

文章编号: 1007-6735(2011)04-0391-06

具有 p -Laplace 算子的积分微分方程积分边值问题正解的存在性

王平友, 贾梅, 窦丽霞, 金京福

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 研究了带有 p -Laplace 算子的微分积分方程积分边值问题正解的存在性, 利用范数形式的锥拉伸与锥压缩不动点定理, 得到了边值问题至少存在一个正解的结论.

关键词: 积分边值问题; 不动点定理; 正解; 锥

中图分类号: O 175.8

文献标志码: A

Existence of positive solutions of integral boundary value problems for nonlinear integro-differential equations with p -Laplacian

WANG Ping-you, JIA Mei, DOU Li-xia, JIN Jing-fu

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The existence of positive solution of integral boundary value problems for nonlinear integro-differential equations with the one-dimensional p -Laplacian was studied. By using the expansion and compression fixed point theorem of norm in cone, the existence of at least one positive solution for this kind of integral boundary value problems was concluded.

Key words: integral boundary value problem; fixed point theorem; positive solutions; cone

1 问题的提出

由于边值问题具有广泛的应用背景, 因此已被深入的研究^[1], 尤其对于边值问题

$$\begin{cases} u'' + f(t, u(t)) = 0, & 0 < t < 1 \\ \alpha u(0) - \beta u'(0) = 0, & \gamma u(1) + \delta u'(1) = 0 \end{cases}$$

其中, $\alpha, \gamma, \beta, \delta \geq 0$, 并且 $\alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma > 0$, $f \in C([0, 1] \times [0, +\infty), [0, +\infty))$ 正解的存在性, 许多作者对其做了大量的工作, 并且获得了上述边值问题有解、一定为正解等结果^[1-5]. 对于具 p -Laplace 算子的边值问题正解存在

性的研究, 也得到了许多有意义的结果^[6-11].

但是, 如果边界条件中涉及的点多于两个, 如四点边值问题

$$\begin{cases} u'' + f(t, u(t)) = 0, & 0 < t < 1 \\ \alpha u(0) - \beta u'(\xi) = 0, & \gamma u(1) + \delta u'(\eta) = 0 \end{cases}$$

其中, $0 < \xi, \eta < 1$, 并且 $\alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma > 0$, $f \in C([0, 1] \times [0, +\infty), [0, +\infty))$, 由于其边界条件的复杂性, 即使得到其解存在, 也不能保证其解一定为正解^[6].

文献[6]研究了边值问题

$$\begin{cases} (\phi_p(u'))' + f(t, u(t)) = 0, & 0 < t < 1 \\ u(0) - \alpha u'(\xi) = 0, & u(1) + \beta u'(\eta) = 0 \end{cases}$$

收稿日期: 2011-01-14

基金项目: 上海市教育委员会科研创新基金重点资助项目(10ZZ93)

作者简介: 王平友(1981-), 男, 硕士研究生. 研究方向: 应用微分方程. E-mail: wpingy2008@163.com

贾梅(联系人), 女, 副教授. 研究方向: 应用微分方程. E-mail: jiamei_usst@163.com

其中, $\phi_p(s) = |s|^{p-2}s, p > 1, \alpha, \beta > 0, 0 < \xi < \eta < 1$, 利用范数形式的锥拉伸与锥压缩定理, 得到了边值问题至少存在一个正解、多个正解的结论.

文献[7]研究了边值问题

$$\begin{cases} (\phi_p(u'))' + \lambda a(t)f(t, u(t)) = 0, & 0 < t < 1 \\ u(0) - \alpha u'(\xi) = 0, & u(1) + \alpha u'(\eta) = 0 \end{cases}$$

其中, $\phi_p(s) = |s|^{p-2}s, p > 1, \alpha > 0, 0 < \xi < \eta < 1, \xi + \eta = 1, \lambda > 0$, 利用不动点指数理论, Leray-Schauder 度结合上下解方法, 得到了边值问题多个对称正解的存在和不存在的充分条件.

本文进一步讨论具 p -Laplace 算子的微分积分方程边值问题

$$\begin{cases} (\phi_p(u'))' + w(t)f(t, u(t)), \\ Au(t), Bu(t) = 0, & 0 < t < 1 \\ u(0) = \alpha(Au)(1), u(1) = \beta(Bu)(0) \end{cases} \quad (1)$$

正解的存在性, 其中, $Au(t) = \int_0^t g(t, s)u(s)ds$,

$$Bu(t) = \int_t^1 h(t, s)u(s)ds, 0 < \alpha, \beta < 1.$$

2 预备知识

记 $J = [0, 1], R_+ = [0, +\infty)$, 本文采用以下假设:

(H₁) $\alpha, \beta \in (0, 1), g, h \in C[J \times J, R_+]$,

$$1 - \alpha \int_0^1 g(1, s)ds > 0, 1 - \beta \int_0^1 h(0, s)ds > 0.$$

(H₂) $f \in C(J \times R_+^3, (0, +\infty)), w \in L^1[0, 1], w(t) \geq 0, t \in (0, 1)$, 在区间 $(0, 1)$ 的任意子区间上 w 不恒等于零.

由分析方法易得 p -Laplace 算子 ϕ_p 具有引理 1 的性质.

引理 1 a. $\phi_p(-s) = -\phi_p(s), \phi_p(st) = \phi_p(s)\phi_p(t), \phi_p^{-1}(s) = \phi_q(s)$;

$$\text{b. } \phi_p(s+t) \leq \begin{cases} 2^{p-2}(\phi_p(s) + \phi_p(t)), & s, t \geq 0, p \geq 2 \\ \phi_p(s) + \phi_p(t), & s, t \geq 0, 1 < p < 2 \end{cases}$$

其中, $p, q > 1$, 且满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

设 $E = C[0, 1], \|u\| = \max_{t \in [0, 1]} |u(t)|$, 则 E 是 Banach 空间. 设 $y \in L^1[0, 1], y(t) \geq 0, t \in [0, 1]$, 且 y 在 $(0, 1)$ 的任意子区间上不恒等于零, 记

$$H(C) = \frac{\alpha \int_0^1 g(1, s) \int_0^s \phi_q \left(C - \int_0^r y(\tau) d\tau \right) dr ds}{1 - \alpha \int_0^1 g(1, s) ds} + \frac{\beta \int_0^1 h(0, s) \int_0^s \phi_q \left(C - \int_0^r y(\tau) d\tau \right) dr ds}{1 - \beta \int_0^1 h(0, s) ds} +$$

$$\int_0^1 \phi_q \left(C - \int_0^r y(\tau) d\tau \right) dr \quad (2)$$

引理 2 设(H₁)成立, 则方程 $H(C) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在唯一解, 且其解 $C \in (0, \int_0^1 y(s)ds)$, 存在唯一 $\sigma \in (0, 1)$, 使得 $C = \int_0^\sigma y(s)ds$.

证明 由 $H(C)$ 的定义可知, $H: R \rightarrow R$ 连续且严格单调递增, $H(0) < 0, H(\int_0^1 y(\tau)d\tau) > 0$, 由介值定理得, 方程 $H(C) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在唯一解 $C \in (0, \int_0^1 y(\tau) d\tau)$.

令 $F(t) = \int_0^t y(\tau)d\tau$, 显然, $F(t)$ 在区间 $[0, 1]$ 上是严格单调递增且连续, 并且 $0 = F(0) < C < F(1) = \int_0^1 y(\tau)d\tau$. 故存在唯一的 $\sigma \in (0, 1)$, 使得

$$C = \int_0^\sigma y(\tau)d\tau.$$

考虑边值问题

$$\begin{cases} (\phi_p(u'))' + y(t) = 0 \\ u(0) = \alpha(Au)(1), u(1) = \beta(Bu)(0) \end{cases} \quad (3)$$

引理 3 设(H₁)成立, 则边值问题(3)有唯一解 u , 并且解 u 能被表示为

$$u(t) = \frac{\alpha \int_0^1 g(1, s) \int_0^s \phi_q \left(C - \int_0^r y(\tau) d\tau \right) dr ds}{1 - \alpha \int_0^1 g(1, s) ds} +$$

$$\int_0^t \phi_q \left(C - \int_0^r y(\tau) d\tau \right) dr$$

或者

$$u(t) = \frac{\beta \int_0^1 h(0, s) \int_0^s \phi_q \left(C - \int_0^r y(\tau) d\tau \right) dr ds}{1 - \beta \int_0^1 h(0, s) ds} -$$

$$\int_t^1 \phi_q \left(C - \int_0^r y(\tau) d\tau \right) dr$$

其中, 常数 C 满足 $H(C) = 0$.

证明 因为 $(\phi_p(u'))' = -y(t)$, 所以 $\phi_p(u') = C - \int_0^t y(\tau)d\tau$, 那么

$$u' = \phi_q \left(C - \int_0^t y(\tau) d\tau \right)$$

$$u(t) = u(0) + \int_0^t \phi_q \left(C - \int_0^r y(\tau) d\tau \right) dr$$

由于

$$u(0) = \alpha(Au)(1) = \alpha \int_0^1 g(1, s) \left(u(0) + \int_0^s \phi_q \left(C - \int_0^r y(\tau) d\tau \right) dr ds \right)$$

所以

$$u(0) = \frac{\alpha \int_0^1 g(1,s) \int_0^s \phi_q \left(C - \int_0^r y(\tau) d\tau \right) dr ds}{1 - \alpha \int_0^1 g(1,s) ds}$$

则对任意 $t \in [0, 1]$, 有

$$u(t) = \frac{\alpha \int_0^1 g(1,s) \int_0^s \phi_q \left(C - \int_0^r y(\tau) d\tau \right) dr ds}{1 - \alpha \int_0^1 g(1,s) ds} + \frac{\int_0^t \phi_q \left(C - \int_0^r y(\tau) d\tau \right) dr}{1 - \alpha \int_0^1 g(1,s) ds}$$

同理, 可得其解 u 的另一种表达形式为: 当 $t \in [0, 1]$ 时,

$$u(t) = \frac{\beta \int_0^1 h(0,s) \int_s^1 \phi_q \left(C - \int_0^r y(\tau) d\tau \right) dr ds}{1 - \beta \int_0^1 h(0,s) ds} - \frac{\int_t^1 \phi_q \left(C - \int_0^r y(\tau) d\tau \right) dr}{1 - \beta \int_0^1 h(0,s) ds}$$

易证 C 满足 $H(C) = 0$.

引理 4 设 (H_1) 成立, 则边值问题(3)的解 u 具有以下性质:

- a. u 是严格凹函数;
- b. $u(t) \geq 0, t \in [0, 1]$;
- c. $u(\sigma) = \|u(t)\| = \max_{t \in [0, 1]} u(t)$, 且 $u'(\sigma) = 0$.

证明 假设 u 是边值问题(3)的解.

a. 由于 $(\phi_p(u'))' = -y(t) \leq 0$, 且 y 在 $(0, 1)$ 的任意子区间上不恒等于零, 则 $\phi_p(u')$ 是严格单调减函数, 从而 $u'(t)$ 也是严格减函数, 故 $u(t)$ 在 $0 \leq t \leq 1$ 上是严格凹函数.

b. 由 a 可得, 对任意 $t \in [0, 1]$, 有 $u(t) \geq \min\{u(0), u(1)\}$. 不失一般性, 可设 $u(0) = \min\{u(0), u(1)\}$, 则

$$u(0) = \alpha(Au)(1) = \alpha \int_0^1 g(1,s) u(s) ds \geq \alpha \int_0^1 g(1,s) u(0) ds$$

$$(Tu)(t) = \begin{cases} \frac{\alpha \int_0^1 g(1,s) \int_0^s \phi_q \left(\int_r^{\sigma_u} w(\tau) f(\tau, u(\tau), Au(\tau), Bu(\tau)) d\tau \right) dr ds}{1 - \alpha \int_0^1 g(1,s) ds} + \frac{\int_0^t \phi_q \left(\int_s^{\sigma_u} w(\tau) f(\tau, u(\tau), Au(\tau), Bu(\tau)) d\tau \right) ds, 0 \leq t \leq \sigma_u}{1 - \alpha \int_0^1 g(1,s) ds} \\ \frac{\beta \int_0^1 h(0,s) \int_s^1 \phi_q \left(\int_{\sigma_u}^r w(\tau) f(\tau, u(\tau), Au(\tau), Bu(\tau)) d\tau \right) dr ds}{1 - \beta \int_0^1 h(0,s) ds} + \frac{\int_t^1 \phi_q \left(\int_{\sigma_u}^s w(\tau) f(\tau, u(\tau), Au(\tau), Bu(\tau)) d\tau \right) ds, \sigma_u \leq t \leq 1}{1 - \beta \int_0^1 h(0,s) ds} \end{cases} \quad (4)$$

与文献[6]类似, 可证引理 6 成立.

由 (H_1) 有 $1 - \alpha \int_0^1 g(1,s) ds > 0$, 所以 $u(0) \geq 0$. 故 $u(t) \geq 0, 0 < t < 1$.

c. 由 a 可知 $u(t)$ 是严格凹函数, 则存在唯一的 $t_0 \in [0, 1]$, 使得 $u(t_0) = \max_{0 \leq t \leq 1} u(t)$.

若 $t_0 = 0$, 则

$$u(0) = \alpha(Au)(1) = \alpha \int_0^1 g(1,s) u(s) ds \leq \alpha \int_0^1 g(1,s) u(0) ds$$

那么 $u(0)(1 - \alpha \int_0^1 g(1,s) ds) \leq 0$. 由 (H_1) 可得 $u(0) \leq 0$, 矛盾. 故 $t_0 \neq 0$.

同理, 可证 $t_0 \neq 1$. 所以 $t_0 \in (0, 1)$ 且 $u'(t_0) = 0$.

由于 $u'(t) = \phi_q \left(C - \int_0^t y(\tau) d\tau \right)$, $C = \int_0^\sigma y(\tau) d\tau$, 所以 $u'(t) = \phi_q \left(\int_t^\sigma y(\tau) d\tau \right)$, $u'(\sigma) = 0$. 故 $\sigma = t_0$.

引理 5 假设 (H_1) 成立, 则存在 $0 < \gamma_0 < \frac{1}{2}$, 使边值问题(3)的唯一解 $u(t)$ 满足 $\min_{t \in [\gamma_0, 1-\gamma_0]} u(t) \geq \gamma_0 \|u\|$.

证明 由引理 4 得到边值问题(3)的唯一解 $u(t)$ 满足

$$\frac{u(t)}{t} \geq \frac{u(\sigma)}{\sigma} \geq u(\sigma) = \|u\|, \quad t \in (0, \sigma)$$

$$\frac{u(t)}{1-t} \geq \frac{u(\sigma)}{1-\sigma} \geq u(\sigma) = \|u\|, \quad t \in (\sigma, 1)$$

所以, $u(t) \geq \min\{t, 1-t\} \|u\|$, 则存在 $\gamma_0 \in (0, \frac{1}{2})$, 使得 $\min_{t \in [\gamma_0, 1-\gamma_0]} u(t) \geq \gamma_0 \|u\|$.

定义 $K = \{u: u \in E, u(t) \geq 0, t \in [0, 1], \min_{\gamma_0 \leq t \leq 1-\gamma_0} u(t) \geq \gamma_0 \|u\|\}$, 则 K 是 E 中的一个锥.

任意 $u \in K$, 定义算子 T 为

$$(Tu)(t) = \begin{cases} \frac{\alpha \int_0^1 g(1,s) \int_0^s \phi_q \left(\int_r^{\sigma_u} w(\tau) f(\tau, u(\tau), Au(\tau), Bu(\tau)) d\tau \right) dr ds}{1 - \alpha \int_0^1 g(1,s) ds} + \frac{\int_0^t \phi_q \left(\int_s^{\sigma_u} w(\tau) f(\tau, u(\tau), Au(\tau), Bu(\tau)) d\tau \right) ds, 0 \leq t \leq \sigma_u}{1 - \alpha \int_0^1 g(1,s) ds} \\ \frac{\beta \int_0^1 h(0,s) \int_s^1 \phi_q \left(\int_{\sigma_u}^r w(\tau) f(\tau, u(\tau), Au(\tau), Bu(\tau)) d\tau \right) dr ds}{1 - \beta \int_0^1 h(0,s) ds} + \frac{\int_t^1 \phi_q \left(\int_{\sigma_u}^s w(\tau) f(\tau, u(\tau), Au(\tau), Bu(\tau)) d\tau \right) ds, \sigma_u \leq t \leq 1}{1 - \beta \int_0^1 h(0,s) ds} \end{cases}$$

引理 6 $T: K \rightarrow K$ 为全连续算子.

引理 7^[12] 设 K 是 Banach 空间 E 中的一个锥, Ω_1 和 Ω_2 是 E 中的有界开集, $0 \in \Omega_1 \subset \bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$,

$T: K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \rightarrow K$ 全连续, 如果满足条件:

$$\|Tx\| \leq \|x\|, \forall x \in K \cap \partial\Omega_1;$$

$$\|Tx\| \geq \|x\|, \forall x \in K \cap \partial\Omega_2$$

或者

$$\|Tx\| \leq \|x\|, \forall x \in K \cap \partial\Omega_2;$$

$$\|Tx\| \geq \|x\|, \forall x \in K \cap \partial\Omega_1$$

那么, T 在 $K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$ 中必有不动点.

3 主要结果

记

$$\frac{1}{L} = \min \left\{ \gamma_0 \int_{\gamma_0}^{\frac{1}{2}} \phi_q \left(\int_s^{\frac{1}{2}} w(\tau) d\tau \right) ds, \right.$$

$$\left. \gamma_0 \int_{\frac{1}{2}}^{1-\gamma_0} \phi_q \left(\int_s^1 w(\tau) d\tau \right) ds \right\}$$

$$\frac{1}{l} = \max \left\{ \frac{\phi_q \left(\int_0^1 w(\tau) d\tau \right)}{1 - \alpha \int_0^1 g(1, s) ds}, \frac{\phi_q \left(\int_0^1 w(\tau) d\tau \right)}{1 - \beta \int_0^1 h(0, s) ds} \right\}$$

定理 1 设 (H_1) 和 (H_2) 成立, 且下面的假设成立.

$$(H_3) \quad \lim_{u \rightarrow 0^+} \sup_{t \in [0, 1]} \frac{f(t, u, x, y)}{\phi_p(u)} < \phi_p(l), \text{ 关于 } x, y \in R_+ \text{ 一致成立;}$$

$$(H_4) \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \inf_{t \in [\gamma_0, 1-\gamma_0]} \frac{f(t, u, x, y)}{\phi_p(u)} > \phi_p(L),$$

关于 $x, y \in R_+$ 一致成立.

则边值问题(1)至少存在一个正解.

证明 由 (H_3) 可得, 存在 $r > 0$, 当 $0 < u \leq r$, $t \in [0, 1]$ 时, 有 $\frac{f(t, u, x, y)}{\phi_p(u)} < \phi_p(l)$, 关于 $x, y \in R_+$ 一致成立.

令 $K_r = \{u \in K : \|u\| < r\}$. 由式(4)和 (H_3) 得, 当 $u \in \partial K_r$ 时

$$\begin{aligned} \|Tu\| &= (Tu)(\sigma_u) \leq \\ &\frac{\alpha \int_0^1 g(1, s) \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^1 w(\tau) \phi_p(lu(\tau)) d\tau \right) dr ds}{1 - \alpha \int_0^1 g(1, s) ds} + \\ &\frac{\int_0^1 \phi_q \left(\int_0^1 w(\tau) \phi_p(lu(\tau)) d\tau \right) ds}{\alpha \int_0^1 g(1, s) \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^1 w(\tau) \phi_p(lr) d\tau \right) dr ds} + \\ &\frac{\int_0^1 \phi_q \left(\int_0^1 w(\tau) \phi_p(lr) d\tau \right) ds}{1 - \alpha \int_0^1 g(1, s) ds} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \phi_q \left(\int_0^1 w(\tau) \phi_p(lr) d\tau \right) ds =$$

$$\frac{r l \phi_q \left(\int_0^1 w(\tau) d\tau \right)}{1 - \alpha \int_0^1 g(1, s) ds} \leq r = \|u\|$$

同理, 可得

$$\|Tu\| = (Tu)(\sigma_u) \leq$$

$$r l \phi_q \left(\int_0^1 w(\tau) d\tau \right) \left(1 + \frac{\beta \int_0^1 h(0, s) ds}{1 - \beta \int_0^1 h(0, s) ds} \right) \leq$$

$$r = \|u\|$$

所以, 当 $u \in \partial K_r$ 时, $\|Tu\| \leq \|u\|$.

由 (H_4) 可得, 存在 $\bar{R} > 0$, 当 $u \geq \bar{R}$, $t \in [\gamma_0, 1 - \gamma_0]$ 时, 有

$$\frac{f(t, u, x, y)}{\phi_p(u)} > \phi_p(L), \text{ 关于 } x, y \in R_+ \text{ 一致成立.}$$

$$\text{取 } R > \left\{ r, \frac{\bar{R}}{\gamma_0} \right\}, \text{ 令 } K_R = \{u \in K : \|u\| < R\}.$$

则对任意的 $u \in \partial K_R$ 可得, 当 $t \in [\gamma_0, 1 - \gamma_0]$ 时, $u(t) \geq \gamma_0 \|u\| = \gamma_0 R > \bar{R}$.

考虑以下 3 种情形:

a. 当 $1 - \gamma_0 \leq \sigma_u$ 时, 由式(4)和 $Tu(0) \geq 0$, 可得 $(Tu)(1 - \gamma_0) \geq$

$$\begin{aligned} &\int_0^{1-\gamma_0} \phi_q \left(\int_s^{\sigma_u} w(\tau) f(\tau, u(\tau), Au(\tau), Bu(\tau)) d\tau \right) ds \geq \\ &\int_{\gamma_0}^{1-\gamma_0} \phi_q \left(\int_s^{1-\gamma_0} w(\tau) f(\tau, u(\tau), Au(\tau), Bu(\tau)) d\tau \right) ds \geq \\ &\int_{\gamma_0}^{1-\gamma_0} \phi_q \left(\int_s^{1-\gamma_0} w(\tau) \phi_p(Lu(\tau)) d\tau \right) ds \geq \\ &\int_{\gamma_0}^{1-\gamma_0} \phi_q \left(\int_s^{1-\gamma_0} w(\tau) \phi_p(L\gamma_0 R) d\tau \right) ds \geq \\ &R\gamma_0 L \int_{\gamma_0}^{1-\gamma_0} \phi_q \left(\int_s^{1-\gamma_0} w(\tau) d\tau \right) ds \geq R = \|u\| \end{aligned}$$

b. 当 $\sigma_u \leq \gamma_0$ 时, 由式(4)和 $Tu(1) \geq 0$, 同理, 可得

$$\begin{aligned} (Tu)(\gamma_0) &\geq \\ &\int_{\gamma_0}^{1-\gamma_0} \phi_q \left(\int_{\gamma_0}^s w(\tau) f(\tau, u(\tau), Au(\tau), Bu(\tau)) d\tau \right) ds \geq \\ &R\gamma_0 L \int_{\gamma_0}^{1-\gamma_0} \phi_q \left(\int_{\gamma_0}^s w(\tau) d\tau \right) ds \geq R = \|u\| \end{aligned}$$

c. 当 $\gamma_0 \leq \sigma_u \leq 1 - \gamma_0$ 时, 如果 $\gamma_0 < \frac{1}{2} \leq \sigma_u \leq 1 - \gamma_0$, 那么

$$(Tu)\left(\frac{1}{2}\right) \geq$$

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{2}}^0 \phi_q \left(\int_s^{\sigma_s} w(\tau) f(\tau, u(\tau), Au(\tau), Bu(\tau)) d\tau \right) ds \geq \\ & \int_{\frac{1}{2}}^{\gamma_0} \phi_q \left(\int_s^{\sigma_s} w(\tau) f(\tau, u(\tau), Au(\tau), Bu(\tau)) d\tau \right) ds \geq \\ & \int_{\frac{1}{2}}^{\gamma_0} \phi_q \left(\int_s^{\frac{1}{2}} w(\tau) f(\tau, u(\tau), Au(\tau), Bu(\tau)) d\tau \right) ds \geq \\ & \int_{\frac{1}{2}}^{\gamma_0} \phi_q \left(\int_s^{\frac{1}{2}} w(\tau) \phi_p(Lu(\tau)) d\tau \right) ds = \\ & R\gamma_0 L^{\frac{1}{p}} \phi_q \left(\int_s^{\frac{1}{2}} w(\tau) d\tau \right) ds \geq R = \|u\| \end{aligned}$$

如果 $\gamma_0 \leq \sigma_u \leq \frac{1}{2} < 1 - \gamma_0$, 类似有

$$(Tu) \left(\frac{1}{2} \right) \geq$$

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{2}}^{1-\gamma_0} \phi_q \left(\int_{\frac{1}{2}}^s w(\tau) f(\tau, u(\tau), Au(\tau), Bu(\tau)) d\tau \right) ds \geq \\ & R\gamma_0 L \int_{\frac{1}{2}}^{1-\gamma_0} \phi_q \left(\int_{\frac{1}{2}}^s w(\tau) d\tau \right) ds \geq R = \|u\| \end{aligned}$$

所以, 当 $u \in \partial K_R$ 时, $\|Tu\| \geq \|u\|$.

由引理7得算子 T 在 $\bar{K}_R \setminus K_r$ 至少存在一个不动点 u , 由于 u 是边值问题(1)的解当且仅当 u 是 T 的不动点, 故边值问题(1)至少存在一个正解 u , 且 $r \leq \|u\| \leq R$.

定理2 设 (H_1) 和 (H_2) 成立, 且存在常数 $0 < \varepsilon < 1$, 使得下面假设成立.

$$(H_5) \quad \lim_{u \rightarrow 0^+} \inf_{t \in [\gamma_0, 1-\gamma_0]} \frac{f(t, u, x, y)}{\phi_p(u)} > \phi_p(L),$$

关于 $x, y \in R_+$ 一致成立;

$$(H_6) \quad \text{如果 } p > 2, \text{ 则 } \overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [0, 1]} \frac{f(t, u, x, y)}{\phi_p(u)} <$$

$\phi_p(\varepsilon l)$, 关于 $x, y \in R_+$ 一致成立;

$$(H_7) \quad \text{如果 } 1 < p \leq 2, \text{ 则 } \overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [0, 1]} \frac{f(t, u, x, y)}{\phi_p(u)}$$

$$\|Tu\| = (Tu)(\sigma_u) \leq \frac{\alpha \int_0^1 g(1, s) \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^1 w(\tau) f(\tau, u(\tau), Au(\tau), Bu(\tau)) d\tau \right) dr ds}{1 - \alpha \int_0^1 g(1, s) ds} +$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^1 w(\tau) f(\tau, u(\tau), Au(\tau), Bu(\tau)) d\tau \right) ds \leq \\ & \frac{\alpha \int_0^1 g(1, s) \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^1 w(\tau) (M + \phi_p(\varepsilon lu(\tau))) d\tau \right) dr ds}{1 - \alpha \int_0^1 g(1, s) ds} + \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^1 w(\tau) (M + \phi_p(\varepsilon lu(\tau))) d\tau \right) ds \leq \end{aligned}$$

$$\frac{\phi_q \left(\int_0^1 w(\tau) d\tau \right)}{1 - \alpha \int_0^1 g(1, s) ds} (M^{q-1} + \varepsilon lR) \leq \frac{M^{q-1}}{l} + \varepsilon R \leq R = \|u\|$$

或者

$< \phi_p(2^{2-q}\varepsilon l)$, 关于 $x, y \in R_+$ 一致地成立.

证明 由 (H_5) 得, 存在 $r > 0$, 当 $0 < u \leq r, t \in [\gamma_0, 1 - \gamma_0]$ 时, 有 $f(t, u, x, y) > \phi_p(Lu)$, 关于 $x, y \in R_+$ 一致成立.

令 $K_r = \{u \in K : \|u\| \leq r\}$. 与定理1证明类似, 可得, 当 $u \in \partial K_r$ 时, $\|Tu\| \geq \|u\|$.

由 (H_6) 得, 当 $p > 2$ 时, 存在 $\bar{R}_1 > 0$, 当 $u \geq \bar{R}_1, t \in [0, 1]$ 时, 有 $f(t, u, x, y) < \phi_p(\varepsilon lu)$, 关于 $x, y \in R_+$ 一致成立.

由 (H_7) 得, 当 $1 < p \leq 2$ 时, 存在 $\bar{R}_2 > 0$, 当 $u \geq \bar{R}_2, t \in [0, 1]$ 时, 有 $f(t, u, x, y) < \phi_p(2^{2-q}\varepsilon lu)$, 关于 $x, y \in R_+$ 一致成立.

记 $\bar{R} = \max\{\bar{R}_1, \bar{R}_2\}$, $M_1 = \max_{t, s \in [0, 1]} |g(t, s)|$, $M_2 = \max_{t, s \in [0, 1]} |h(t, s)|$, 当 $u \in K, \|u\| = \bar{R}, t \in [0, 1]$ 时, 有 $(Au)(t) \leq M_1 \bar{R}, (Bu)(t) \leq M_2 \bar{R}$.

记 $D = [0, 1] \times [0, \bar{R}] \times [0, M_1 \bar{R}] \times [0, M_2 \bar{R}]$, $M = \max_{(t, u, x, y) \in D} f(t, u, x, y)$.

取 $R > \max\left\{\bar{R}, \frac{(2M)^{q-1}}{2(1-\varepsilon)l}, \frac{M^{q-1}}{(1-\varepsilon)l}\right\}$, 则当 $u \in \{u \in K : \|u\| = R\}$ 时, 有

$$0 \leq f(t, u(t), (Au)(t), (Bu)(t)) \leq M + \phi_p(\varepsilon lu(t)), p > 2$$

$$0 \leq f(t, u(t), (Au)(t), (Bu)(t)) \leq M + \phi_p(2^{2-q}\varepsilon lu(t)), 1 < p \leq 2$$

由于当 $p > 2$ 时, 有 $1 < q < 2$, 那么

$$\|Tu\| = (Tu)(\sigma_u) \leq \frac{\beta \int_0^1 h(0,s) \int_0^1 \phi_q \left[\int_0^1 w(\tau) (M + \phi_p(\epsilon lu(\tau)) d\tau) dr \right] ds}{1 - \beta \int_0^1 h(0,s) ds} + \int_0^1 \phi_q \int_0^1 w(\tau) [M + \phi_p(\epsilon lu(\tau)) d\tau] ds \leq \frac{\phi_q \left(\int_0^1 w(\tau) d\tau \right)}{1 - \beta \int_0^1 h(0,s) ds} (M^{q-1} + \epsilon lR) \leq \frac{M^{q-1}}{l} + \epsilon R \leq R = \|u\|$$

而当 $1 < p \leq 2$ 时, 有 $q \geq 2$, 同理, 得

$$\|Tu\| = (Tu)(\sigma_u) \leq \frac{\alpha \int_0^1 g(1,s) \int_0^1 \phi_q \left[\int_0^1 w(\tau) (M + \phi_p(2^{2-q}\epsilon lu(\tau)) d\tau) dr \right] ds}{1 - \alpha \int_0^1 g(1,s) ds} + \int_0^1 \phi_q \int_0^1 w(\tau) (M + \phi_p(2^{2-q}\epsilon lu(\tau)) d\tau) ds \leq \frac{2^{q-2} \phi_q \left(\int_0^1 w(\tau) d\tau \right)}{1 - \alpha \int_0^1 g(1,s) ds} \cdot$$

$$[(M^{q-1} + 2^{2-q}\epsilon lu(\tau))] \leq 2^{q-2} \frac{M^{q-1}}{l} + \epsilon R \leq R = \|u\|$$

或者

$$\|Tu\| = (Tu)(\sigma_u) \leq \frac{\phi_q \left(\int_0^1 w(\tau) (M + \phi_p(2^{2-q}\epsilon lu(\tau)) d\tau) \right)}{1 - \beta \int_0^1 h(0,s) ds} \leq \frac{2^{q-2} \phi_q \left(\int_0^1 w(\tau) d\tau \right)}{1 - \beta \int_0^1 h(0,s) ds} (M^{q-1} + 2^{2-q}\epsilon lR) \leq$$

$$R = \|u\|$$

由引理 7 得算子 T 在 $\bar{K}_R \setminus K_r$ 至少存在一个不动点 u , 由于 u 是边值问题(1)的解当且仅当 u 是 T 的不动点, 故边值问题(1)至少存在一个正解 u , 且 $r \leq \|u\| \leq R$.

参考文献:

- [1] 葛渭高. 非线性常微分方程边值问题[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [2] GE Wei-gao, REN Jing-li. New existence theorem positive solutions for the Sturm-Liouville boundary-value problem[J]. Appl Math Comput, 2004, 148: 631 - 644.
- [3] WEBB J R L. Positive solutions of some three point boundary-value problem via fixed point index theory[J]. Nonlinear Analysis, 2001, 47: 4319 - 4332.
- [4] FENG Han-ying, GE Wei-gao. Multiple position for m-point boundary-value problems with a one-dimensional p -Laplacian[J]. Nonlinear Analysis, 2008, 68: 2269 - 2279.
- [5] MA Ru-yun, REN Li-shun. Positive solutions for nonlinear m-point boundary value problems of Dirichlet type via fixed-point index theory[J]. Applied Mathematics Letters, 2003, 99: 863 - 869.
- [6] LIAN Hai-rong, GE Wei-gao. Positive solutions for a four-point boundary value problem with the p -Lapla-

cian[J]. Nonlinear Analysis, 2008, 68: 3493 - 3503.

- [7] JI De-hong, GE Wei-gao. The existence of symmetric positive solutions for Sturm-Liouville like four-point boundary value problem with a p -Laplacian operator[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 189: 1087 - 1098.
- [8] LI Xiang-feng. Multiple positive solutions for some four-point boundary value problems with p -Laplacian[J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 202: 413 - 426.
- [9] BAI Chuan-zhi, FANG Jin-xuan. Existence of multiple positive solutions for nonlinear m -point boundary value problems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, 140: 297 - 305.
- [10] WANG You-yu, HOU Cheng-min. Existence of multiple positive solutions for one-dimensional p -Laplacian[J]. J Math Anal Appl, 2006, 315: 144 - 153.
- [11] SU Wei-hua, WEI Zhong-li, WANG Bao-he. The existence of positive solutions for a nonlinear four-point singular boundary value problem with a p -Laplacian operator[J]. Nonlinear Analysis, 2007, 66: 2204 - 2217.
- [12] 郭大钧, 孙经先, 刘兆理. 非线性常微分方程泛函方法[M]. 2版. 济南: 山东科学技术出版社, 2006.