

文章编号:1007-6735(2011)04-0405-04

一种改进的小波阈值去噪方法

王彦青, 魏连鑫
(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 介绍了基于阈值选取的小波去噪原理及实现方法, 并对传统的软、硬阈值方法进行分析, 提出一种改进的阈值函数. 实验结果表明, 新方法能有效地减少平稳信号与非平稳信号中产生的震荡和恒定偏差的影响, 去噪效果优于传统方法.

关键词: 小波分析; 阈值去噪; 信噪比; 均方差

中图分类号: TP 391 **文献标志码:** A

Analysis on modified wavelet threshold de-noising functions

WANG Yan-qing, WEI Lian-xin
(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: For the wavelet threshold de-noising method, the threshold selection of wavelet was addressed based on de-noising principle, and the traditional soft and hard threshold methods were discussed. On this basis, the modified threshold function was introduced. The results of experimental simulations indicate that the modified de-noising method can reduce effectively the stationary and non-stationary signals generated by the impact of shocks and the constant bias. The new threshold function is of better de-noising capability than the traditional functions.

Key words: wavelet analysis; threshold de-noising; signal to noise ratio; mean square error

小波去噪作为小波分析在信号处理领域的重要应用之一, 其优越性在于小波变换能同时在时域和频域对信号进行分析, 实现自动变焦的功能, 因此, 能有效地区分信号中的突变部分和噪声, 从而达到很好的去噪效果. 目前, 基于小波分析的去噪方法主要有比例萎缩去噪、相关法去噪和阈值去噪这 3 种. 其中, 阈值去噪方法是 Donoho 在 1995 年提出的一种简单有效的小波去噪方法^[1], 该方法在 Besov 空

间上可得到最佳估计值, 而其他线性估计都不能得到同样的结果, 因此, 在信号去噪领域得到了广泛的应用^[2].

1 基于小波分析的阈值去噪方法

信号和噪声在小波域中的表现形态不同, 即它们的小波分析幅值随尺度变化呈现出不同的变化趋

收稿日期: 2010-06-04
基金项目: 上海市高校选拔培养优秀青年教师科研专项基金资助项目(5107341007)
作者简介: 王彦青(1984-), 男, 硕士研究生. 研究方向: 小波分析. E-mail: wyq198411@163.com
魏连鑫(联系人), 男, 讲师. 研究方向: 小波分析. E-mail: weilianxin@usst.edu.cn

势.随着尺度的增加,噪声的幅值很快衰减为零,而真实信号的幅值基本不变.小波去噪就是根据这一机理,在小波域采取有效的数学方法尽量多地剔除由噪声产生的系数,同时最大限度地保留真实信号系数,最后由经过处理的小波系数重构信号,即去噪后的信号.

目前,阈值去噪法是小波去噪应用最广泛的方法之一.基于上述理论,Donoho和Johnstone等从理论上证明了它在极小化极大意义上的近似最优性,它的理论依据是,属于Besov空间的信号的能量主要集中在小波域内有限的几个系数中,而噪声的能量却分布在整个小波域内,因此,经过小波分解后,信号的小波变换系数要大于噪声的系数,于是,可以选取适当的阈值 T ,当小波系数小于 T 时,认为这时的系数主要是由噪声引起的,并置为零,予以舍弃;当小波系数大于 T 时,则认为主要是由信号引起的,将其直接保留或按某一固定量向零收缩,然后由新的小波系数进行重构,得到去噪的信号,从而实现信号和噪声的分离.

2 小波阈值去噪实现步骤

可将含噪声的一维信号表示为

$$y(i) = f(i) + z(i), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

式中, $f(i)$ 为原始信号; $y(i)$ 为含噪信号; $z(i)$ 为高斯白噪声, $z(i) \sim N(0, \sigma^2)$; σ 为噪声强度.

对于一维信号来说,首先对其进行离散采样得到 N 点离散信号 $f(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$,其小波变换为

$$Df(j, k) = 2^{-\frac{j}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \phi(2^{-j}n - k)$$

式中, $Df(j, k)$ 为小波系数,为了方便起见,记为 $d_{j,k}$; $\phi(2^{-j}n - k)$ 为尺度函数; k 为尺度函数平移的单位数.

小波去噪过程即从信号 $y(i)$ 中将噪声 $z(i)$ 除去,得到原始信号 $f(i)$ 的最佳逼近.

2.1 Donoho 提出的小波阈值去噪算法

a. 选定合适的小波函数和分解尺度 j ,对含噪信号 $y(i)$ 进行小波分解,得到尺度系数 c_j ,小波系数 $d_1, d_2, \dots, d_j$.

$$\begin{cases} c_{j,k} = \sum c_{j-1,n} \bar{h}_{n-2k}, \\ d_{j,k} = \sum c_{j-1,n} \bar{g}_{n-2k}, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (1)$$

式中, $\{g_n\}$ 为低通滤波器; $\{h_n\}$ 为高通滤波器; N 为采样点集.

b. 保留所有尺度系数 c_j ,对各尺度的小波系数选定一个阈值 T ,并利用阈值函数进行处理,得到小波系数 $\bar{d}_1, \bar{d}_2, \dots, \bar{d}_j$.

c. 由 c_j 和处理后的小波系数利用式(2)进行重构,得到去噪后的信号 $f(i)$.

$$\begin{aligned} c_{j-1,k} &= \sum c_{j,n} h_{k-2n} + \sum d_{j,n} g_{k-2n}, \\ k &= 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (2)$$

2.2 阈值 T 的选取

小波阈值去噪方法的关键是对阈值的具体估计.阈值选取的优劣直接影响到去噪的效果,本文阈值设定为

$$T = \sigma_n \sqrt{2 \ln N}$$

式中, σ_n 为噪声的标准差; N 为信号长度(采样点集).

该阈值选取方法是Donoho在1994年提出的,并证明了这种估计在信号属于Besov集时在大量风险函数下获得近似理想的去噪风险^[3].

2.3 阈值函数的选取

对于上述的阈值 T ,阈值函数的选取体现了对超过和低于阈值的小波系数模的处理策略和估计方法的不同,最为常用的是硬阈值函数和软阈值函数.

用软、硬阈值函数对各尺度的小波系数进行处理

软阈值函数

$$\bar{d}_{j,k} = \begin{cases} \text{sgn}(d_{j,k}) (|d_{j,k}| - T) & |d_{j,k}| \geq T \\ 0 & |d_{j,k}| < T \end{cases} \quad (3)$$

硬阈值函数

$$\bar{d}_{j,k} = \begin{cases} d_{j,k} & |d_{j,k}| \geq T \\ 0 & |d_{j,k}| < T \end{cases} \quad (4)$$

式中, $\bar{d}_{j,k}$ 为阈值化小波系数; $d_{j,k}$ 为小波系数.

从图1可以看出,软阈值函数是硬阈值函数的扩展,它首先将绝对值小于阈值 T 的系数置为零,然后将其余系数向零进行缩进.硬阈值函数可以很好地保留信号的局部特征,但由于硬阈值在 $\pm T$ 处不连续,因此,信号在重构的时候可能会产生一些震荡;软阈值函数在 T 处是连续的,重构信号比较光滑,但当小波系数较大时,处理前和处理后的小波系数之间总存在较大的恒定偏差,从而影响重构信号与真实信号的逼近程度.

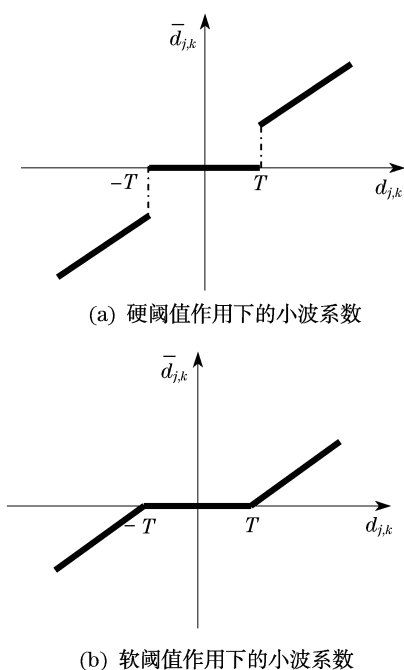


图1 硬阈值函数与软阈值函数作用下的小波系数
Fig.1 Wavelet coefficients by the role of hard and soft threshold function

3 改进的阈值函数

由以上分析可知,软、硬阈值函数去噪方法本身还存在一些缺陷,从而制约了小波阈值去噪方法的广泛应用.本文将两者结合,采用改进后的阈值函数

$$\bar{d}_{j,k} = \begin{cases} \text{sgn}(d_{j,k}) (|d_{j,k}| - \alpha T) & |d_{j,k}| \geq T \\ 0 & |d_{j,k}| < T \end{cases} \quad (5)$$

其中, $\alpha \in [0, 1]$, α 取 0 或 1 时式(5)分别为硬阈值函数和软阈值函数.

图2为当 $\alpha = 0.5$ 时的函数图像,可以看出,改进的阈值函数中的因子 α 的不同取值可控制其在

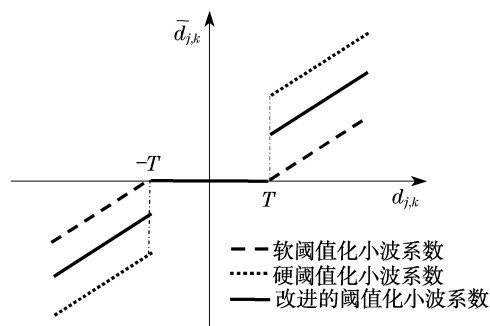


图2 改进的阈值函数与软、硬阈值函数
Fig.2 Modified threshold function, soft and hard threshold function

软、硬阈值函数之间变动,对于缩小原始信号和去噪信号之间的恒定偏差以及减少信号震荡起到调节控制作用^[4].新阈值函数是一个更优、更灵活的选择,只要在 0 和 1 之间调整 α 的大小,就可以获得更好的去噪效果.

4 MATLAB 仿真数值实验

在实验中分别采用软、硬阈值函数和改进阈值函数对两个加入白噪声的周期信号与非平稳信号进行去噪处理.

选取 db3 小波,该小波是具有三阶消失矩的紧支集正交小波,能够避免频域区间被截断,适用于提取不同频率范围的步信息,对染噪信号进行 5 层分解,选取相同的阈值,作用于 3 个阈值函数,然后对阈值化后的小波系数进行重构得到去噪信号,结果如图 3 和图 4(见下页)所示.

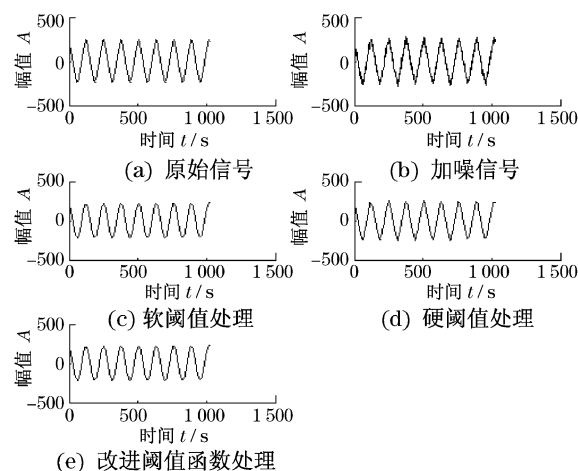


图3 周期信号经3种阈值函数去噪后的效果图
Fig.3 Periodic signal by three threshold de-noising functions

由图3和图4可以看出,利用改进的阈值函数处理后的平稳信号与非平稳信号和原信号相差无几,且信号逼近程度高,并有效地抑制了振荡现象,波形平滑,损失较小.

表1和表2为3种阈值函数的峰值信噪比和均方误差的对比.峰值信噪比 λ 和均方误差 σ ^[5] 分别为

$$\lambda = \lg \frac{\sum f^2(i)}{(s(i) - f(i))^2}$$

$$\sigma = \frac{1}{N} \sum (s(i) - f(i))^2$$

式中, $f(i)$ 为原始信号; $s(i)$ 为去噪信号; N 为信号长度.

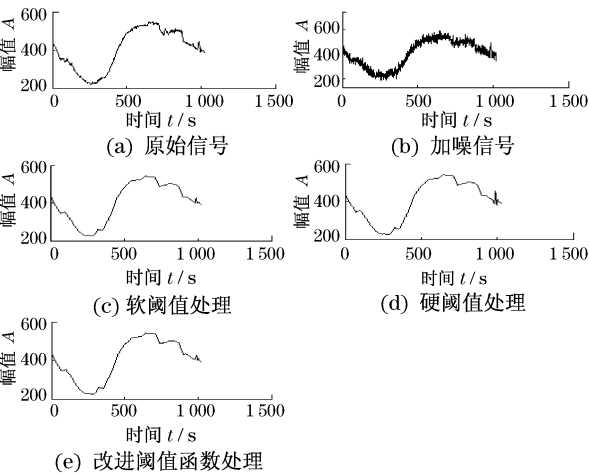


图4 非平稳信号经3种阈值函数去噪后的效果图
Fig.4 Non-stationary signal denoising by three threshold functions

表1 3种阈值函数对周期信号去噪的峰值信噪比和均方误差比较

去噪函数	对比指标	
	λ/dB	$\sigma/10^{-3}$
软阈值函数	17.653 7	20.513 7
硬阈值函数	19.491 3	16.602 1
改进的阈值函数	19.897 1	15.844 3

表2 3种阈值函数对非平稳信号去噪的峰值信噪比和均方误差比较
Tab.2 Non-stationary signal de-noising by three threshold functions PSNR and MSE

去噪函数	对比指标	
	λ/dB	$\sigma/10^{-3}$
软阈值函数	26.857 7	18.966 0
硬阈值函数	26.919 9	18.830 7
改进的阈值函数	26.967 5	18.727 7

从表1和表2中的数据对比结果可见,硬阈值函数要比软阈值函数去噪效果好,这是因为软阈值函数得到的去噪信号图象虽然比较平滑,但损失了更多原始信号信息,而本文提出的改进后的阈值函数与软、硬阈值函数对比具有最佳的去噪性能.另外,表1和表2中的计算结果也与小波分析的阈值设置有关,如果阈值设置适中,它的去噪性能也将会不同程度的提高.

5 结束语

由于噪声和有用信号的频率分布特点以及小波变换的时频特性,使得小波信号去噪具有了更为突出的优势.本文根据小波阈值去噪的基本原理,结合软、硬阈值去噪的方法,提出了一种改进的阈值函数,它结合了软、硬阈值函数的优点,又在一定程度上克服了这两种方法的不足,具有更好的灵活性和数学特性.从实验对比可以看出,其对周期信号和非平稳信号的去噪效果均优于软、硬阈值去噪方法.

参考文献:

[1] DONOHO D L. Denoising by soft thresholding [J]. IEEE Trans on Inform Theory,1995,41(3):613-627.
[2] 向晓燕,谭子尤,张书真. 基于小波的阈值消噪方法讨论及实现[J]. 现代电子技术,2007(17):172-173.
[3] DONOHO D L. Denoising orthonormal ridgelets and linear singularities[J]. SIAM J Math Anal,2000,31(5):1062-1099.
[4] MAX ZHOU C, KEMP I J. Interpretation of wavelet analysis and it sapplication in partial discharge detection [J]. IEEE Trans on Dielect Ricsand Elect Rical Insulation,2002,9(3):446-457.
[5] DOWNIE T R, SILVERMAN B W. The discrete multiple wavelet transform and thresholding methods[J]. IEEE Trans on Signal Processing,1998,46(9):2558-2561.