

文章编号:1007-6735(2011)04-0379-05

## 矩阵乘积关于广义逆的交换律及广义交换律

李莹<sup>1,2</sup>, 高岩<sup>1</sup>, 郭文彬<sup>2</sup>

(1. 上海理工大学 管理学院, 上海 200093; 2. 聊城大学 数学科学学院, 聊城 252059)

**摘要:** 定义了两个矩阵乘积关于广义逆的交换律与广义交换律的概念, 利用矩阵秩方法及奇异值分解分别研究了两个矩阵乘积关于 $\{1\}$ -逆,  $\{1,2\}$ -逆,  $\{1,3\}$ -逆与 $\{1,4\}$ -逆的交换律与广义交换律成立的充要条件, 并对其进行了比较.

**关键词:**  $\{i,j,k\}$ -逆; 群逆; 广义 Schur 补; 秩方法; 奇异值分解; 交换律

**中图分类号:** O 151.21 **文献标志码:** A

## Commutative law and generalized commutative law of matrix multiplication on generalized inverse

LI Ying<sup>1,2</sup>, GAO Yan<sup>1</sup>, GUO Wen-bin<sup>2</sup>

(1. Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China;

2. College of Mathematics Science, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

**Abstract:** The concepts of the commutative laws and generalized commutative laws of matrix multiplication on generalized inverse were defined. Using the matrix rank method and SVD, necessary and sufficient conditions about the commutative laws and generalized commutative laws of matrix multiplication on  $\{1\}$ -inverse,  $\{1,2\}$ -inverse,  $\{1,3\}$ -inverse and  $\{1,4\}$ -inverse were established respectively, and these conditions were compared between themselves.

**Key words:**  $\{i,j,k\}$ -inverse; group inverse; generalized Schur complement; matrix rank method; singular value decomposition; commutative laws

## 1 预备知识

以  $C^{m \times n}$  表示所有  $m \times n$  复矩阵的集合.  $A^*$ ,  $r(A)$ ,  $R(A)$ ,  $N(A)$  分别表示矩阵  $A$  的共轭转置、

秩、值域与零空间. 对于  $A \in C^{n \times n}$ ,  $ind(A)$  表示  $A$  的指标, 它是指满足  $r(A^k) = r(A^{k+1})$  的最小正整数. 给定矩阵  $A \in C^{m \times n}$ , 其广义逆  $G^{[1-2]}$  是满足下列 4 个方程中某些方程的矩阵

$$(1) AGA = A; \quad (2) GAG = G; \\ (3) (AG)^* = AG; \quad (4) (GA)^* = GA.$$

收稿日期: 2010-04-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11171221)

作者简介: 李莹(1974-), 女, 博士研究生. 研究方向: 系统分析, 矩阵理论. E-mail: liyingld@163.com

高岩(联系人), 男, 教授. 研究方向: 混杂系统分析. E-mail: gaoyan@usst.edu.cn

令  $\emptyset \neq \eta = \{i, j, k\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ , 用  $A\eta$  表示满足以上 4 个方程中的  $(i), (j), (k)$  方程的矩阵  $G$  的集合,  $A\eta$  中的任何一个矩阵  $G$  称之为矩阵  $A$  的一个  $\{i, j, k\}$ -逆, 记为  $A^{(i, j, k)}$ . 若  $\eta = \{1, 2, 3, 4\}$ , 则称  $G$  为  $A$  的  $M-P$  逆, 记为  $A^+$ .  $E_A = I - AA^+$ ,  $F_A = I - A^+A$  分别为  $A^*$ ,  $A$  的零空间上的正交投影.  $A \in C^{n \times n}$  的群逆<sup>[1]</sup>是指满足下列方程的矩阵  $G$ , 记为  $A^\#$ .

(1)  $AGA = A$ ; (2)  $GAG = G$ ; (5)  $AG = GA$ .

矩阵的各种类型的广义逆在实际中都有广泛的应用. 它们在概率统计、数学规划、控制论、测量学、博弈论和网络理论等领域都有极其重要的作用<sup>[2-3]</sup>. 同时在研究最小二乘问题、长方及病态线性方程问题、马尔可夫链等统计问题中也是一种基本的工具. 广义逆应用的广泛性要求它自身理论发展不断地充实完善.

设  $A \in C^{n \times n}$  非奇异, 则必有  $AA^{-1} = A^{-1}A$ . 当  $A \in C^{n \times n}$  为奇异矩阵时, 若  $A^\#$  存在, 也有  $AA^\# = A^\#A$ . 但对于  $\{i, j, k\}$ -逆, 却未必有  $A^{(i, j, k)} \in A\{i, j, k\}$  使得  $AA^{(i, j, k)} = A^{(i, j, k)}A$ , 然而有时交换律的成立会使得某些问题得以简化, 因而有必要研究关于  $\{i, j, k\}$ -逆的交换律成立的条件. 文中将明确给出矩阵乘法关于广义逆的交换律及广义交换律的概念, 利用矩阵秩方法与奇异值分解, 分别建立了矩阵乘法关于  $\{1\}$ -逆、 $\{1, 2\}$ -逆、 $\{1, 3\}$ -逆与  $\{1, 4\}$ -逆的交换律及广义交换律成立的充要条件.

首先, 给出矩阵乘法关于广义逆的交换律及广义交换律的定义.

**定义 1** 设  $A \in C^{n \times n}$ ,  $\emptyset \neq \eta = \{i, j, k\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ . 对于  $X \in A\eta$ , 如果  $AX = XA$ , 则称矩阵乘法关于  $X$  满足交换律.

**定义 2** 设  $A \in C^{n \times n}$ ,  $\emptyset \neq \eta = \{i, j, k\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ . 对于  $X, Y \in A\eta$ ,  $X \neq Y$ , 如果  $AX = YA$ , 则称矩阵乘法关于  $X$  与  $Y$  满足广义交换律.

为推导需要, 给出下列引理.

**引理 1**<sup>[1]</sup> 设  $A \in C^{n \times n}$ , 则下列各条等价:

- (1)  $\text{ind}(A) = 1$ ; (2)  $R(A) \cap N(A) = \{0\}$ ;
- (3)  $R(A) \oplus N(A) = C^n$ ; (4)  $A^\#$  存在.

**引理 2**<sup>[4-5]</sup> 设  $A \in C^{m \times n}$ ,  $B \in C^{m \times k}$ ,  $C \in C^{l \times n}$ ,  $D \in C^{l \times k}$ . 则

$$r(D - CA^+B) = r \begin{bmatrix} A^*AA^* & A^*B \\ CA^* & D \end{bmatrix} - r(A) \quad (1)$$

设  $A, B_1, B_2, C_1, C_2$  与  $X_1, X_2$  使得  $A - B_1X_1C_1 - B_2X_2C_2$  有意义. 则

$$\min_{X_1, X_2} r(A - B_1X_1C_1 - B_2X_2C_2) = r \begin{bmatrix} A \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + r(A, B_1, B_2) + \max\{S_1, S_2\} \quad (2)$$

其中

$$S_1 = r \begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = r \begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_1 & 0 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}$$

**引理 3**<sup>[5]</sup> 设  $A \in C^{m \times n}$ ,  $B \in C^{m \times k}$ ,  $C \in C^{l \times n}$ ,  $D \in C^{l \times k}$ . 则

$$\min_{A^{(1,3)}} r(D - CA^{(1,3)}B) = r \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} A^*A & A^*B \\ C & D \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\min_{A^{(1,4)}} r(D - CA^{(1,4)}B) = r \begin{bmatrix} A^*B \\ D \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} A^*A & A^*B \\ C & D \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A^*B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (4)$$

## 2 矩阵乘法关于 $A^{(1)}$ 及 $A^{(1,j)}$ 的交换律成立的充要条件

**定理 1** 设  $A \in C^{n \times n}$ , 则下列各条等价:

- a. 存在  $A^{(1)} \in A\{1\}$ , 使得  $AA^{(1)} = A^{(1)}A$ ;
- b. 存在  $A^{(1,2)} \in A\{1, 2\}$ , 使得  $AA^{(1,2)} = A^{(1,2)}A$ ;
- c.  $r(A) = r(A^2)$ ;
- d.  $\text{ind}(A) = 1$ ;
- e.  $R(A) \cap N(A) = \{0\}$ ;

f.  $R(A) \oplus N(A) = C^n$ ;

g.  $A^\#$  存在.

**证明**  $a \Rightarrow c$  若存在  $A^{(1)} \in A\{1\}$  使得  $AA^{(1)} = A^{(1)}A$ , 则在上式两端分别左乘  $A$  得  $A^2A^{(1)} = A$ , 因而  $r(A^2) \geq r(A)$ . 同时  $r(A^2) \leq r(A)$ . 因此  $r(A) = r(A^2)$ .

$c \Rightarrow a$   $r(A) = r(A^2)$  即  $ind(A) = 1$ . 由引理 1 知存在  $A^\#$  且  $AA^\# = A^\#A$ . 显然  $A^\# \in A\{1\}$ . 即存在  $A^{(1)} \in A\{1\}$  使得  $AA^{(1)} = A^{(1)}A$ .

$b \Leftrightarrow c$  类似于  $a \Leftrightarrow c$ .  $c \Leftrightarrow d \Leftrightarrow e \Leftrightarrow f \Leftrightarrow g$  可由引理 1 直接推得.

**定理 2** 设  $A \in C^{n \times n}$ . 则存在  $A^{(1,3)} \in A\{1,3\}$  使得  $A^{(1,3)}A = AA^{(1,3)} = AA^+$  当且仅当

$$r \begin{pmatrix} A \\ A^* \end{pmatrix} = r(A^2)$$

**证明** 由于  $AA^{(1,3)} = AA^+$  对任意  $A^{(1,3)} \in A\{1,3\}$  成立, 关于  $\{1,3\}$ -逆的交换律转化为是否存在  $A^{(1,3)}$  使得  $A^{(1,3)}A = AA^+$ . 后者等价于  $\min_{A^{(1,3)}} r(A^{(1,3)}A - AA^+) = 0$ . 现计算这一极小秩. 由式 (1) 和式 (3), 得

$$\begin{aligned} \min_{A^{(1,3)}} r(A^{(1,3)}A - AA^+) &= \min_{A^{(1,3)}} r \left( \begin{pmatrix} A^*AA^* & A^* \\ AA^* & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ I_n \end{pmatrix} A^{(1,3)} (0, A) \right) - r(A) = \\ &= r \begin{pmatrix} A^*A & 0 & A^*A \\ 0 & A^*AA^* & A^* \\ -I_n & AA^* & 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^*AA^* & A^* \\ AA^* & 0 \end{pmatrix} - \\ &= r \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A \\ 0 & A^*AA^* & A^* \\ -I_n & AA^* & 0 \end{pmatrix} - r(A) = \\ &= r \begin{pmatrix} A \\ A^* \end{pmatrix} - r(A^2) \end{aligned}$$

**定理 3** 设  $A \in C^{n \times n}$ . 则存在  $A^{(1,4)} \in A\{1,4\}$ , 使得  $AA^{(1,4)} = A^{(1,4)}A = A^+A$  当且仅当

$$r(A, A^*) = r(A^2)$$

**证明** 由于  $A^{(1,4)}A = A^+A$  对任意  $A^{(1,4)} \in A\{1,4\}$  成立, 关于  $\{1,4\}$ -逆的交换律等价于是否

存在  $A^{(1,4)}$ , 使得  $AA^{(1,4)} = A^+A$ . 而后者又等价于

$\min_{A^{(1,4)}} r(AA^{(1,4)} - A^+A) = 0$ . 现计算这一极小秩. 由式

(1) 和式 (4), 得

$$\begin{aligned} \min_{A^{(1,4)}} r(AA^{(1,4)} - A^+A) &= \\ &= \min_{A^{(1,4)}} r \left( \begin{pmatrix} A^*AA^* & A^*A \\ A^* & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A \end{pmatrix} A^{(1,4)} (0, I_n) \right) - \\ &= r \begin{pmatrix} AA^* & 0 & I_n \\ 0 & A^*AA^* & A^*A \\ -AA^* & A^* & 0 \end{pmatrix} + \\ &= r \begin{pmatrix} 0 & A^*AA^* & A^*A \\ -A & A^* & 0 \end{pmatrix} - \\ &= r \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & A^*AA^* & A^*A \\ 0 & -A & A^* & 0 \end{pmatrix} - r(A) = \\ &= r(A, A^*) - r(A^2) \end{aligned}$$

文中考虑的是对某一个  $A^{(1,j)}$ , 等式  $AA^{(1,j)} = A^{(1,j)}A$  是否成立. 现研究对于  $X, Y \in A\{1, j\}$  且  $X \neq Y$ ,  $AX = YA$  成立的条件.

### 3 矩阵乘法关于广义逆的广义交换律成立的充要条件

**定理 4** 设  $A \in C^{n \times n}$ . 则存在  $A^-, A^+ \in A\{1\}$  使得  $AA^- = A^+A$  当且仅当  $r(A) = r(A^2)$ .

**证明** 存在  $A^-, A^+ \in A\{1\}$  使得  $AA^- = A^+A$  当且仅当  $\min_{A^-, A^+} r(AA^- - A^+A) = 0$ . 因而将计算  $AA^- - A^+A$  的极小秩.

假设  $A$  的奇异值分解为  $A = U \begin{pmatrix} \Sigma_{r(A)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^*$ ,

其中,  $U = (U_1, U_2)$ ,  $V = (V_1, V_2)$  是两个  $n \times n$  的酉矩阵且  $U_1 \in C^{n \times r(A)}$ ,  $V_1 \in C^{n \times r(A)}$ ,  $\Sigma_{r(A)} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{r(A)})$ ,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{r(A)} > 0$  为  $A$  的奇异值.

则  $A^{(1)} = V \begin{pmatrix} \Sigma_{r(A)}^{-1} & B \\ C & D \end{pmatrix} U^*$ , 其中,  $B, C, D$  为具有适当阶数的任意矩阵. 设  $A^-, A^+ \in A\{1\}$ , 并且

$$A^- = V \begin{pmatrix} \Sigma_{r(A)}^{-1} & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} U^*$$

$$\mathbf{A}^- = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{r(\mathbf{A})}^{-1} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \mathbf{U}^*$$

则

$$\begin{aligned} r(\mathbf{A}\mathbf{A}^- - \mathbf{A}^- \mathbf{A}) &= r \left( \begin{bmatrix} \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{r(\mathbf{A})} & \widetilde{\mathbf{B}}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^* - \begin{bmatrix} \mathbf{V} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{r(\mathbf{A})} & \mathbf{0} \\ \widetilde{\mathbf{C}}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V}^* \end{bmatrix} \right) = \\ &= r \left( \mathbf{V}^* \mathbf{U} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{r(\mathbf{A})} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \widetilde{\mathbf{B}}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) - \right. \\ &\quad \left. \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{r(\mathbf{A})} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \widetilde{\mathbf{C}}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \mathbf{V}^* \mathbf{U} \right) = \\ &= r \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{V}_2^* \mathbf{U}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{V}_2^* \mathbf{U}_1 \end{bmatrix} \widetilde{\mathbf{B}}_1 (\mathbf{0}, \mathbf{I}_{n-r(\mathbf{A})}) - \right. \\ &\quad \left. \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{n-r(\mathbf{A})} \end{bmatrix} \widetilde{\mathbf{C}}_2 (\mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_2) \right) \end{aligned}$$

因而,由式(2),得

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{A}^-, \mathbf{A}^+} r(\mathbf{A}\mathbf{A}^- - \mathbf{A}^- \mathbf{A}) &= \\ \min_{\widetilde{\mathbf{B}}_1, \widetilde{\mathbf{C}}_2} r \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{V}_2^* \mathbf{U}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{V}_2^* \mathbf{U}_1 \end{bmatrix} \widetilde{\mathbf{B}}_1 (\mathbf{0}, \mathbf{I}_{n-r(\mathbf{A})}) - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{n-r(\mathbf{A})} \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. \widetilde{\mathbf{C}}_2 (\mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_2) \right) = r \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{V}_2^* \mathbf{U}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{n-r(\mathbf{A})} \\ \mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_1 & \mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. r \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_2 & \mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_2^* \mathbf{U}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{V}_2^* \mathbf{U}_1 & \mathbf{I}_{n-r(\mathbf{A})} \end{bmatrix} \right) + \\ &\quad \max\{S_1, S_2\} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} S_1 &= r \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_2 & \mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{V}_2^* \mathbf{U}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{V}_2^* \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_1 & \mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \\ &\quad r \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_2 & \mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_2^* \mathbf{U}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{V}_2^* \mathbf{U}_1 & \mathbf{I}_{n-r(\mathbf{A})} \\ \mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_1 & \mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &r \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_2 & \mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{V}_2^* \mathbf{U}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{V}_2^* \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{n-r(\mathbf{A})} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_1 & \mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \\ &-2n + 2r(\mathbf{A}) - 2r(\mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= r \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_2^* \mathbf{U}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-r(\mathbf{A})} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{n-r(\mathbf{A})} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \\ &r \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_2 & \mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_2^* \mathbf{U}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{V}_2^* \mathbf{U}_1 & \mathbf{I}_{n-r(\mathbf{A})} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{n-r(\mathbf{A})} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \\ &r \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_2^* \mathbf{U}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-r(\mathbf{A})} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{n-r(\mathbf{A})} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_1 & \mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \\ &-2n + 2r(\mathbf{A}) - 2r(\mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_1) = S_1 \end{aligned}$$

经过计算,得

$$\begin{aligned} &r \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{V}_2^* \mathbf{U}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{n-r(\mathbf{A})} \\ \mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_1 & \mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} = n - r(\mathbf{A}) + r \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{V}_2^* \mathbf{U}_1 \end{bmatrix} = \\ &n - r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_1) = n - r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{U}_1) \end{aligned}$$

$$n - r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_1) = n - r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{U}_1)$$

$$r \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_2 & \mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_2^* \mathbf{U}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{V}_2^* \mathbf{U}_1 & \mathbf{I}_{n-r(\mathbf{A})} \end{bmatrix} =$$

$$n - r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_2) =$$

$$n - r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{V}_1^*)$$

现计算  $r(\mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_1)$ .

由  $\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{r(\mathbf{A})} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V}^*$ , 得

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{r(\mathbf{A})} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^* \mathbf{U}^*, \mathbf{A}^+ = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{r(\mathbf{A})}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^*$$

则

$$r(\mathbf{A}^* \mathbf{A}^+) = r \left( \mathbf{V} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{r(\mathbf{A})} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^* \mathbf{V} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{r(\mathbf{A})}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^* \right) =$$

$$r \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{U}_1^* \mathbf{V}_1 \boldsymbol{\Sigma}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = r(\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{U}_1^* \mathbf{V}_1 \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) =$$

$$r(\mathbf{U}_1^* \mathbf{V}_1) = r(\mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_1)$$

因而,由式(1),得

$$\begin{aligned}
\min_{A^-, A^=} r(AA^- - A^= A) &= \\
r(U_1) + r(V_1) - 2r(V_1^* U_1) &= \\
2r(A) - 2r(A^* A^+) &= \\
2r(A) - 2\left(r\begin{pmatrix} A^* A A^* & A^* \\ A^* A^* & 0 \end{pmatrix} - r(A)\right) &= \\
4r(A) - 2r\begin{pmatrix} 0 & A^* \\ (A^*)^2 & 0 \end{pmatrix} &= \\
2r(A) - 2r(A^2) &
\end{aligned}$$

在定理1中,已经说明选择  $A^\# \in A\{1\}$  可以使  $AA^{(1)} = A^{(1)}A$ . 事实上,作为一般性的证明方法,只需在定理4的证明过程中令  $B_1 = B_2, C_1 = C_2, D_1 = D_2$  即为定理1的证明.

**定理5** 设  $A \in C^{n \times n}$ . 则存在  $X, Y \in A\{1, 2\}$  使得  $AX = YA$  当且仅当  $r(A) = r(A^2)$ .

**证明** 由  $A = U \begin{pmatrix} \Sigma_{r(A)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^*$ , 得  $A^{(1,2)} = V \begin{pmatrix} \Sigma_{r(A)}^{-1} & B \\ C & C \Sigma_{r(A)} B \end{pmatrix} U^*$  其中,  $B, C$  为具有适当阶数的任意矩阵. 令  $X, Y \in A\{1, 2\}$ , 且

$$X = V \begin{pmatrix} \Sigma_{r(A)}^{-1} & B_1 \\ C_1 & C_1 \Sigma_{r(A)} B_1 \end{pmatrix} U^*$$

$$Y = V \begin{pmatrix} \Sigma_{r(A)}^{-1} & B_2 \\ C_2 & C_2 \Sigma_{r(A)} B_2 \end{pmatrix} U^*$$

则

$$\begin{aligned}
\min_{X, Y} r(AX - YA) &= \min_{\widetilde{B}_1, \widetilde{C}_2} r\left(U \begin{pmatrix} I_{r(A)} & \widetilde{B}_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* - \right. \\
\left. V \begin{pmatrix} I_{r(A)} & 0 \\ \widetilde{C}_2 & 0 \end{pmatrix} V^* \right) &= \min_{A^-, A^=} r(AA^- - A^= A)
\end{aligned}$$

因而关于  $\{1, 2\}$ -逆的广义交换律与关于  $\{1\}$ -逆的广义交换律相同.

对于  $\{1, 3\}$ -逆, 设  $X, Y \in A\{1, 3\}$ , 不论  $X$  与  $Y$  是否相等, 总有  $AX = AY = AA^+$ , 因而关于  $\{1, 3\}$ -逆的广义交换律等同于关于  $\{1, 3\}$ -逆的交换律.  $\{1, 4\}$ -逆的情形与  $\{1, 3\}$ -逆相同.

**定理6** 设  $A \in C^{n \times n}$ . 则存在  $X, Y \in A\{1, 3\}$  使得  $AX = YA$  当且仅当  $r\begin{pmatrix} A \\ A^* \end{pmatrix} = r(A^2)$ .

**定理7** 设  $A \in C^{n \times n}$ . 则存在  $X, Y \in A\{1, 4\}$  使得  $AX = YA$  当且仅当  $r(A, A^*) = r(A^2)$ .

## 4 结 论

已经建立了矩阵乘法关于广义逆的交换律及广义交换律成立的等价条件, 接下来要研究满足  $AA^{(1,j)} = A^{(1,j)}A$  的  $A^{(1,j)}$  的结构与性质. 这是一个矩阵方程的问题. 例如, 寻找满足  $AA^{(1)} = A^{(1)}A$  的  $A^{(1)}$ , 即为寻找  $\begin{cases} AXA = A \\ AX = XA \end{cases}$  或  $A^2X = A$  的解. 这是作者下一步将要研究的课题.

### 参考文献:

- [1] BEN-ISRAEL A, GREVILLE T N E. Generalized Inverses: Theory and Applications[M]. New York: John Wiley & Sons, 1974.
- [2] 郭文彬, 魏木生. 奇异值分解及其在广义逆理论中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [3] 王松桂, 杨振海. 广义逆矩阵及其应用[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1996.
- [4] TIAN Y G. More on maximal and minimal ranks of Schur complements with applications[J]. Appl Math Comput, 2004, 152: 675 - 692.
- [5] TIAN Y G. Upper and lower bounds for ranks of matrix expressions using generalized inverse[J]. Linear Algebra Appl, 2002, 355: 187 - 214.