

文章编号:1007-6735(2011)05-0457-16

基于 Mike-Farmer 委托驱动模型的研究

顾高峰, 任 飞, 蒋志强, 周炜星

(华东理工大学 商学院, 上海 200237)

摘要: Mike-Farmer 微观模型是功能强大的委托驱动模型,能再现很多经典的统计规律.本文介绍了 Mike-Farmer 委托驱动模型的构建过程, Mike-Farmer 委托驱动模型生成的收益率,发现收益率在不同时间尺度下遵循幂律分布,服从负三次方定律.以 Mike-Farmer 委托驱动模型为平台,进行收益率幂律分布和波动率聚簇效应的成因研究,发现收益率的幂律分布和市价订单委托价格的概率分布相关,而波动率的聚簇效应与订单委托价格时间序列的时间记忆性保持一致性.最后简要介绍了模型的应用前景.

关键词: 金融物理学; 委托驱动模型; 收益率幂律分布; 波动率聚簇效应

中图分类号: F 830.91 **文献标志码:** A

Mike-Farmer order-driven model

GU Gao-feng, REN Fei, JIANG Zhi-qiang, ZHOU Wei-xing

(School of Business, East China University of Science and Technology,
Shanghai 200237, China)

Abstract: Mike-Farmer microscopic model is a powerful order-driven model. It can reproduce many stylized facts. In the paper, the Mike-Farmer model was introduced in detail. It was found that the distributions of returns obtained from the model at different timescales can be modeled as the power-law distribution in the tails, whose exponents are close to the well-known cubic law. The reasons for the power-law distribution of returns and the clustering effect of volatilities were then studied and it was concluded that power-law tails are caused by the power-law tail in the distribution of market order prices and the clustering effects are related to the long memory in the time series of submitting order prices. The application of the model was briefly presented.

Key words: econophysics; order-driven model; power-law distribution of returns; clustering effect of volatilities

金融市场是一个极其复杂的体系,众多市场参与者相互博弈来获得额外的收益.经过各国学者的深入

研究,金融市场中很多程式化规律已被揭示,掌握这些经典的统计规律对于构建市场微观模型具有十分

收稿日期: 2011-10-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11075054, 10905023, 71101052);上海市晨光计划人才资助项目(CG201032)

作者简介: 顾高峰(1982-),男,助理研究员.研究方向:金融物理、金融工程等. E-mail: gfgu@ecust.edu.cn

周炜星(联系人),男,教授.研究方向:金融物理、复杂系统、金融工程等. E-mail: wxzhou@ecust.edu.cn

重要的作用.多数经济学模型假设交易者是有有限理性的,而且具有不同的策略^[1].交易者大致分为两大类型:基本面交易者和技术交易者.基本面交易者认为证券的价格由其价值决定,他们在证券价格低于其实际价值时买入证券,在证券价格高于其价值时卖出证券.而技术交易者通过各种分析技术,试图预测证券价格的走势,从而确定自己的交易策略.另外,理论定向模型在微观模型领域中也发挥着重要的作用^[2-4].金融学领域主要有三类微观模型试图重构这些主要的统计规律^[5].第一类是动态模型,如收益率多重分形模型^[6-7]、多重分形随机游走模型^[8-9]等.第二类是经纪人模型,包括单经纪人模型和多经纪人模型,模型中经纪人遵循事先约定的规则进行交易,价格的变化由需求和供给之间的不平衡性确定.学术界有多类经纪人模型,如分类交易者博弈模型^[10-12]、逾渗模型^[13-18]、少数者博弈模型^[19-25]和自旋模型^[26-35]等.其中,少数者博弈模型是比较重要的一个类型,它可以再现很多统计规律.第三类是委托驱动模型,这类模型的关键在于重构指令簿动态行为^[36-37],价格由连续双向拍卖机制生成^[38].经纪人模型和委托驱动模型分别是报价驱动市场和委托驱动市场的缩影,从构建微观模型而言,基于委托驱动市场的模型更加有助于理解证券市场的微观结构和内在规律.

世界上多数委托驱动市场都采用连续双向拍卖作为市场的交易机制,市场参与者提交或者撤销订单,交易系统根据价格-时间优先的原则进行交易.各国学者在构建委托驱动模型上开展了很多有意义的工作^[39],其历史最早可以追溯到上世纪60年代^[40].为了检验模型是否符合价格动态演化的规律,可以研究模拟生成的时间序列的统计规律,如收益率的概率分布和时间相关性、波动率的长期记忆性等.这些经典的统计规律将更加有助于优化模型,从而更加深刻地理解宏观现象背后所隐藏的内在规律.例如,很多学者发现 Bak-Paczuski-Shubik 模型^[41]和 Maslov 模型^[42]生成的收益率时间序列的赫斯特指数小于理论值后便进行这方面的研究,很多新的委托驱动模型由此产生^[43-44].

我国股市属于委托驱动市场,采用连续双向拍卖交易机制,因此,从微观上看,应该构建委托驱动模型(或称指令驱动模型).大部分委托驱动模型仍然采用多种无实证检验的假设,而 Mike 和 Farmer 的最新研究^[45],则是通过实证研究确定下单和撤单的统计规律,并在此基础上构建微观模型,被称为 Mike-Farmer 模型,简称为 MF 模型.这是委托驱动

模型建模研究的重要突破.相比于其它委托驱动模型,MF 模型是一个功能强大的微观模型,能够准确地再现很多经典的统计规律^[45],如收益率时间序列具有幂律尾分布,且服从负三次方定律;收益率时间序列不具有长期记忆性,买卖价差和订单生存期服从幂律尾分布等.MF 模型提供了一个良好的平台去研究委托驱动市场中各种统计规律的内在机理,同时在资产定价和风险管理中也将起到重要作用.

1 Mike-Farmer 模型简介

Mike-Farmer 模型主要由下单过程和撤单过程两部分组成^[45],Mike 和 Farmer 以伦敦交易所股票 AZN 的高频数据为研究对象,分别对两个过程进行详细的描述.

1.1 下单过程

股市中一个订单由其委托价、委托量和符号确定,由于在 MF 模型中订单的委托量固定为一个单位,所以,在下单过程中,MF 模型需要对订单的委托价格时间序列和订单符号时间序列进行模拟.在确定订单符号时,可用“+1”代表买单,“-1”代表卖单,模拟生成一个由“+1”和“-1”组成的订单符号时间序列.图1为伦敦交易所市价订单和限价订单的符号时间序列的赫斯特指数 H 的分布图.

从图1中计算得到市价订单的赫斯特指数的均值为 $H = 0.70 \pm 0.01$,限价订单的赫斯特指数的均值为 $H = 0.72 \pm 0.01$ ^[46],说明无论是市价订单还是限价订单,其符号时间序列具有长期记忆性,这是一个普遍接受的结论,其赫斯特指数大于0.5.模型中 Mike 和 Farmer 用分数布朗运动模拟生成订单符号时间序列^[45].

对于订单的委托价,很多学者进行过实证研究,Zovko 和 Farmer 以伦敦交易所 50 只股票数据(1998年8月1日~2000年4月31日)为对象,分析指令簿中订单相对价格(委托价和本方最优价格的对数距离)的概率分布,发现买单和卖单的概率分布在整体上都遵循幂律尾分布,其尾指数为 $\zeta_x = 1.5$ ^[47].Bouchaud 等人研究巴黎交易所 3 只股票的指令簿数据,发现指令簿中订单的相对价格服从幂律分布,且其尾指数 $\zeta_x = 0.6$ ^[48].Potters 和 Bouchaud 分析纳斯达克市场 3 只股票的数据(2002年6月1日—2002年7月15日),发现指令簿中订单的相对价格服从幂律分布,其尾指数为 $\zeta_x = 1$ ^[49].Maskawa 研究伦敦交易所中电子交易系统 13 只股票的数据(2004年7月

~12月),发现相对价格服从幂律分布,其尾指数为 $\zeta_x = 1.5^{[50]}$,这与 Zovko 和 Farmer 的结论相一致^[47]. 同时 Maskawa 也分析了激进订单相对价格的概率分布,发现其负尾分布比正尾分布下降得快. Mike 和 Farmer 研究了伦敦交易所 AZN 和其它 24 只股票的数据,发现它们的相对对数价格服从学生分布^[45],其尾指数 ζ_x 在 $[1.00, 1.65]$ 区间中变化,且买单和卖单的概率分布至少在某个范围内独立于买卖价差. 顾高峰等人以中国深圳交易所 23 只股票的高频数据为研究对象,发现相对价格的概率分布左右不对称,但具有幂律尾分布,其尾指数介于 1~2 之间^[51].

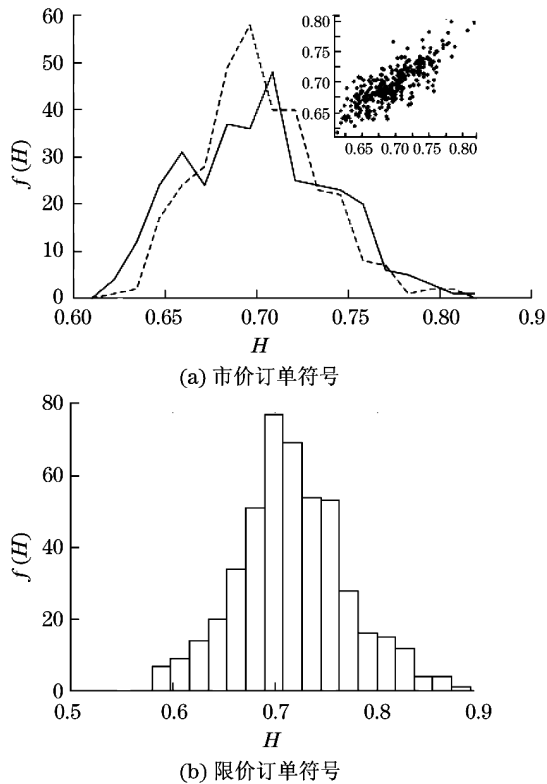


图1 市价订单符号和限价订单符号赫斯特指数 H 的分布图

Fig.1 Histogram of Hurst exponents H for market orders and limit orders

MF 模型用相对对数价格对下单位置进行描述. 相对价格 x 定义为订单委托价格和指令簿中本方最优价格之间的对数距离,对于买单其表达式为

$$x(t) = \pi(t) - \pi_b(t-1) \quad (1)$$

式中, $\pi(t)$ 为 t 时刻订单委托价格的对数值; $\pi_b(t-1)$ 为 $t-1$ 时刻指令簿中最高买价的对数值.

对于卖单得到

$$x(t) = \pi_a(t-1) - \pi(t) \quad (2)$$

式中, $\pi_a(t-1)$ 为 $t-1$ 时刻指令簿中最低卖价的对数值.

图2为股票 AZN 相对价格 x 的概率密度函数 $P(x)$ 的示意图.

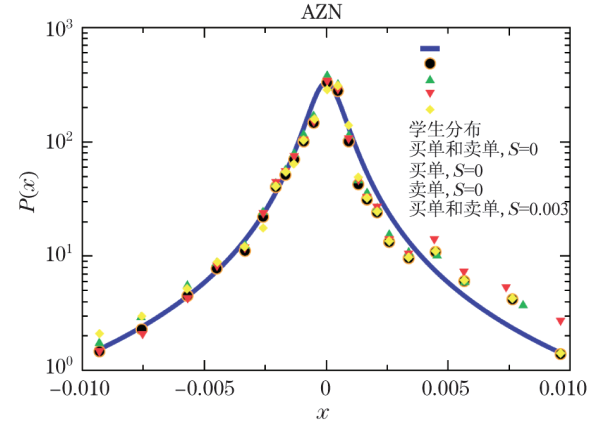


图2 股票 AZN 相对价格 x 的概率密度函数 $P(x)$ 的示意图
Fig.2 Plot of the probability density function $P(x)$ of relative prices x

在图2中发现相对价格的概率密度函数 $P(x)$ 关于 $x=0$ 轴左右对称,且在 $x=0$ 处达到最大值,说明大部分交易者在本方最优价格处下单,提高成交的概率,在指令簿内部和外部下单的数量基本相近. 密度函数在整体上服从学生分布,如图2中实线所示,其自由度 $\zeta = 1.3$. 买单和卖单的概率密度函数几乎没有差别,两者重合在一起. 相对价格在买卖价差 $S=0$ 和 $S=0.003$ 的条件概率分布相同,说明概率密度函数和买卖价差无关.

1.2 撤单过程

在零智力模型中^[38,52],撤单是一个泊松过程,而在 MF 模型中, Mike 和 Farmer 采用了不同的撤单过程,他们认为影响指令簿中订单的撤单概率有3个因素: a. 订单在指令簿中的位置变化; b. 指令簿中买单和卖单的不均衡度; c. 指令簿中所有订单的总量.

本文先研究撤单的第一个因素,定义 $\Delta_i(t)$ 为 t 时刻订单 i 和对方最优价格之间的对数距离,对于买单得到 $\Delta_i(t) = \pi_a(t) - \pi$,对于卖单得到 $\Delta_i(t) = \pi - \pi_b(t)$,其中, π 为订单委托价 p 的对数值,即 $\pi = \ln p$, π_a 和 π_b 分别为指令簿中最低卖价和最高买价的对数值. 这样 $\Delta_i(0)$ 就是下单时两者之间的距离. 撤单概率和 $\Delta_i(t)$ 有关,离对手最优价格的距离变大,撤单的概率就增加;反之则减少. 定义 $\Delta_i(t)$ 和 $\Delta_i(0)$ 的比值为 $y_i(t)$,即 $y_i(t) = \Delta_i(t)/\Delta_i(0)$,可知下单时 $y_i = 1$,成交时 $y_i = 0$. 图3(a)(见下页)为撤单条件概率函数 $P(C|y)$ 关于 y 的示意图,从图中可知,当 y 趋向于零时,撤单

概率也趋向于零;而当 y 增大时,撤单的概率也随之增大,最后到达一个恒定值. Mike 和 Farmer 用函

数 $K_1[1 - e^{-y_i}]$ 进行拟合,得到参数 $K_1 \approx 0.012$.

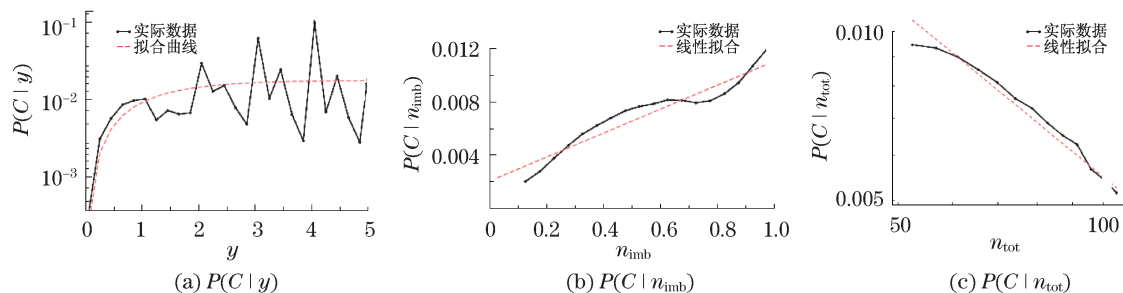


图3 撤单条件概率函数 $P(C|y)$, $P(C|n_{imb})$ 和 $P(C|n_{tot})$ 的示意图

Fig.3 Probabilities of cancellation conditioned on y , n_{imb} and n_{tot}

撤单的第二个因素是指令簿中买单和卖单的不均衡度. 对于买单定义指令簿的不均衡度为 $n_{imb} = n_{buy}/(n_{buy} + n_{sell})$; 对于卖单定义不均衡度为 $n_{imb} = n_{sell}/(n_{buy} + n_{sell})$. 其中, n_{buy} 和 n_{sell} 分别为指令簿中买单和卖单的订单数量. 图 3(b) 为撤单条件概率函数 $P(C|n_{imb})$ 关于不均衡度 n_{imb} 的示意图, 从图中可以看到, 随着不均衡度 n_{imb} 的增大, 撤单的概率也随之增大, 这意味着当指令簿中买单或者卖单的数量增加时, 它们相应的撤单概率也随之增大. Mike 和 Farmer 用函数 $K_2(n_{imb} + B)$ 进行拟合, 得到参数 $K_2 \approx 0.0098$, $B \approx 0.20$.

现在研究撤单的最后因素, 指令簿中所有订单的总量. 定义指令簿中订单的总量为买单总量和卖单总量之和, 即 $n_{tot} = n_{buy} + n_{sell}$. 图 3(c) 给出了撤单条件概率函数 $P(C|n_{tot})$ 关于订单总量 n_{tot} 的示意图, 从图中可以看到, 随着订单总量 n_{tot} 的增大, 撤单的概率反而减小. 对于这个撤单因素, Mike 和 Farmer 用函数 $1/n_{tot}$ 来表征.

得到 3 个撤单因素的表达式后, Mike 和 Farmer 假设这 3 个因素 y_i , n_{imb} 和 n_{tot} 相互独立, 那么订单的总撤单条件概率为

$$P(C_i | y_i, n_{imb}, n_{tot}) = \frac{A(1 - e^{-y_i})(n_{imb} + B)}{n_{tot}} \quad (3)$$

其中, 参数 A 和 B 可用实际股票数据拟合得到.

为了验证撤单模型的正确程度, Mike 和 Farmer 用实际股票 AZN 的数据计算撤单的生存期, 发现 MF 模型模拟生成的撤单生存期和实际数据具有相似性, 都具有幂律尾分布, 且尾指数相近, 撤单模型能较好地抓住实际撤单过程的内在规律.

1.3 价格形成机制

Mike 和 Farmer 对模型加入了两个假设: a. 所有的订单具有相同的委托量, 设为一个单位. b. 买、

卖指令簿至少存在两个订单. 明确下单和撤单过程后, 可对 MF 模型的价格形成机制进行仿真模拟, 具体步骤如下:

在每次模拟中, 事先产生相对价格时间序列 $\{x(t)\}$ 和订单符号时间序列 $\{s(t)\}$, 长度均为 2×10^5 (MF 模型每次模拟的步数), 其中, $\{x(t)\}$ 可由学生分布产生, 其控制参数是标度参数 σ_x 和自由度参数 ζ_x ; $\{s(t)\}$ 可由分数布朗运动产生, 其控制参数是赫斯特指数 H_s . 每次循环中, 在任意时刻 t , 产生一个新订单, 其委托价和符号分别从时间序列 $\{x(t)\}$ 和 $\{s(t)\}$ 中按顺序选取, 可用 $x(t)$ 和 $s(t)$ 来表征. 当相对价格大于此时的买卖价差 S 时, 即 $x(t) \geq S(t-1)$ 时, 交易立刻触发, 买指令簿 ($s(t) < 0$) 或者卖指令簿 ($s(t) > 0$) 中最优价格档位上的一个订单将被移除; 当 $x(t) < S(t-1)$ 时, 订单将按照价格-时间优先的原则存储在指令簿中. 指令簿中每个订单的撤单概率 $P(C_i | y_i, n_{imb}, n_{tot})$ 则由 y_i , n_{imb} , n_{tot} 这 3 个因素确定, 在区间 $[0, 1]$ 上用均匀分布产生随机数 w , 若订单满足 $P(C_i | y_i, n_{imb}, n_{tot}) \leq w$, 则此订单将从指令簿中移除. 在模型运行过程中, 始终保持买、卖指令簿中至少存在两个订单. 需要强调的是在 MF 模型中订单的委托量设定为一个单位. 模拟结束后得到买卖价差和收益率时间序列, 并且移除过渡期中的数据点.

图 4 为 MF 模型生成的买卖价差和收益率时间序列的互补累积分布函数的示意图, 从图中可以发现, 模拟生成的买卖价差和收益率时间序列都具有幂律尾分布, 其尾指数分别为 $\zeta_s = 3.2 \pm 0.3$ 和 $\zeta_r = 2.2 \pm 0.4$, 而实际买卖价差和收益率时间序列的尾指数为 $\zeta_s = 3.3 \pm 0.3$ 和 $\zeta_r = 2.4 \pm 0.2$, 可见两者非常相近. 这说明 MF 模型生成的买卖价差和收益率时间序列在概率分布上和实际数据相吻合.

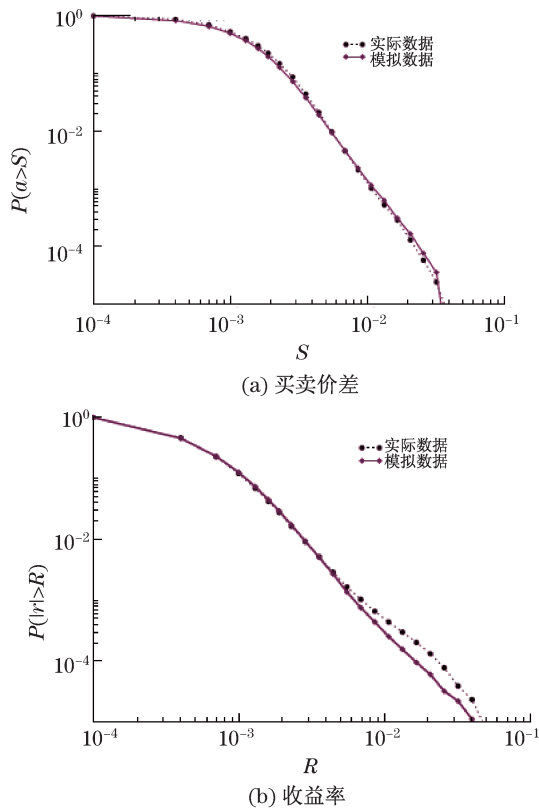


图4 买卖价差和收益率互补累积分布函数的示意图

Fig.4 Complementary cumulative distributions of bid-ask spreads and returns

2 Mike-Farmer 模型中收益率的幂律尾分布

前面介绍了 MF 微观模型的构建过程,现进行仿真模拟,研究 MF 模型模拟生成的收益率时间序列在不同尺度下的概率分布,并且分析模型生成的收益率具有幂律尾分布的原因^[53].

2.1 不同尺度下收益率的概率分布

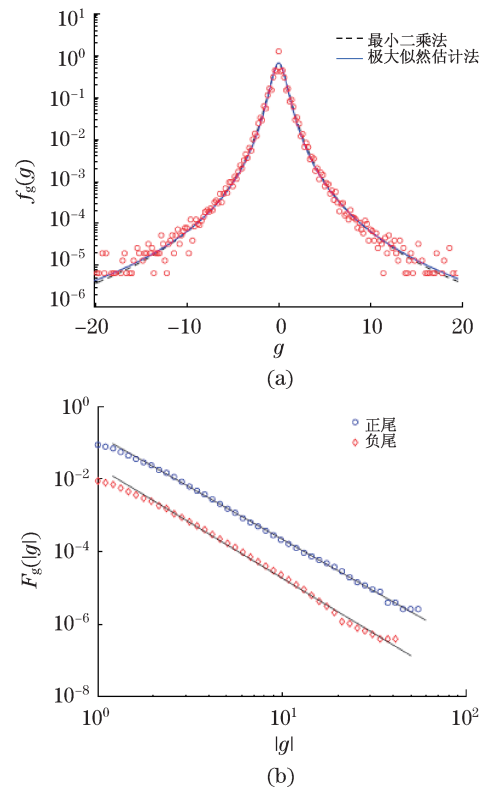
先研究 MF 模型生成的收益率时间序列在不同时间尺度下的概率密度函数.模型参数的选取基于 Mike 和 Farmer 实证研究的结果,即设定 $\zeta_x = 1.3$, $\sigma_x = 0.0024$, $H_s = 0.8$, $A = 1.12$ 和 $B = 0.2$. 相对价格 x 和 MF 模型一致,其概率密度函数服从学生分布.在模拟过程中,先生成长度为 2×10^5 的相对价格时间序列 $\{x(t)\}$ 和订单符号时间序列 $\{s(t)\}$,然后根据连续双向拍卖机制进行模拟,记录每次交易后指令簿中最高买价 π_b 和最低卖价 π_a 的中间对数价格 $I(t)$,即 $I(t) = [\pi_a(t) + \pi_b(t)]/2$,其中, t 为交易事件时间,即每发生一次交易, t 就增加 1.定义事件时间收益率 $r_{\Delta t} = I(t) - I(t - \Delta t)$,

经标准化后,得到 $g_{\Delta t}(t) = [r_{\Delta t}(t) - \mu_{\Delta t}]/\sigma_{\Delta t}$,其中, $\mu_{\Delta t}$ 和 $\sigma_{\Delta t}$ 分别为收益率 $r_{\Delta t}$ 的均值和标准差.为了表述简单,去掉下标 Δt .

先研究 $\Delta t = 1$ 的情况,图 5(a) 为 $\Delta t = 1$ 时收益率的概率密度函数的示意图,发现概率密度函数 $f_g(g)$ 可用学生分布进行拟合.

$$f(g|\zeta, l) = \frac{\sqrt{l}\zeta^{\frac{\zeta}{2}}}{B(1/2, \zeta/2)} [\zeta + lg^2]^{\frac{\zeta+1}{2}}$$

运用最小二乘法(OLS),得到参数 $\zeta_r = 2.9$, $l = 3.3$;运用极大似然估计(MLE),得到参数 $\zeta_r = 3.1$, $l = 2.7$,列在表 1 中.在图 5(a) 中分别给出了两种方法的拟合曲线,在概率密度函数的主体部分两者几乎重合在一起,但在尾部两者略有差别.收益率 g 的概率分布在总体上可用学生分布进行拟合,但在 g 较小时,两者有较大的差别.如果以更小的区间计算 $|g|$ 在零点附近的概率密度函数,然后再放大,就会发现 $f_g(g)$ 具有墨西哥草帽函数的形状,这是股票收益率概率分布中很普遍的一个特征,原因在于股票价格是离散化的,其变化的幅度是最小价格变动单位的整数倍,这在美国股市^[54]和中国股市^[51]中都曾报道过.

图5 $\Delta t = 1$ 时收益率的概率密度函数和互补累积分布函数图Fig.5 Plots of probability density function and cumulative distributions of the returns when $\Delta t = 1$

当收益率 g 取值较大时, 学生分布 $f_g(g)$ 在尾部可由幂律分布近似, 即

$$f_g(g) \propto \begin{cases} (-g)^{-(\zeta_r^+ + 1)} & g < 0 \\ (+g)^{-(\zeta_r^- + 1)} & g > 0 \end{cases} \quad (4)$$

图 5(b) 给出了标准化后正、负收益率 g 的互补概率分布函数 $F_g(|g|)$ 的示意图. 作者发现其收益率的正尾和负尾都服从幂律尾分布, 用最小二乘法

计算得到正尾指数 $\zeta_r^+ = 2.87 \pm 0.02$, 负尾指数 $\zeta_r^- = 3.06 \pm 0.03$, 这和学生分布得出的自由度相一致, 遵循负三次方定律. 继续研究收益率 g 在 $\Delta t > 1$ 时的概率分布. 通过改变 Δt 的大小, 可以比较收益率 g 在不同时间尺度下的概率密度函数. 这里选取 $\Delta t = 2, 4, 8, 16$. 表 1 列出了 $\Delta t = 1, 2, 4, 8, 16$ 时收益率 g 的特征参数.

表 1 不同时间尺度下收益率的特征参数表

Tab. 1 Characteristic parameters for trade-aggregated returns under different time scales

Δt	K	OLS		MLE		正尾		负尾	
		l	ζ_r	l	ζ_r	标度区间	ζ_r^+	标度区间	ζ_r^-
1	19.68	3.3	2.9	2.7	3.1	$1.5 \leq g \leq 50.1$	2.87 ± 0.02	$1.5 \leq -g \leq 39.8$	3.06 ± 0.03
2	19.52	3.1	3.0	2.5	3.2	$1.5 \leq g \leq 36.3$	2.90 ± 0.02	$1.5 \leq -g \leq 30.2$	3.15 ± 0.04
4	17.06	3.2	3.1	2.6	3.3	$1.5 \leq g \leq 27.7$	2.94 ± 0.03	$1.7 \leq -g \leq 22.9$	3.24 ± 0.04
8	13.91	2.9	3.2	2.1	3.8	$1.7 \leq g \leq 15.8$	3.07 ± 0.04	$1.7 \leq -g \leq 15.9$	3.42 ± 0.05
16	10.72	2.5	3.5	1.9	3.9	$1.7 \leq g \leq 12.1$	3.39 ± 0.05	$1.9 \leq -g \leq 7.6$	3.77 ± 0.07

在表 1 中, 发现所有收益率的概率密度函数的峰度 K 都大于 3, 说明收益率偏离正态分布, 具有尖峰胖尾的性质. 另外, 也发现随着 Δt 的增大, 概率密度函数的峰度值在减小, 说明随着时间尺度的增大, 收益率趋向于正态分布, 这种现象在实际的股票市场中也存在. 图 6(a) 为收益率在不同时间尺度 $\Delta t = 1, 2, 4, 8, 16$ 下的概率密度函数的示意图, 可以明显看到, 随着 Δt 的增大, 收益率概率密度函数下降的速度变快, 即 ζ_r 变大. 当 $\Delta t = 16$ 时, 收益率的概率分布比指数分布下降得慢. 分别运用最小二乘法和极大似然估计对收益率数据用学生分布进行拟合, 计算得到的参数值 l 和 ζ 列在表 1 中.

图 6(b) 给出了标准化后收益率 g 的互补累积分布函数 $F_g(|g|)$ 的示意图, 用于研究收益率的尾分布性质. 作者发现正、负收益率都遵循幂律尾分布, 表 1 分别给出了两种方法下幂律尾分布的标度区间、正尾指数 ζ_r^+ 和负尾指数 ζ_r^- . 随着时间尺度 Δt 的增大, 正、负收益率的幂律标度区间逐渐减小, 这与韩国股市^[55] 和中国股市^[51] 的规律相似. 另外, 收益率的幂律尾指数 ζ_r 随 Δt 的增大而增大, 这和表 1 中峰度值逐渐减小的规律相一致.

以上的研究结果表明, MF 模型几乎能够模拟中国实际股票市场中价格演化的动态过程, 但仍存在一些细小的差别. 首先, 模型生成的收益率概率密度函数的尾指数比实际股票市场的小 0.2 左右; 其次, 收益率概率密度函数略向左偏斜, 而实际中国股票市场的收益率略向右偏斜. 这些差别

可能是由于 MF 模型中的参数不是来源于中国股票市场的缘故, 但从总体而言, MF 模型能够再现收益率很多重要的统计规律, 是一个有应用价值的微观模型.

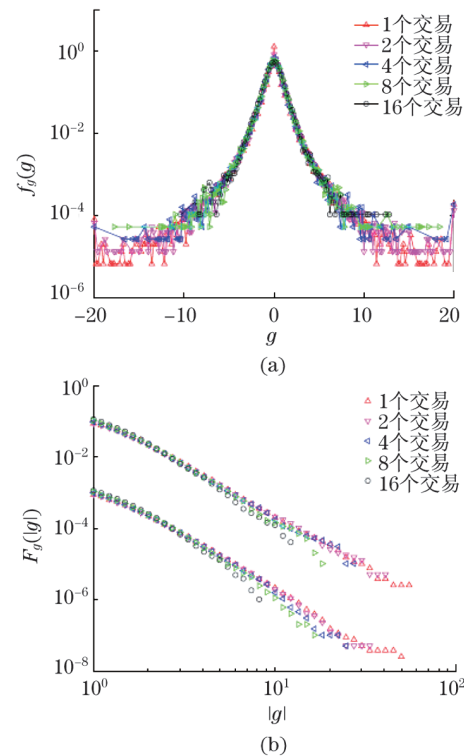


图 6 $\Delta t = 1, 2, 4, 8, 16$ 时收益率的概率密度函数图和互补累积分布函数图

Fig. 6 Plots of probability density functions and cumulative distributions of the returns when $\Delta t = 1, 2, 4, 8, 16$

2.2 收益率具有幂律尾分布的成因

通过前面的研究发现 MF 模型生成的收益率在不同时间尺度下都具有幂律尾分布,现在研究收益率具有幂律尾分布的原因.通过大量数值模拟, Mike 和 Farmer 发现参数赫斯特指数 H_s 和学生分布自由度 ζ_x 取值不同时,模型生成的收益率都能产生幂律尾分布,且其尾指数 ζ_r 会随 H_s 和 ζ_x 的变化而变化.他们定性地发现:当 H_s 固定时,收益率尾指数 ζ_r 随 ζ_x 线性增大;当 ζ_x 固定时,尾指数 ζ_r 随 H_s 线性减小.为了验证这个结论,本文分别选取不同的 ζ_x (其取值从 0.9~1.9,并且每次增加 0.1) 和 H_s (其取值从 0.1~0.9,并且每次增加 0.1) 进行数值仿真模拟.定量考察模拟得到的收益率尾指数 ζ_r 随 ζ_x 和 H_s 的变化规律.对于每种组合移除模型过渡期中收益率的数据,最后共得到大约 100 万个数据点.定量研究尾指数 ζ_r 与模型输入参数 ζ_x 和 H_s 的关系.

$$\zeta_r = a + b\zeta_x + cH_s + dH_s\zeta_x + e\zeta_x^2 + fH_s^2 \quad (5)$$

运用 t 分布检验,发现参数 e 在 5% 显著水平下,其 p 值为 0.71,并不显著,其它参数在 5% 显著水平下都显著.于是将式(5)中 $e\zeta_x^2$ 这一项移除,然后重新拟合计算,发现此时剩余的参数都非常显著,得到 $a = 0.45 \pm 0.11$, $b = 2.05 \pm 0.07$, $c = 0.75 \pm 0.26$, $d = -0.34 \pm 0.13$ 和 $f = -0.86 \pm 0.18$. 根据计算结果,作者认为,当 H_s 增大时,订单符号之间的相关性增强,相同符号的订单(买单或者卖单)就会连续出现,这可能导致价格大幅波动,收益率的概率密度函数 $f_r(r)$ 下降变慢,所以,其尾指数 ζ_r 变小.另一方面,如果 ζ_x 较小,对于 $x < 0$ 而言,将会有很多消极的订单下在指令簿的深处,这使得指令簿前端不是很厚实;对于 $x > 0$ 而言,取值较小的 ζ_x 意味着存在更多有效市价订单.这两方面的原因都将导致价格大幅波动,收益率概率分布下降的速度减慢,从而使 ζ_r 变小.

订单符号的长期记忆性和相对价格的幂律尾分布都有可能对模拟产生的收益率具有影响作用,但我们不清楚在 MF 模型中引起收益率具有幂律尾分布的原因.虽然 Mike 和 Farmer 已经发现随着订单符号时间序列相关性的增强,模型生成的收益率时间序列的概率分布 $f_r(r)$ 的尾指数 ζ_r 会变小,但即使我们预先设定订单符号时间序列不相关,即其赫斯特指数 $H_s = 0.5$,模拟生成的收益率也具有幂律尾分布,所以,作者认为订单符号时间序列的长期记忆性并不是收益率具有幂律尾分布的主要原因,相

对价格的概率分布 $f_x(x)$ 才是收益率具有幂律尾分布的主要原因.

根据 MF 模型产生相对价格的定义,知道相对价格 x 大于买卖价差 $S(x > S)$ 时,相对价格时间序列的概率分布 $f_x(x)$ 不影响收益率分布 $f_r(r)$ 的形状,因为这部分订单是有效市价订单,不管其相对价格大小如何,它们具有相同的价格冲击,都将移除对方指令簿中第一档上一个单位的订单.所以,作者猜想相对价格概率分布的左半部分才是收益率具有幂律尾分布的关键原因.为了验证这个猜想,作者研究相对价格在不同概率分布组合下对收益率分布的影响.定义 $L(x)$ 是相对价格 x 概率密度函数 $f_x(x)$ 的左半部分($x < 0$), $R(x)$ 是其右半部分($x > 0$).通过 $L(x)$ 和 $R(x)$ 的不同组合,就可以研究相对价格在不同分布组合下收益率的概率密度函数 $f_r(r)$ 的变化规律.在模型中,设定对数价格的最小变动单位为 $T = 3 \times 10^{-4}$,根据 Mike 和 Farmer 的实证研究结果,其余 3 个变量分别设为 $H_s = 0.8$, $A = 1.12$ 和 $B = 0.2$.

为了考察相对价格概率分布左、右两部分 $L(x)$ 和 $R(x)$ 对收益率概率分布 $f_r(r)$ 的影响,对 $L(x)$ 和 $R(x)$ 分别赋予不同的概率密度函数,那么相对价格的概率密度函数可以表示为

$$f_x(x) = \begin{cases} L(x) & x \leq 0 \\ R(x) & x \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

且当 $x = 0$ 时,满足 $L(0) = R(0)$.

现在用 3 个不同的概率密度函数赋给 $L(x)$ 和 $R(x)$.第一个概率密度函数是学生分布或者称之为 q -正态分布^[56],其函数形式为

$$f_{qG}(x | \zeta_x, l) = \frac{\sqrt{l} \zeta_x^{1/2}}{B(1/2, \zeta_x/2)} (\zeta_x + lx^2)^{-\frac{\zeta_x+1}{2}} \quad (7)$$

式中, ζ_x 为自由度参数(尾指数); l 为标度参数; $B(a, b)$ 是贝塔函数, $B(a, b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$, 其中, Γ 为伽玛函数.

第二个概率密度函数是拉普拉斯概率密度函数,或者称之为双指数分布,其表达式为

$$f_{DE}(x | \lambda) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |x|} \quad (8)$$

第三个概率密度函数是高斯分布,或者称之为正态分布,其表达式为

$$f_G(x | \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (9)$$

这 3 个函数中, f_{DE} 和 f_G 都没有幂律尾分布,只有 f_{qG} 具有幂律尾分布.由于 MF 模型中相对价格 x

的概率密度函数左右对称^[45],所以,设定3个概率密度函数 f_{qG} , f_{DE} 和 f_G 的均值为 $\bar{x}=0$.在模拟过程中,分别把 f_{qG} , f_{DE} 和 f_G 赋给 $L(x)$ 和 $R(x)$,得到如下定量关系式:当 $f_x(x)$ 是 f_{qG} 和 f_{DE} 的组合时得到: $2\sqrt{l/\zeta_x}=\lambda B(1/2,\zeta_x/2)$;当 $f_x(x)$ 是 f_{qG} 和 f_G 的组合时得到: $B(1/2,\zeta_x/2)=\sigma\sqrt{2\pi l/\zeta_x}$;当 $f_x(x)$ 是 f_{DE} 和 f_G 的组合时得到: $\lambda^2\sigma^2=2/\pi$.

根据Mike和Farmer的实证研究结果,本文固定 $\sigma=0.0024$,这样产生的相对价格时间序列和实际数据相吻合.式(9)中参数分布的标度参数

$$l = \zeta_x / [(1 + \zeta_x)\sigma_x^2] \quad (10)$$

得到 l 的数值后,式(8)中的 λ 和式(9)中的 σ 均可确定.

为了验证猜想,需根据概率分布是否具有幂律尾分布进行分类讨论.在MF模型中 $f_x(x)$ 为学生分布,此时 $f_x(x)=L(x)=R(x)$,Mike和Farmer已经讨论过 $L(x)$ 和 $R(x)$ 都具有幂律尾分布的情况,并得出结论:当 $L(x)$ 和 $R(x)$ 都具有幂律尾分布时,模拟生成的收益率时间序列也具有幂律尾分布^[45],因此,只需讨论剩下的3种情况:a. $f_x(x)$ 中 $L(x)$ 和 $R(x)$ 都不具有幂律尾分布;b. $f_x(x)$ 的右半部分具有幂律尾分布,即 $R(x)=f_{qG}(x|\zeta_x,l)$;c. $f_x(x)$ 的左半部分具有幂律尾分布,即 $L(x)=f_{qG}(x|\zeta_x,l)$.

先研究第一种情况,即相对价格的概率密度函数 $f_x(x)$ 的左、右两部分都不具有幂律尾分布,那么 $f_x(x)=\{L(x),R(x)\}$ 有以下4种组合: $\{f_{DE},f_G\}$ 、 $\{f_{DE},f_{DE}\}$ 、 $\{f_G,f_{DE}\}$ 和 $\{f_G,f_G\}$.对于每种组合,分别取 $\zeta_x=1.1,1.3,1.5,1.7,1.9$,当确定 ζ_x 的值后,重复模拟20次,且每次模拟的长度为 2×10^5 .综合20次模拟得到的收益率数据,共得到约100万个收益率数据点,研究整体收益率的概率分布.对于一个固定的 ζ_x 值,由于收益率时间序列的概率分布左右对称,所以,计算绝对值收益率 $|r|$ 的互补累积分布函数 $F_r(|r|)$.图7(a)为绝对值收益率 $|r|$ 在4种组合下的互补累积分布函数 $F_r(|r|)$ 的示意图.

从图7(a)中可以发现4种组合下MF模型模拟生成的收益率时间序列都不具有幂律尾分布的特性,这说明当 $L(x)$ 和 $R(x)$ 都不具有幂律尾分布时,模拟产生的收益率也不具有幂律尾分布.在同一种组合中可以发现, ζ_x 取值越大, $F_r(|r|)$ 下降得越快.另外,在 $L(x)=f_{DE}$ 的两种组合中,MF模型

倾向于生成较大数值的收益率,这可能是由于拉普拉斯分布比正态分布具有更加厚实的尾部,而且 $L(x)$ 对收益率时间序列有较大的影响所造成的.

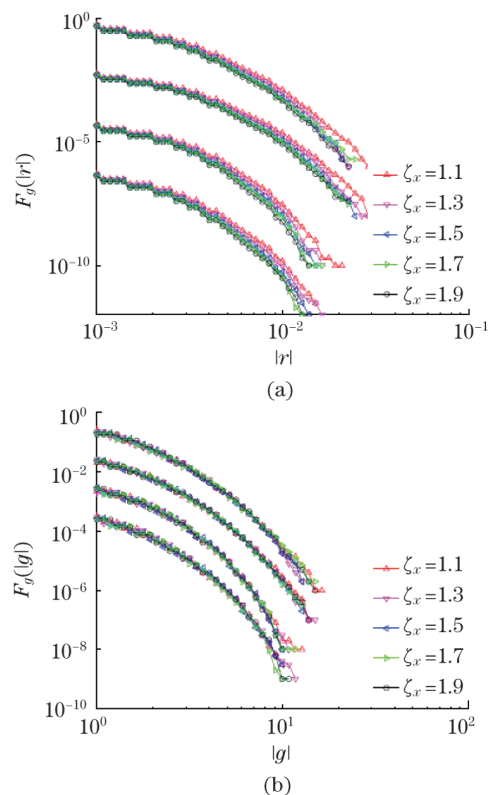


图7 4种组合下绝对值收益率 $|r|$ 和标准化后收益率 $|g|$ 的累积分布函数的示意图

Fig.7 Cumulative distributions of absolute returns $|r|$ and absolute normalized returns $|g|$ under 4 combinations

现将模拟生成的收益率时间序列标准化,即 $g=(r-\mu_r)/\sigma_r$,其中, μ_r 为收益率 r 的均值, σ_r 为 r 的标准差.图7(b)为标准化后收益率 g 的互补累积分布函数 $F_g(|g|)$ 的示意图.可以明显地发现每一种组合中,不同 ζ_x 取值的曲线都重合到一起,这说明标准化后收益率的概率分布和 ζ_x 基本无关.

现在讨论第二种情况,即相对价格的概率密度函数 $f_x(x)$ 的右半部分具有幂律尾分布,此时 $R(x)=f_{qG}$. $f_x(x)=\{L(x),R(x)\}$ 有两种组合: $\{f_{DE},f_{qG}\}$ 和 $\{f_G,f_{qG}\}$.对于每种组合,分别取 $\zeta_x=1.1,1.3,1.5,1.7,1.9$,当确定 ζ_x 的值后,重复模拟20次,且每次模拟的长度为 2×10^5 .综合20次模拟得到的收益率数据,共得到约100万个收益率数据点,计算其互补累积分布函数 $F_r(|r|)$.图8(a)给出了绝对值收益率 $|r|$ 在两种组合下的互补累积

分布函数的示意图.

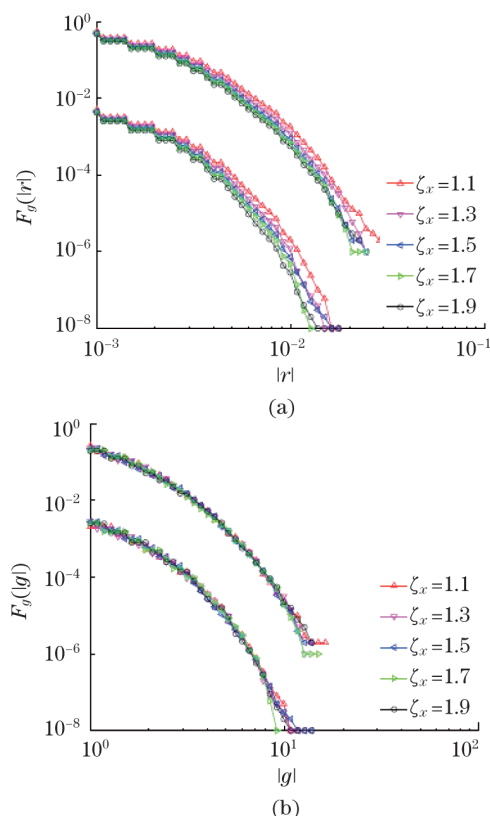


图8 两种组合下绝对值收益率 $|r|$ 和标准化后绝对值收益率 $|g|$ 的累积分布函数图

Fig.8 Cumulative distributions of absolute returns $|r|$ and absolute normalized returns $|g|$ under 2 combinations

从图8中发现MF模型生成的收益率时间序列不具有幂律尾分布,这说明当 $R(x)$ 具有幂律尾分布,而 $L(x)$ 不具有幂律尾分布时,模拟产生的收益率也不具有幂律尾分布.随着 ζ_x 的增大,收益率互补累积分布函数 $F_r(|r|)$ 下降速度加快.当 $L(x) = f_{DE}$ 时,MF模型将生成较大数值的收益率.图8(b)为标准化后收益率 $|g|$ 的互补累积分布 $F_g(|g|)$ 的示意图,在每一种组合下,不同 ζ_x 取值下的概率分布重合到一条曲线上,说明 ζ_x 对于标准化后的收益率影响较小.

最后研究第三种情况,即相对价格概率分布 $f_x(x)$ 的左半部分具有幂律尾分布,此时 $L(x) = f_{qG} \cdot f_x(x) = \{L(x), R(x)\}$ 有两种组合: $\{f_{qG}, f_{DE}\}$ 和 $\{f_{qG}, f_G\}$.在每一次组合下,分别取 $\zeta_x = 1.1, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9$,并且确定 ζ_x 值后,重复模拟20次,且每次模拟的长度为 2×10^5 .综合20次模拟得到的收益率数据,共得到约100万个收益率数据点,计算其互补累积分布函数 $F_r(|r|)$.图9给

出了两种组合下绝对值收益率 $|r|$ 的互补累积分布函数的示意图,可以发现两种组合下所有收益率时间序列都服从幂律尾分布,且对于每一种组合,幂律尾分布的尾指数 ζ_r 随着 ζ_x 增大而增大.比较这两种组合下的概率分布函数,发现当 ζ_x 具有相同取值时, $F_r(|r|)$ 几乎没有差别,换言之, $F_r(|r|)$ 的形状完全取决于相对价格概率密度函数的左半部分 $L(x) = f_{qG}$.

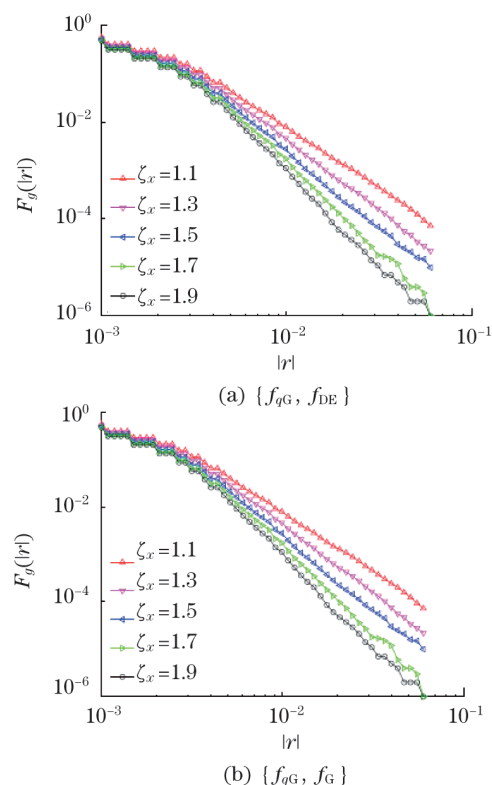


图9 $\{f_{qG}, f_{DE}\}$ 和 $\{f_{qG}, f_G\}$ 组合下绝对值收益率 $|r|$ 的互补累积分布函数图

Fig.9 Plots of $F_r(|r|)$ of the absolute normalized returns under $\{f_{qG}, f_{DE}\}$ and $\{f_{qG}, f_G\}$

数值模拟结果验证了作者的猜想,即无论相对价格概率密度函数的右半部分 $R(x)$ 是否具有幂律尾分布,只要其左半部分 $L(x)$ 具有幂律尾分布,那么MF模型生成的收益率时间序列就具有幂律尾分布.当相对价格概率密度函数左半部分 $L(x)$ 的尾指数 ζ_x 增大时,收益率概率分布 $f_r(r)$ 的幂律尾指数 ζ_r 也随之增大.

3 Mike-Farmer 模型中波动率的长期记忆性

从前面的介绍中可以知道MF模型是一个功能

强大的微观模型,能够准确地再现很多经典的统计规律:收益率时间序列具有幂律尾分布,且服从负三次方定律;收益率时间序列不具有长期记忆性;买卖价差和订单生存期服从幂律尾分布等.但MF模型也有不足之处,模拟产生的波动率时间序列不具有长期记忆性,其赫斯特指数略大于0.5,这和波动率具有长期记忆性这一公认的统计规律相悖.作者将改进MF模型,进行模拟仿真,深入研究MF模型生成的波动率时间序列具有长期记忆性的原因.

3.1 Mike-Farmer 模型生成的波动率不具有长期记忆性

前面研究了MF模型生成的收益率时间序列的概率分布,重现了收益率具有幂律尾分布的特性,且其尾指数接近3,服从负三次方定律^[53].现在用降趋脉动法^[57]分析模型生成的收益率 r 和波动率 v (这里定义波动率是收益率的绝对值,即 $v = |r|$)的时间相关性.图10为模拟产生的收益率和波动率时间序列的降趋脉动函数 $F(l)$ 关于时间尺度 l 的示意图.

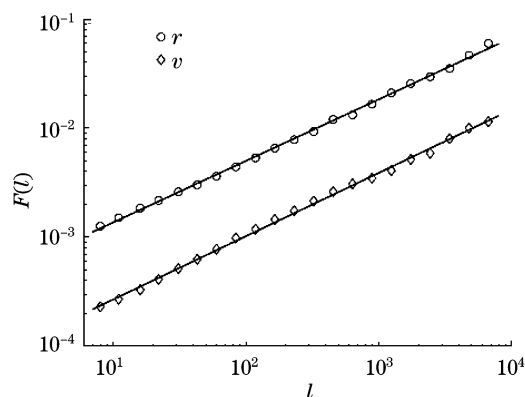


图10 收益率波动率的降趋脉动函数的示意图

Fig.10 Plot of detrended fluctuation functions $F(l)$ for return and volatility time series

从图10中看到,在标度区间 $8 < l < 7\,000$ 中,收益率和波动率的降趋脉动函数 $F(l)$ 和时间尺度 l 具有很好的标度关系 $F(l) \propto l^H$.用最小二乘法拟合,对于收益率时间序列得到 $H_r = 0.55 \pm 0.01$,对于波动率时间序列得到 $H_v = 0.58 \pm 0.01$.两个赫斯特指数都略大于0.5,说明收益率时间序列和波动率时间序列具有微弱的长期记忆性.为了使结果更具有可信度,重复模拟20次,然后用降趋脉动法计算收益率和波动率的赫斯特指数,结果发现 H_r 在区间 $[0.54, 0.58]$ 中变化,其均值为 $\bar{H}_r = 0.57 \pm 0.01$,而 H_v 在区间 $[0.56, 0.62]$ 中变化,其均值为 $\bar{H}_v = 0.59 \pm 0.01$,这和Mike和Farmer得出的结论相一致^[45].实际市场

中,收益率时间序列不具有或者略有长期记忆性^[58],而波动率时间序列具有强烈的长期记忆性,其赫斯特指数应显著大于0.5,因此,作者认为MF模型抓住了收益率时间序列在时间相关性上的特征,但不能再现波动率时间序列的强长期记忆性.显然,在MF模型中缺少了某些重要因素,使得波动率时间相关性减弱,这就使得我们要对MF模型进行改进,使其更加完善,再现波动率强长期记忆性的特征.

3.2 相对价格具有长期记忆性

在金融市场中,任何一个交易者都不可能收集到市场上所有的信息,同时由于人类大脑记忆的局限性,所以,市场上的交易者很容易模拟其他交易者的行为,可能在某些间断时期中出现正反馈效应和羊群效应.换言之,大多数交易者在市场中扮演着多数者博弈的角色,他们在股票价格上涨时更倾向于买入股票,而在价格下跌时更倾向于卖出股票^[59].学者普遍认为模仿效应和羊群效应是引起波动率强长期记忆性的重要原因.另外,在金融市场中,对于机构交易者,他们往往把一个大订单分割成很多小订单进行成交,从而降低交易的成本,减小对市场的冲击^[60],这也可能引起波动率具有长期记忆性.由于MF模型中订单由其符号和委托价格确定(模型中订单的委托量设定为一个单位),所以,作者猜想这些变量的时间序列也具有长期记忆性.由于在MF模型中订单符号时间序列由分数布朗运动产生,其赫斯特指数 $H_s \geq 0.5$,具有长期记忆性,所以,很自然地考虑到相对价格时间序列是否具有长期记忆性,如果相对价格存在长期记忆性,那么它是否会引起波动率时间序列具有长期记忆性呢?

以深圳交易所2003年23只股票的超高频数据为对象,运用降趋脉动法研究连续竞价期中的相对价格时间序列的时间相关性.图11为4只股票相对价格时间序列的降趋脉动函数 $F(l)$ 关于时间尺度 l 的示意图.

在图11中发现4只股票的降趋脉动函数 $F(l)$ 和时间尺度 l 存在很好的幂律关系,运用最小二乘法,对于股票000012,得到 $H_x = 0.77 \pm 0.01$,其标度区间为 $10 < l < 10^5$;对于股票000089,得到 $H_x = 0.76 \pm 0.01$,其标度区间为 $10 < l < 7 \times 10^4$;对于股票000406,得到 $H_x = 0.77 \pm 0.01$,其标度区间为 $10 < l < 10^5$;对于股票000488,得到 $H_x = 0.72 \pm 0.01$,其标度区间为 $10 < l < 5 \times 10^4$.同时在研究其它股票相对价格的时间序列后,发现它们的降趋脉动函数 $F(l)$ 和时间尺度 l 也具有类似的幂律标度

性质,赫斯特指数 H_x 在区间 $[0.72, 0.87]$ 内变化,其均值为 $\bar{H}_x = 0.78 \pm 0.03$. 所以,相对价格时间序列具有较强的长期记忆性.

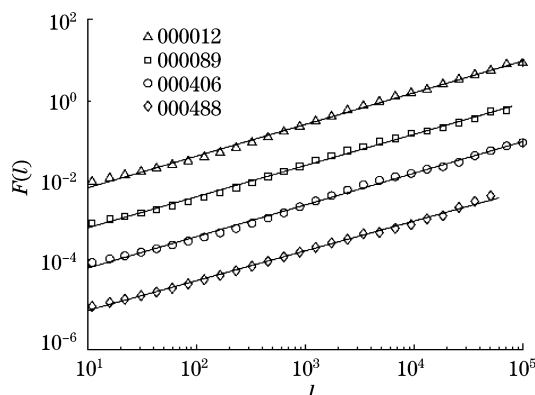


图 11 4 只股票相对价格时间序列的降趋脉动函数的示意图

Fig.11 Plot of the detrended fluctuation functions $F(l)$ of relative prices for 4 stocks

相对价格时间序列的长期记忆性也存在于其它股票市场中. Zovko 和 Farmer 研究伦敦交易所 50 只股票的买单和卖单的时间相关性,发现自相关函数以幂律形式下降,其自相关系数为 $\gamma = 0.41 \pm 0.07^{[47]}$,根据赫斯特指数和自相关系数的关系 $H_x = 1 - \gamma/2^{[61]}$,得到 $H_x = 0.80 \pm 0.04$. 分别对图 11 中的 4 只股票的买单和卖单相对价格进行计算,对于股票 000012,买单的赫斯特指数为 $H_{x,b} = 0.75 \pm 0.01$,卖单的赫斯特指数为 $H_{x,s} = 0.77 \pm 0.01$;对于股票 000089,买单的赫斯特指数为 $H_{x,b} = 0.81 \pm 0.01$,卖单的赫斯特指数为 $H_{x,s} = 0.75 \pm 0.01$;对于股票 000406,买单的赫斯特指数为 $H_{x,b} = 0.77 \pm 0.01$,卖单的赫斯特指数为 $H_{x,s} = 0.75 \pm 0.01$;对于股票 000488,买单的赫斯特指数为 $H_{x,b} = 0.70 \pm 0.01$,卖单的赫斯特指数为 $H_{x,s} = 0.71 \pm 0.01$. 发现无论是买单还是卖单,其赫斯特指数和相对价格整体时间序列的赫斯特指数基本一致.

3.3 修正的 MF 模型生成的波动率具有长期记忆性

原始的 MF 模型中相对价格时间序列不具有长期记忆性,这和实证研究的结论相悖,所以,作者对 MF 模型进行改进,在保持其它模型因素不变的情况下,在相对价格时间序列中加入长期记忆性. 为了使生成的相对价格时间序列既服从学生分布,又具有长期记忆性,具体方法如下:先用学生分布生成相对价格时间序列 $\{x_0(t): t = 1, 2, \dots, T\}$,接着生成赫斯特指数为 H_x 的时间序列 $\{y(t): t = 1, 2, \dots, T\}$,然后根据序列 $\{y(t)\}$ 中各个位置上所对应数

值的大小顺序来对时间序列 $\{x_0(t): t = 1, 2, \dots, T\}$ 进行重排^[62-63],最后得到新的相对价格时间序列 $\{x(t): t = 1, 2, \dots, T\}$. 运用降趋脉动法进行分析,发现其赫斯特指数接近设定值 H_x ,于是,模拟生成的相对价格时间序列 $\{x(t)\}$,其既服从学生分布,又具有相应的长期记忆性.

对于修正的 MF 模型,在模拟过程中,先用学生分布产生相对价格时间序列,控制其参数 $\zeta_x = 1.3$, $\sigma_x = 0.0024$,然后加入长期记忆性,使其赫斯特指数 $H_x \approx 0.8$. 其余的模拟步骤和原始的 MF 相同,这里不再重复. 在每次模拟中,模拟的长度为 2×10^5 ,并控制其它模型参数不变, $H_x = 0.75$, $A = 1.12$ 和 $B = 0.2$. 每次模拟后,去掉过渡期中的数据,最后得到 4×10^4 个收益率数据点. 图 12 给出了修正的 MF 模型模拟得到的收益率时间序列一个片段的示意图,图中收益率数据片段的长度 $N' = 3.5 \times 10^4$ 为了进行比较,在图 12 中也展示了原始的 MF 模型模拟得到的收益率时间序列片段和股票 000012 收益率时间序列片段的示意图.

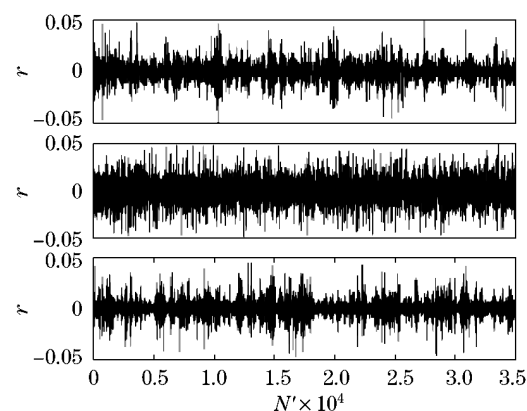


图 12 收益率片段(股票 000012(上),原始 MF 模型(中),修正的 MF 模型(下))

Fig.12 Return series segments (Upper:000012, Middle: original model, Lower: modified model)

在图 12 中,比较 3 个收益率时间序列片段,发现修正后的 MF 模型生成的收益率时间序列具有明显的聚簇现象,和实际股票 000012 收益率序列很相似,然而,原始的 MF 模型生成的收益率时间序列并不存在聚簇现象,这从定性上说明,相比于原始的 MF 模型,修正的 MF 模型生成的波动率时间序列具有更强的时间相关性. 为了定量地描述波动率的长期记忆性,运用降趋脉动法进行分析,图 13 为修正的 MF 模型生成的收益率和波动率时间序列的降趋脉动函数 $F(l)$ 关于时间尺度 l 的示意图.

从图 13 中发现, 降趋脉动函数 $F(l)$ 和时间尺度 l 存在良好的幂律关系, 运用最小二乘法, 对于收益率时间序列, 得到 $H_r = 0.53 \pm 0.01$, 其标度区间为 $8 < l < 4\ 500$, 说明收益率不具有长期记忆性; 对于波动率时间序列, 得到 $H_v = 0.76 \pm 0.01$, 其标度区间为 $8 < l < 4\ 500$, 说明波动率时间序列具有强烈的长期记忆性, 这和经典的统计规律相一致. 根据改进前 MF 模型产生的收益率和波动率时间序列长期记忆性的变化, 作者认为, H_x 对 H_r 的影响很小, 但对 H_v 的影响很大. 用修正的 MF 模型模拟 20 次, 并计算收益率和波动率时间序列的长期记忆性, 发现 H_r 在区间 $[0.53, 0.55]$ 范围内变化, 其均值为 $\bar{H}_r = 0.54 \pm 0.01$, 而 H_v 在区间 $[0.74, 0.77]$ 范围内变化, 其均值为 $\bar{H}_v = 0.76 \pm 0.01$.

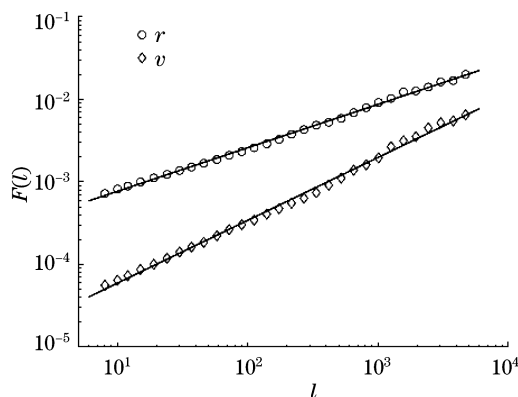


图 13 修正的 MF 模型生成的收益率、波动率的降趋脉动函数的示意图

Fig. 13 Plot of $F(l)$ of return and volatility time series from the modified MF model

进一步定量研究 H_x 和 H_v 之间的相互关系, 当固定 H_x 时, 所得到的波动率时间序列的 H_v 变化范围很小, 结果在表 2 中列出. 作者也发现 H_v 和 H_x 并不一致, 但 H_v 随着 H_x 的增大而增大. H_r 的数值接近 0.5, 且和 H_x 基本无关. 表 2 中给出的结果是 10 次模拟的均值, 标度区间均为 $8 < l < 4\ 500$, 括号中的数字是标准差乘上 100 取整后的值.

表 2 H_r 和 H_v 关于 H_x 的关系表

Tab. 2 Dependence of H_r and H_v on H_x

H_x	H_v	H_r
0.50	0.57(1)	0.55(1)
0.60	0.61(1)	0.55(1)
0.70	0.67(1)	0.54(1)
0.80	0.76(1)	0.54(1)
0.90	0.81(2)	0.54(1)

模型中的相对价格时间序列加入长期记忆性可能会影响收益率的概率分布, 为此研究修正的 MF 模型生成的收益率时间序列的概率分布. 图 14 为修正模型生成的收益率时间序列的互补累积分布函数 $P(>v)$ 的示意图. 发现互补累积分布函数服从幂律尾分布, 即 $P(>v) \propto v^{-\zeta}$, 其中, ζ 为幂律尾指数, 用最小二乘法得到 $\zeta = 2.99 \pm 0.02$, 服从负三次方定律, 和原始 MF 模型得出的结论相一致, 所以, 作者认为在相对价格时间序列中加入长期记忆性并不会影响收益率的幂律尾分布. 同时, 这个结论也再次说明了收益率的概率分布只和相对价格的分布有关, 而与相对价格时间序列的记忆性无关. 在相对价格时间序列中加入长期记忆性能使模型生成更多经典的统计规律.

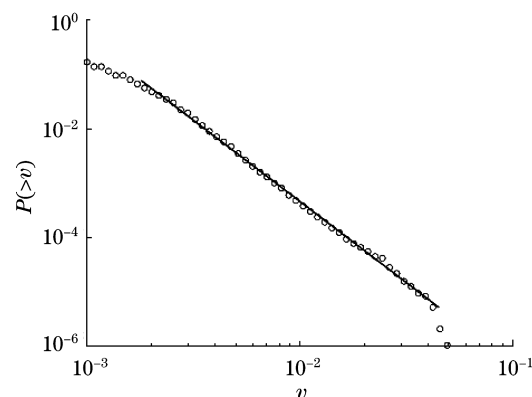


图 14 修正的 MF 模型生成收益率时间序列的互补累积分布函数图

Fig. 14 Plot of the cumulative distribution of return time series from modified MF model

另外, 发现 MF 模型中的撤单过程不是产生这些统计规律的主要原因. 在修正的 MF 模型中, 用泊松分布来模拟撤单过程, 发现模型仍能再现相似的统计规律, 得到 $H_r = 0.51 \pm 0.01$, $H_v = 0.81 \pm 0.01$ 和 $\beta = 3.19 \pm 0.03$. 同时也发现订单符号时间序列对波动率时间序列的相关性影响不显著, 设定模型参数 $H_s = 0.5$, $H_x = 0.8$ 进行模拟研究, 模型产生的波动率时间序列具有长期记忆性, 其赫斯特指数 $H_v = 0.78$, 此时收益率仍遵循负三次方定律.

4 模型的应用

运用委托驱动模型进行计算机模拟仿真, 是计算实验金融学的一个分支, 在金融工程研究中具有很高的潜在应用价值, 但这方面的研究鲜见有文献

报道.通过对委托驱动模型的仿真,可以解决金融工程(包括风险管理和资产定价)中的一些重要问题.

4.1 大单交易的最优下单策略

如果委托驱动模型中引入订单委托量,那么,此模型可用来研究大单交易的最优策略问题.王江等人建立的数学模型,假设订单簿的形状具有某种函数形式^[64-65],但与实际订单簿形状并不一致^[66],因而数学模型给出的最优策略可能并非最优.在建立模拟市场后,将可以通过模拟来确定订单簿在大单交易冲击下的恢复行为(resilience behavior),搜索

大宗交易的最优下单策略.

4.2 涨跌停板机制设置对股市的影响

许多股市设置涨跌停板机制,以降低市场波动和风险^[67].一般来说,上涨幅度限制 U_{lim} 和下跌幅度限制 B_{lim} 是对称的,比如我国股市采用 10% 的涨跌停限制(ST 股票为 5%).通过股市模型的计算实验,可以考察涨跌停幅度对股市的影响,从而为政策制定提供理论指导.图 15 模拟了不同涨跌停限制下股票价格 p 的走势,可以发现,不对称的涨跌停设置将导致股价单边上扬或下跌. N 为模拟的次数.

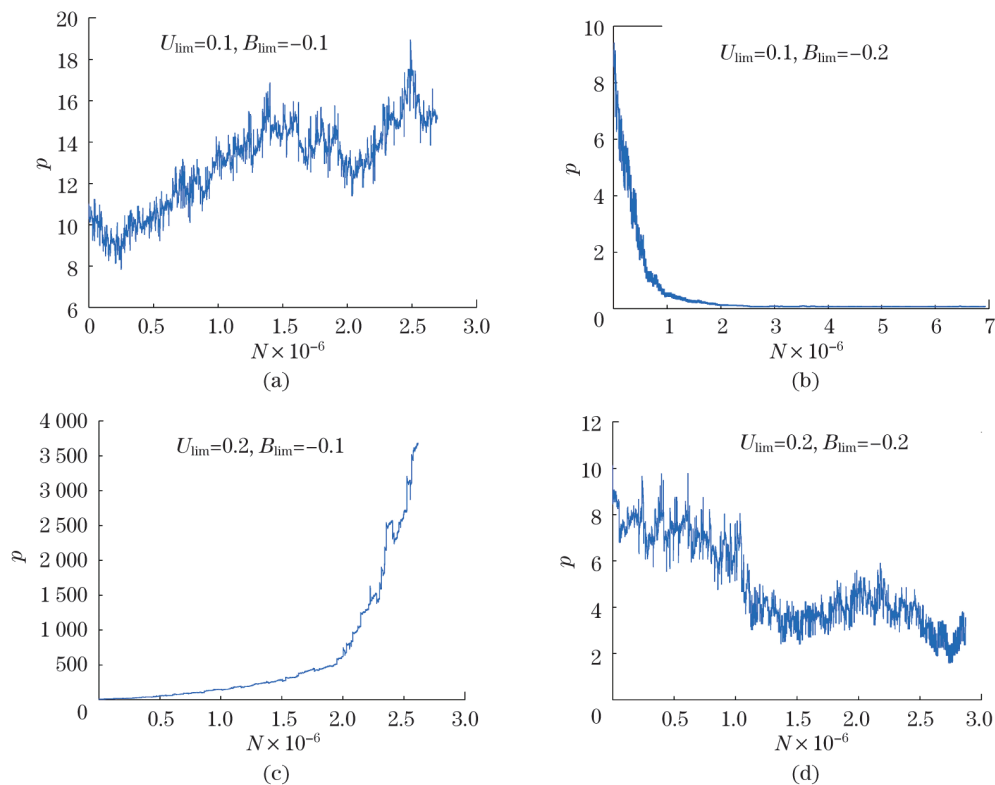


图 15 涨跌停幅度对股价的影响

Fig. 15 Plot of price series under four different combinations between U_{lim} and B_{lim}

4.3 期权定价

在传统的资本资产定价理论中,假设收益率的分布是正态的,而实际定价则往往需要通过数值模拟来实现.借助委托驱动模型,对给定股票衍生品的定价将有很大裨益.对于欧式看涨或看跌期权,其价值为

$$c = \max(S_T - X, 0) \exp[-r(T - t)] \quad (11)$$

$$p = \max(X - S_T, 0) \exp[-r(T - t)] \quad (12)$$

可以通过模型模拟,生成价格路径,得到标的股票在 T 时刻的价格 S_T ,从而得到期权价值的一个估计值.重复多次模拟,得到期权价格的均值即为其期望的估计值.

4.4 在险价值(VaR)的估计

在险价值 VaR 有多种估计方法,如历史模拟法、蒙特卡洛模拟法及方差-异方差法等^[68].通过模型模拟,可以得到统计显著性更高的收益率分布.对这一问题的深入研究,可望开发出精确度更高的 VaR 估计方法.

4.5 极端股市波动发生时间的预测

收益率时间序列中数值超过某一设定阈值 Q 的事件被称为极端事件,这些极端事件之间的回复时间 τ 的统计性质对研究股票价格大波动具有重要意义^[69].通过计算回复时间的概率密度 $P_Q(\tau)$,可以得到一个极端事件发生 x 时间后在 Δx 内发生另一极

端事件的概率 $W_Q(x, \Delta x)^{[70]}$.

$$W_Q(x, \Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} P_Q(\tau) d\tau / \int_x^\infty P_Q(\tau) d\tau \quad (13)$$

进一步地,如果确定了回复时间的条件概率 $P(\tau | \tau_0)$,那么,在前一回复时间为 τ_0 且上次极端事件发生 x 时间的条件下,发生下一极端事件的等待时间为^[71]

$$\tau_Q(x | \tau_0) = \int_x^\infty (\tau - x) P_Q(\tau | \tau_0) d\tau / \int_x^\infty P_Q(\tau | \tau_0) d\tau \quad (14)$$

这些研究将对金融市场风险管理具有重要价值和指导意义.

5 结 论

Mike-Farmer 委托驱动模型由下单过程和撤单过程两部分组成. 下单过程中订单符号的时间序列由分数布朗运动产生,而委托价格时间序列由学生分布生成. 撤单过程有 3 个影响因素,即订单在委托簿中的位置变化,委托簿的不均衡性和委托簿中订单的总量,它们共同决定了委托簿中订单的撤单概率. 运用 MF 模型进行数值模拟,生成收益率时间序列,其概率分布在不同时间尺度下遵循学生分布,服从负三次方定律,幂律尾指数随着时间尺度的增大而增大,这 and 实际股票市场的规律是一致的. 在研究收益率时间序列具有幂律尾分布的原因时,本文发现不管相对价格概率分布的右半部分是否具有幂律分布,只要其左半部分具有幂律分布,那么模型生成的收益率也具有幂律尾分布. 基于相对价格时间序列具有长期记忆性的实证结果,本文对 MF 模型进行改进和修正,在保持其它因素不变的基础上,在相对价格时间序列中加入长期记忆性. 修正的 MF 模型生成的波动率时间序列比原始 MF 模型生成的波动率时间序列更具有长期记忆性,因此,本文认为相对价格的聚簇效应对波动率的记忆性具有重要的影响作用.

参考文献:

- [1] BROCK W A, HOMMES C H. A rational route to randomness[J]. *Econometrica*, 1997, 65(5): 1059 - 1095.
- [2] GAUNERSDORFER A. Endogenous fluctuations in a simple asset pricing model with heterogeneous agents [J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2000, 24: 799 - 831.
- [3] LEBARON B. Evolution and time horizons in an agent based stock market [J]. *Macroeconomic Dynamics*, 2001, 5: 225 - 254.
- [4] HOMMES C H. Financial markets as nonlinear adaptive evolutionary systems [J]. *Quantitative Finance*, 2001, 1(1): 149 - 167.
- [5] 周炜星. 金融物理学导论[M]. 上海: 上海财经大学出版社, 2007.
- [6] EISLER Z, KERTESZ J. Multifractal model of asset returns with leverage effect [J]. *Physica A*, 2004, 343 (15): 603 - 622.
- [7] CALVET E, FISHER J. Forecasting multifractal volatility [J]. *Journal of Econometrics*, 2001, 105 (1): 27 - 58.
- [8] BACRY E, DELOUR J, MUZY J F. Modelling financial time series using multifractal randomwalks [J]. *Physica A*, 2001, 299(1/2): 84 - 92.
- [9] POCHART B, BOUCHAUD J P. The skewed multifractal random walk with applications to option smiles [J]. *Quantitative Finance*, 2002, 2(4): 303 - 314.
- [10] LILLO F, MORO E, VAGLICA G, et al. Specialization of strategies and herding behavior of trading firms in a financial market [J]. *New Journal of Physics*, 2008, 10 (4): 043019.
- [11] BLACK F. Noise [J]. *Journal of Finance*, 1986, 41 (3): 529 - 543.
- [12] LUX T, MARCHESE M. Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market [J]. *Nature*, 1999, 397(6719): 498 - 500.
- [13] CONT R, BOUCHAUD J P. Herd behavior and aggregate fluctuations in financial markets [J]. *Macroeconomic Dynamics*, 2000, 4(2): 170 - 196.
- [14] STAUFFER D. Can percolation theory be applied to the stock market? [J]. *Annals of Physics*, 1998, 7(5): 529 - 538.
- [15] STAUFFER D, PENNA T J P. Crossover in the Cont-Bouchaud percolation model for market fluctuations [J]. *Physica A*, 1998, 256(3/4): 284 - 290.
- [16] STAUFFER D, AHARONY A. An Introduction to Percolation Theory [M]. London: Taylor and Francis, 1994.
- [17] EGUILUZ V, ZIMMERMANN M. Transmission of information and herd behavior: An application to financial markets [J]. *Physical Review Letters*, 2000, 85 (26): 5659 - 5662.
- [18] ZHENG B, REN F, TRIMPER S, ZHENG D F. A generalized dynamic herding model with feed-back interactions [J]. *Physica A*, 2004, 343(4): 653 - 661.
- [19] CHALLET D, ZHANG Y C. Emergence of cooperation and organization in an evolutionary game [J]. *Physica*

- A, 1997, 246(3): 407 – 418.
- [20] CHALLET D, MARSILI M, ZHANG Y C. Minority Games: Interacting Agents in Financial Markets[M]. Oxford: Oxford University Press, 2005.
- [21] CHALLET D, MARSILI M, ZHANG Y C. Modeling market mechanism with minority game[J]. Physica A, 2000, 276(1/2): 284 – 315.
- [22] REN F, ZHENG B, QIU T, et al. Minority games with score-dependent and agent-dependent payoffs [J]. Physical Review E, 2006, 74(4): 041111.
- [23] ANDERSEN J V, SORNETTE D. The $\$$ -game[J]. European Physical Journal B, 2003, 31(1): 141 – 145.
- [24] KOZLOWSKI P, MARSILI M. Statistical mechanics of the majority game[J]. Journal of Physics A, 2003, 36(47): 11725 – 11737.
- [25] REN F, ZHANG Y C. Trading model with pair pattern strategies[J]. Physica A, 2008, 387(22): 5523 – 5534.
- [26] ISING E. Report on the theory of ferromagnetism[J]. Zeitschrift Für Physik, 1925, 31: 253 – 258.
- [27] FOELLMER H. Random economies with many interacting agents[J]. Journal of mathematical Economics, 1974, 1(1): 51 – 62.
- [28] CHOWDHURY D, STAUFFER D. A generalized spin model of financial markets [J]. European Physical Journal B, 1999, 8(3): 477 – 482.
- [29] JOHANSEN A, LEDOIT O, SORNETTE D. Crashes as critical points[J]. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2000, 3(2): 219 – 255.
- [30] SORNETTE D, ZHOU W X. Importance of positive feedbacks and over-confidence in a self-fulfilling Ising model of financial markets[J]. Physica A, 2006, 370(2): 704 – 726.
- [31] ZHOU W X, SORNETTE D. Self-organizing ising model of financial markets[J]. European Physical Journal B, 2007, 55(2): 175 – 181.
- [32] KRAWIECKI A. Microscopic spin model for the stock market with attractor bubbling and heterogeneous agents[J]. International Journal of Modern Physics C, 2005, 16(4): 549 – 559.
- [33] TAKAISHI T. Simulations of financial markets in a Potts-like model[J]. International Journal of Modern Physics C, 2005, 16(8): 1311 – 1317.
- [34] MONTEROLL E W, BADGER W W. Introduction to Quantitative Aspects of Social Phenomena[M]. New York: Gordon and Breach, 1974.
- [35] BORNHOLDT S. Expectation bubbles in a spin model of markets: Intermittency from frustration across scales[J]. International Journal of Modern Physics C, 2001, 12(5): 667 – 674.
- [36] WILLMANN R D, SCHUTZ G M, CHALLET D. Exact Hurst exponent and crossover behavior in a limit order market model[J]. Physica A, 2002, 316(1/2/3/4): 430 – 440.
- [37] PREIS T, GOLKE S, PAUL W, et al. Multi-agent-based Order Book Model of financial markets[J]. Europhysics Letters, 2006, 75(3): 510 – 516.
- [38] FARMER J D, PATELLI P, ZOVKO I I. The predictive power of zero intelligence in financial markets[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA, 2005, 102(6): 2254 – 2259.
- [39] SLANINA F. Critical comparison of several order-book models for stock-market fluctuations [J]. European Physical Journal B, 2008, 61(2): 225 – 240.
- [40] STIGLER G J. Public regulation of the securities markets[J]. Journal of Business, 1964, 37(2): 117 – 142.
- [41] BAK P, PACZUSKI M, SHUBIK M. Price variations in a stock market with many agents[J]. Physica A, 1997, 246(3/4): 430 – 453.
- [42] MASLOV S. Simple model of a limit order-driven market[J]. Physica A, 2000, 278(3/4): 571 – 578.
- [43] SVORENCIK A, SLANINA F. Interacting gaps model, dynamics of order book, and stock market fluctuations [J]. European Physical Journal B, 2007, 57(4): 453 – 462.
- [44] PREIS T, GOLKE S, PAUL W, et al. Statistical analysis of financial returns for a multiagent order book model of asset trading [J]. Physical Review E, 2007, 76(1): 016108.
- [45] MIKE S, FARMER J D. An empirical behavioral model of liquidity and volatility[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2008, 32(1): 200 – 234.
- [46] LILLO F, FARMER J D. The long memory of the efficient market[J]. Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics, 2004, 8(3): 1 – 33.
- [47] ZOVKO I, FARMER J D. The power of patience: A behavioural regularity in limit-order placement [J]. Quantitative Finance, 2002, 2(5): 387 – 392.
- [48] BOUCHAUD J P, M'EZARD M, POTTERS M. Statistical properties of stock order books: Empirical results and models [J]. Quantitative Finance, 2002, 2(4): 251 – 256.
- [49] POTTERS M, BOUCHAUD J P. More statistical properties of order books and price impact[J]. Physica A, 2003, 324(1/2): 133 – 140.
- [50] MASKAWA J I. Correlation of coming limit price with order book in stock markets[J]. Physica A, 2007, 383

- (1):90-95.
- [51] GU G F, CHEN W, ZHOU W X. Empirical regularities of order placement in the Chinese stock market[J]. *Physica A*, 2008, 387(13):3173-3182.
- [52] DANIELS M G, FARMER J D, GILLEMOT L, et al. Quantitative model of price diffusion and market friction based on trading as a mechanistic random process[J]. *Physical Review Letters*, 2003, 90(10):108102.
- [53] GU G F, ZHOU W X. On the probability distribution of stock returns in the Mike-Farmer model[J]. *European Physical Journal B*, 2009, 67(4):585-592.
- [54] PLEROU V, GOPIKRISHNAN P, AMARAL L A N, et al. Scaling of the distribution of price fluctuations of individual companies[J]. *Physical Review E*, 1999, 60(6):6519-6529.
- [55] LEE K E, LEE J W. Scaling properties of price changes for Korean stock indices[J]. *Journal of the Korean Physical Society*, 2004, 44(1):668-671.
- [56] BLATTBERG R C, GONEDES N J. A comparison of the stable and student distributions as statistical models for stock prices[J]. *Journal of Business*, 1974, 47(2):244-280.
- [57] PENG C K, BULDYREV S V, HAVLIN S, et al. Mosaic organization of DNA nucleotides[J]. *Physical Review E*, 1994, 49(2):1685-1689.
- [58] BOUCHAUD J P, GEFEN Y, POTTERS M, et al. Fluctuations and response in financial markets: the subtle nature of 'random' price changes[J]. *Quantitative Finance*, 2004, 4(2):176-190.
- [59] ALEVY J E, HAIGH M S, LIST J A. Information cascades: Evidence from a field experiment with financial market professionals[J]. *Journal of Finance*, 2007, 62(1):151-180.
- [60] BIAIS B, HILLION P, SPATT C. An empirical analysis of the limit order book and the order flow in the Paris Bourse[J]. *Journal of Finance*, 1995, 50(5):1655-1689.
- [61] SAMORODNITSKY G, TAQQU M S. Stable Non-Gaussian Random Processes; Stochastic Models with Infinite Variance[M]. New York; Chapman and Hall, 1994.
- [62] BOGACHEV M I, EICHNER J F, BUNDE A. Effect of nonlinear correlations on the statistics of return intervals in multifractal data sets[J]. *Physical Review Letters*, 2007, 99(24):240601.
- [63] ZHOU W X. Multifractal detrended cross-correlation analysis for two nonstationary signals[J]. *Physical Review E*, 2008, 77(6):066211.
- [64] OBIZHAIEVA A, WANG J. Optimal trading strategy and supply/demand dynamics. Accepted by *J. Fin. Markets* [EB/OL]. [2005-03-20]. <http://ssrn.com/abstract=686168>.
- [65] ALFONSI A, SCHIED A, SCHULZ A. Optimal execution strategies in limit order books with general shape functions[J]. *Quantitative Finance*, 2010, 10(2):143-157.
- [66] GU G F, CHEN W, ZHOU W X. Empirical shape function of limit-order books in the Chinese stock market[J]. *Physica A*, 2008, 387(21):5182-5188.
- [67] SUBRAHMANYAM A. Circuit breakers and market volatility: A theoretical perspective[J]. *Journal of Finance*, 1994, 49(1):237-254.
- [68] CABEDO J D, MOYA I. Estimating oil price "Value at Risk" using historical simulation approach[J]. *Energy Economics*, 2003, 25(3):239-253.
- [69] YAMASAKI K, MUCHNIK L, HAVLIN S, et al. Scaling and memory in volatility return intervals in financial markets[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2005, 102(26):9424-9428.
- [70] BOGACHEV M I, EICHNER J F, BUNDE A. Effect of nonlinear correlations on the statistics of return intervals in multifractal data sets[J]. *Physical Review Letters*, 2007, 99(24):240601.
- [71] BUNDE A, EICHNER J F, KANTELHARDT J W, et al. Long-term memory: A natural mechanism for the clustering of extreme events and anomalous residual times in climate records[J]. *Physical Review Letters*, 2005, 94(4):048701.