abundant semigroup with a multiplicatice type A transversal [J]. Semigroup Forum, 1993, 47: 327 - 340.
- [4] FOUNTAIN J B. Adequate semigroup [J]. Proc Edinburgh Math Soc, 1997, 22: 113 - 125.
- [5] EI-Qallali A, FOUNTAIN J B. Quasi-adequate semigroups [J]. Proc Roy Soc Edinburgh, 1981, 91A: 79 - 99.
- [6] SAITO J. Construction of regular semigroups with inverse transversals [J]. Proc Edinburgh Math Soc, 1989, 32: 41 - 51.
- [7] GAO Z L. Naturally ordered abundant semigroups with adequate transversals [J]. PU M A, 2003, 14 (1/2): 35 - 50.
- [8] GAO Z L. On weakly commutative abundant po-semigroups [J]. Acta Mathematica Science (Chinese), 2001, 44(4): 693 - 700.

(上接第192页)

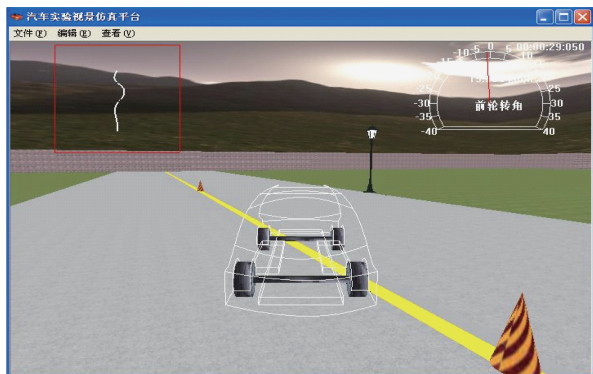


图6 车辆3D姿态显示界面

Fig.6 Display of vehicle 3D motion figure

4 结束语

根据产品开发的要求设计了 ESP 实验系统结构,介绍了该系统的软硬件组成,描述了系统软硬件之间的关系及交互过程.

驾驶员对车辆的操纵将直接影响车辆的运行状态,因此,建立汽车 ESP 实验台必须考虑驾驶员的行为,如驾驶员对转向盘、制动踏板和油门踏板的操作,构成一个“人车环境”闭环仿真系统.

研发了一种人机实时交互的 ESP 硬件在环仿真实验平台.通过采用角阶跃实验和蛇形穿杆实验进行分析,结果表明,该系统有效性高、实时性强且功能完备,为汽车 ESP 产品的开发提供了有效手段,并可用于 ESP 产品性能的检验和展示.

参考文献:

- [1] VAN ZANTEN A T. Bosch ESP systems: 5 years of experience [J]. SAE Paper, 2000, 16(33): 354 - 364.
- [2] 付皓. 汽车电子稳定性系统质心侧偏角估计与控制策略研究 [D]. 吉林: 吉林大学, 2008.
- [3] 余志生. 汽车理论 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2009.
- [4] SHOJI Inagaki, IKOU Kshiro, MASAKI Yamamoto. Analysis on vehicle stability in critical cornering using phase-plane method [J]. SAE Paper, 1994, 3 (8): 411 - 419.
- [5] 陈家琪, 王伟哲, 高超. ESP 系统实验平台的研发 [J]. 计算机工程与应用, 2009, 45(19): 72 - 74.
- [6] TEI Hong, TSENG Eric, ASHRAFI Behrouz, et al. The development of vehicle stability control at ford [J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 1999, 4 (3): 223 - 234.