

文章编号:1007-6735(2011)04-0367-05

基于再度感染的 SIS 传播模型研究

朱晓军, 张 宁

(上海理工大学 管理学院, 上海 200093)

摘要: 提出了复杂网络上一种基于再度感染的 SIS 传播模型. 在具有树状分支结构的网络中, 针对某个染病节点, 在考虑其感染子节点的同时, 也考查其再次感染祖先节点的情况. 分别在小世界网络和无标度网络上进行仿真分析, 结果表明, 对于小世界网络, 基于再度感染的 SIS 传播模型的稳态感染密度比传统的 SIS 传播模型的要大, 而且感染周期越短, 稳态感染密度越大; 而对于无标度网络, 虽然基于再度感染的 SIS 传播模型的稳态感染密度也比传统的 SIS 传播模型的要大, 但是, 感染周期对于稳态感染密度的影响微乎其微, 甚至可以忽略.

关键词: 复杂网络; 疾病传播; 再度感染; 祖先节点

中图分类号: TP 309.5

文献标志码: A

SIS model based on reinfection

ZHU Xiao-jun, ZHANG Ning

(Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: A new SIS model based on reinfection in complex networks was proposed. By using the model in the network with a tree-like structure, not only the infection of descendants of an infected node was considered but also the reinfection of ancestor by the infected node was taken into account. Through theoretical analysis and numerical simulation on small-world networks and scale-free networks, it is found that: for small-world networks, the stationary infected density on this new model is larger than that on the traditional SIS model, and the shorter the infection time is, the greater the stationary infected density will be; however for the scale-free networks, the stationary infected density on this new model is still larger than that on the traditional SIS model, yet the effect of the infection time on the stationary infected density can be neglected.

Key words: complex network; epidemic spreading; reinfection; ancestor nodes

根据经典的疾病传播理论, 疾病之所以能够在人群中传播, 是因为感染个体将疾病传播给了与其

存在接触的其他个体. 目前研究中所用的两类特别重要的传播模型是 SIR (susceptible-infected-recov-

收稿日期: 2011-03-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70971089); 上海市重点学科建设资助项目(S30501)

作者简介: 朱晓军(1984-), 男, 硕士研究生. 研究方向: 复杂网络. E-mail: xifengpo126@126.com

张 宁(联系人), 女, 教授. 研究方向: 复杂网络. E-mail: zhangning@usst.edu.cn

ered) 和 SIS (susceptible-infected-susceptible) 模型^[1-2]. 在 SIR 模型中, 单个个体被划分为 3 种类型. 第一类是易感人群(S), 这类人群不会感染其他的个体, 但是, 有可能被感染; 第二类是染病人群(I), 这类人群已经患病, 具有传染性; 第三类是移除人群或者康复人群(R), 这类人群是被治愈获得免疫能力的个体或者死亡的个体, 他们不再具有传染性, 也不会被再次感染.

近年来, 科研工作者已经研究了许多种模型, 从数学形式上描述疾病传播的过程, 与此同时, 各种免疫策略也相继被提出来应对不同的疾病传播. Pastor-Satorras 和 Vespignani 等用平均场的理论^[3-4]研究了小世界网络和无标度网络上的 SIS 模型, 得到这两种网络上疾病传播的阈值. Boguñá 和 Pastor-Satorras 等^[5]考察了关联网络(correlated networks)上 SIS 模型的传播阈值.

SIS 模型与 SIR 模型较类似, 不同的是在 SIS 模型中, 染病人群一旦被治愈康复就立刻变成易感人群, 从而使得网络中存在这样一种情况, 单个易感个体可能多次再度被染病节点所感染^[6].

1 基于再度感染的 SIS 传播模型

疾病传播研究的一个基础性问题: 一类疾病是在人群中普遍传播成为流行病, 还是逐渐消亡稳定为地方病状态. 大量的研究表明, 解答此问题的关键在于传播率和康复率的取值大小, 还有个体之间接触(连接)的方式(属性). 对于 SIR 模型, 有关传播阈值的研究已经很透彻; 而对于 SIS 模型, 关于传播阈值的分析还需考虑同一个节点多次被感染的情形, 这也是本文研究的重点.

首先, 将 SIS 和 SIR 传播模型的定义更加细化一点: 初始时刻, 除了随机选取的一个染病节点外, 网络中的其他 $N-1$ 个节点都是易感染类型的. 每个时间步, 感染节点以概率 β 将疾病感染给其邻接节点. 节点一旦被感染后, 保持感染状态达 τ 时间步之久, 之后以概率 γ 或者变成康复状态(SIR)或者变成易感状态(SIS), 定义有效传播率 $\lambda = \beta/\gamma$, 不失一般性, 可令 $\gamma = 1$.

其次, 网络中的渗流理论^[7-8]指出, 网络中的边会逐渐被移除直到网络中剩余节点个数所占初始节点个数的比例为 p' 时为止, 这时存在一个渗流阈值 p'_c , 当 $p' > p'_c$ 时, 一个巨集团会跨越整个网络; 当 $p' < p'_c$ 时, 网络由孤立的小集团组

成. 疾病传播的过程可以看成是渗流过程的相反过程^[9], 亦即疾病传播开始于一个给定的节点, 之后不断以概率在这个增长网络中添加连边. 这时, 疾病在网络传播的关键感染率就等同于渗流过程中出现巨集团时的渗流阈值. 为了研究方便, 定义一个节点感染其邻接节点的概率为 p , 注意这里的 p 不同于上面提到的 β , 这是因为在 τ 时间步内, 只要染病节点还处于感染状态, 它就有可能一直感染其邻接节点. 因而, 得到 p 的数学表达式为^[10]

$$p = 1 - (1 - \beta)^\tau \quad (1)$$

定义 n_i 为染病节点 i 所感染节点的平均数量, 如果 $n_i > 1$, 那么疾病会一直传播下去, 直到达到稳定状态. 在 SIR 模型中, 只需考虑子节点(descendants)被感染的情况; 而在 SIS 模型中, 在考虑子节点被感染的同时, 也需考查祖先节点(ancestors)再次被感染的可能. 如图 1 所示, 节点 b_1 一旦被感染后, 不仅能够将疾病传染给它的子节点 $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$, 而且可能会传染给其祖先节点 i .

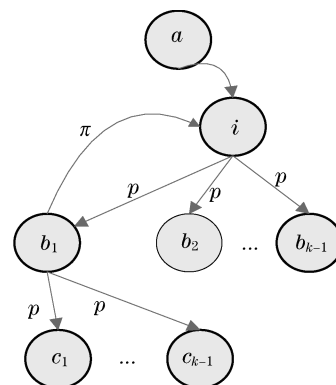


图 1 树状结构中基于再度感染的传播示意图

Fig.1 Epidemic spreading based on reinfection in the network that has a tree like sturcture

根据图论知识, 一个节点度为 k (入度为 1, 出度为 $k-1$) 的概率为 $kp(k)/\langle k \rangle$. 假设 SIR 模型拥有图 1 所示的树状结构, 并且忽略环状回路^[8], 那么可以得到节点 i 所感染节点的平均数量为^[11]

$$n_{i(\text{SIR})} = p \sum_k \frac{kp(k)}{\langle k \rangle} (k-1) = p \sum_k \frac{k^2 p(k)}{\langle k \rangle} - p \sum_k \frac{kp(k)}{\langle k \rangle} = p \left(\frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} - 1 \right) \quad (2)$$

根据式(1)和式(2), 由临界条件 $n_{i(\text{SIR})} = 1$, 可得传播阈值为

$$\lambda_c = 1 - \left(1 - \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle} \right)^{\frac{1}{\tau}} \quad (3)$$

对于 SIS 模型,在计算 n_i 的过程中还需考虑节点再次被感染的情况,如图 1 所示.但是,节点 b_1 再度感染其祖先节点 i 的概率与感染其子节点 $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$ 的概率是不一样的.这是因为相对于子节点,节点 i 处于易感状态的时间是不同的.两方面的因素造成了这种结果:首先,节点 i 在感染节点 b_1 之前必须是处于感染状态的, b_1 也必须在节点 i 康复后再变成易感状态才能再次感染节点 i (时间因素);其次,除了节点 b_1 ,节点 i 的其他子节点 $b_2, \dots, b_{k-1}$ 也可能在 b_1 之前再次感染节点 i (兄弟节点因素).

现计算 SIS 模型中,节点 b_1 再次感染节点 i 的概率 π (简称再度感染率).为了讨论方便,只考虑上面提到的第一种因素,忽略第二种因素.假定疾病的感染周期为 τ 时间步,节点 i 在感染节点 b_1 之前有 s 时间步处于感染状态,那么节点 i 在感染节点 b_1 之后就有 $\tau - s$ 时间步处于感染状态,从而节点 b_1 就有 $\tau - (\tau - s) = s$ 时间步反过来再次感染节点 i .根据上述思想,得到再度感染率为

$$\pi = \sum_{s=1}^{\tau} \frac{(1-\beta)^{s-1}\beta}{1-(1-\beta)^{\tau}} (1-(1-\beta)^s) = \frac{1-(1-\beta)^{\tau+1}}{2-\beta} \quad (4)$$

式中, $(1-\beta)^{s-1}\beta/(1-(1-\beta)^{\tau})$ 表示在时间步 s 时刻节点 i 感染节点 b_1 的概率,并假设节点 b_1 完全被感染; $1-(1-\beta)^s$ 表示节点 b_1 在 s 时间步内感染节点 i 的概率.

结合式(2)和式(4),不难得出基于再度感染的 SIS 模型中节点 i 所感染节点的平均数量为

$$n_{i(\text{SIS})} = \pi \sum_k \frac{kp(k)}{\langle k \rangle} + n_{i(\text{SIR})} = \pi + n_{i(\text{SIR})} = \frac{1-(1-\beta)^{\tau+1}}{2-\beta} + p \left(\frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} - 1 \right) \quad (5)$$

根据式(1)和式(5),由临界条件 $n_{i(\text{SIS})} = 1$,可得传播阈值为

$$\lambda_c = 1 - \left(1 - \frac{(1-\pi)\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle} \right)^{\frac{1}{\tau}} \quad (6)$$

不难看出,相对于传统的 SIS 模型,基于再度感染的 SIS 模型中的传播阈值不仅与网络的平均度有关,还与疾病的传播率 β 和疾病的感染周期 τ 有关.

所以,在 SIS 模型中总的被感染节点数量可以表示为

$$n_{(\text{SIS})} = \sum_k n_{i(\text{SIS})} =$$

$$\sum_k \left(\frac{1-(1-\beta)^{\tau+1}}{2-\beta} + p \left(\frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} - 1 \right) \right) \quad (7)$$

2 算法设计

根据上述理论分析的结果,设计出如下算法:

a. 输入网络的邻接矩阵.邻接矩阵是一个对称的 N 阶方阵, N 表示网络中节点的总个数.由于邻接矩阵一般是稀疏矩阵,本文使用 sparse 函数压缩矩阵的存储空间.

b. 设置传播过程中的参数.定义传播率为 p , 康复率为 γ , 疾病的感染周期为 τ 时间步,程序运行时间为 T .

c. 设定网络中节点的状态.假设网络中全部节点的初始状态都是易感染的.用一个 N 维行向量 $\text{node_state} = 1 + \text{zeros}(1, N)$ 来表示每个节点的状态.分量值若为 1,则表示该节点为易感状态;分量值若为 2,则表示该节点为染病状态.所以,在网络中统计染病节点密度时只需统计分量值为 2 的节点个数就可以了.

d. 采用去尾法,随机地从 N 个节点中选取一个作为染病节点,这个节点的状态值从 1 变成 2.

e. 第 1 时间步的节点传染模拟.如果 $\text{node_state}(1) \neq 2$,则跳过节点 1,再分析节点 2;如果 $\text{node_state}(1) = 2$,则节点 1 为染病节点,查找邻接矩阵中第 1 行值为 1 的所有元素所在列,即为节点 1 的邻接节点;若邻接节点的状态为 1,则以概率 p 被感染,否则保持原状态,同时将被感染的邻接节点状态值标记为 4,其目的是为了避开在该时间步将疾病传染给其他易感节点.对节点 1 的所有邻接节点重复上述步骤.对网络中的所有节点进行上述操作.

f. 第 1 时间步的节点康复模拟.如果 $\text{node_state}(1) \neq 2$,则跳过节点 1 再分析节点 2;如果 $\text{node_state}(1) = 2$,则节点 1 以概率 γ 自动康复并迅速变成易感状态,同时将康复的节点状态标记为 3.

g. 第 1 时间步的节点状态重新标记.状态值若为 4 则变成 2,状态值若为 3 则变成 1.

h. 重复步骤 e-g,直到 τ 时间步.

i. 第 $\tau+1$ 时间步的节点传染模拟.从此时间步开始需考虑再度感染的情况.此时网络中所有易感节点数目为:第 1 时间步状态值为 1 的感染节点(此刻已变为易感节点)个数加上第 τ 时间步统计出的易感节点个数.前者以概率 π 被感染,后者以

概率 p 被感染.

j. 第 $\tau + 1$ 时间步的节点康复模拟. 同步步骤 f.

k. 第 $\tau + 1$ 时间步的节点状态重新标记. 同步步骤 g.

l. 重复步骤 i - k, 直到 T 时间步, 程序运行结束.

3 仿真分析

根据本文所提算法, 使用计算机模拟疾病的传播过程, 通过仿真得到的结果来分析上述方法的合理性. 为了使程序简单易懂, 使用 Matlab7.5 编写基于再度感染的 SIS 模型的代码. 分别在 WS 小世界网络和 BA 无标度网络上仿真疾病传播的过程. 取网络节点数 $N = 10\ 000$, WS 网络中平均度 $\langle k \rangle = 6$, BA 网络中初始参数 $m_0 = m = 3$, 所有的仿真结果是 10 次独立的网络实现和 20 次基于再度感染的 SIS 模型取算术平均值得到的.

图 2 描述了小世界网络上感染密度 ρ 随着疾病感染周期 τ 的变化而变化的过程. 从上到下 3 条曲线分别是在 $\tau = 2, 6, 10$ 是的情形, 最下方 1 条曲线是传统的 SIS 模型模拟出的结果. 不难看出, 疾病在基于再度感染的 SIS 模型中传播所达到的稳态感染密度要比在传统的 SIS 模型中的大, 而且感染周期越短, 稳态感染密度越大.

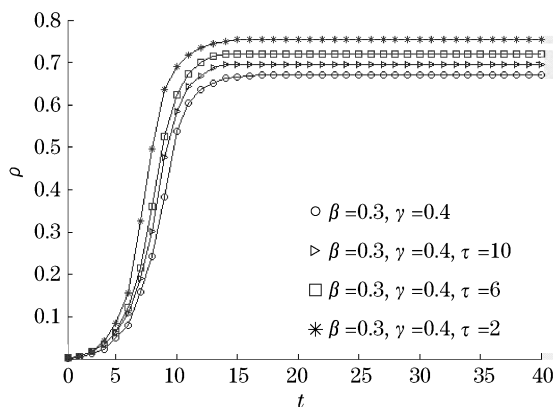


图 2 小世界网络上感染周期 τ 对感染密度 ρ 的影响示意图

Fig.2 Relation between stationary infected density ρ and infection lifetime τ in small world network

图 3 反映了无标度网络上感染密度 ρ 随着疾病感染周期 τ 的变化而变化的过程. 从上到下 3 条曲线分别是 $\tau = 2, 6, 10$ 时的情形, 最下方 1 条曲线是传统的 SIS 模型模拟出的结果. 从图 3 中可知, 疾病

在基于再度感染的 SIS 模型中传播所达到的稳态感染密度要比在传统的 SIS 模型中的大, 但是, 感染周期对于稳态感染密度的影响微乎其微, 甚至可以忽略.

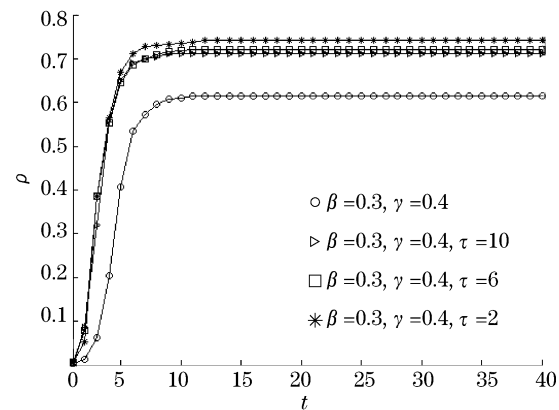


图 3 无标度网络上感染周期 τ 对感染密度 ρ 的影响示意图

Fig.3 Relation between stationary infected density ρ and infection lifetime τ in scale-free network

比较图 2 和图 3 可以得知, 相对于小世界网络, 疾病在无标度网络上传播的速度较快, 也就是达到稳态感染密度所需的时间较短, 这表明疾病更易于在无标度网络上传播.

4 结束语

本文提出了复杂网络上一种基于再度感染的 SIS 模型. 相对于 SIR 模型, SIS 模型的不同点在于, 染病人群一旦被治愈康复后就立刻变成易感人群, 从而使得网络中存在这样一种情况: 单个易感个体可能多次再度被染病节点所感染. 在具有树状分支结构的网络中运用 SIS 模型, 针对某个染病节点, 在考虑其感染子节点的同时, 也考查其再次感染祖先节点的情况. 分别在小世界网络和无标度网络上进行仿真分析, 结果表明, 对于小世界网络, 基于再度感染的 SIS 模型的稳态感染密度比传统的 SIS 模型的要大, 而且感染周期越短, 稳态感染密度越大; 而对于无标度网络, 虽然基于再度感染的 SIS 模型的稳态感染密度也比传统的 SIS 模型的要大, 但是, 感染周期对于稳态感染密度的影响微乎其微, 甚至可以忽略. 这是一个很有趣的现象, 值得进一步研究.

参考文献:

[1] BAILEY N T J. The Mathematical Theory of Infe-

ctious Diseases and Its Applications[M]. New York: Hafner Presss,1975.

[2] PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Epidemic dynamics and endemic states in complex networks[J]. Physical Review E,2001,63:066117.

[3] PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Epidemic spreading in scale-free networks[J]. Physical Review Letters,2001,86(24):3200-3203.

[4] PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Epidemics and Immunization in Scale-free Networks[M]. Berlin: Wiley-VCH,2003.

[5] BOGUÑÁ M, PASTOR-SATORRAS R. Epidemic spreading in correlated complex networks[J]. Physical Review E,2002,66:047104.

[6] RONI PARSHANI, SHAI CARMI, SHLOMO HAVLIN. Epidemic threshold for the susceptible-infectio-us-susceptible model on random networks[J]. Physical Review Letters,2010,104(25):258701.

[7] CALLAWAY D S,NEWMAN M E J,STROGATZ S H, et al. Network robustness and fragility:Percolati-on on random graphs[J]. Physical Review Letters,2000,85(24):5468-5471.

[8] COHEN R,EREZ K,HAVLIN S,et al. Resilience of the internet to random breakdowns[J]. Physical Review Letters,2000,85(24):4626-4628.

[9] ALEXANDROWICZ Z. Critically branched chains and percolationclusters[J]. Physics Letters A,1980,80(4):284-286.

[10] NEWMAN M E J. Spread of epidemic disease on networks[J]. Physical Review E,2002,66:016128.

[11] MADAR N,KALISKY T,COHEN R, et al. Immuniza-tion and epidemic dynamics in complex networks[J]. European Physical Journal,2004,38(2):269-276.

(上接第 330 页)

面法规的建设工作,避免一案一个处理方式带来的后遗症,例如,不同事故死亡赔偿就有很大的差别,导致很大的争议.

其次,对于事故的信息发布、人员的善后处理等情况,目前往往采取严格控制的方式,使人们很难了解真相,产生不必要的猜疑.事实上,让人们尽快和详尽了解事实真相,应是成本最低的解决问题方式.

参考文献:

[1] 沈友第. 高层建筑消防安全技术研究[J]. 消防科学与技术,2009,28(2):130-133.

[2] 于晓晨. 基于危险源理论的建筑防火安全评估[D]. 西安:西安科技大学,2006.

[3] 司戈. 中国高层建筑火灾[J]. 消防科学与技术,2010,29(10):863-870.

[4] 凌富华. 突变理论及其应用[M]. 上海:上海交通大学出版社,1997,45-120.

[5] 蒋成军. 突变理论及其在安全工程中的应用[J]. 南京化工大学学报,1999,21(1):24-28.

[6] 魏捍东,张智. 从央视大火探讨超高层建筑灭火对策[J]. 消防科学与技术,2010,29(7):606-612.