

文章编号: 1007-6735(2011)05-0480-05

# 一类含潜伏时滞的 SIS 传染病模型的定性研究

赵 瑜<sup>1</sup>, 原三领<sup>2</sup>, 李 盼<sup>2</sup>

(1. 宁夏师范学院 数学与计算机科学学院, 宁夏 756000; 2. 上海理工大学 理学院, 上海 200093)

**摘要:** 利用构造 Liapunov 泛函的方法, 研究了一类含有潜伏期时滞的 SIS 传染病模型. 得到了地方病平衡点和无病平衡点局部及全局渐近稳定的充分条件; 当时滞超过某一临界值时, 地方病平衡点失去稳定性, 通过 Hopf 分支在其附近跳出极限环. 揭示了时滞对疾病传播的影响.

**关键词:** 传染病模型; 时滞; Liapunov 泛函; 稳定性; Hopf 分支

**中图分类号:** O 175.1 **文献标志码:** A

## Qualitative analysis of an SIS epidemic model with latent delay

ZHAO Yu<sup>1</sup>, YUAN San-ling<sup>2</sup>, LI Pan<sup>2</sup>(1. School of Math and Computer Science, Ningxia Teachers College, Ningxia 756000, China;  
2. College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

**Abstract:** An SIS epidemic model with a delay corresponding to the latent period was investigated. By means of constructing Liapunov functionals, some sufficient conditions for the local and global stability of the endemic equilibrium and the disease-free equilibrium were obtained, respectively. When the delay increases above some threshold, the endemic equilibrium loses its stability and Hopf bifurcation occurs, i. e., a family of periodic solutions bifurcates from the endemic equilibrium. The effect of the delay on the spread of disease was disclosed.

**Key words:** epidemic model; delay; Liapunov functional; stability; Hopf bifurcation

由于人类或动物侵入新的生态系统、全球变暖、环境退化、国际旅行增加等因素的影响, 将增大新产生或已存在的传染病流行的机会. 数学建模已经成为分析流行病传播和控制的重要工具<sup>[1]</sup>. 文献[2]考虑了一类具有染病期时滞和常数人口输入的 SIS 传染病模型, 文献[3]考虑了两类具有染病期时滞的 SIS

传染病模型. 文献[4]考虑了具有时滞和总人口变动的 SIS 传染病模型, 类似的还可参见文献[5-10].

在通常的 SIS 传染病模型中, 易感者被感染后成为染病者, 染病者康复后又再次成为易感者. 在以往考虑的有关 SIS 模型的文献中大多假设易感者与染病者充分接触后立即成为染病者, 未考虑易感者

**收稿日期:** 2009-12-09

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(10871129); 上海市教委专项基金资助项目(09YZ208); 宁夏自然科学基金资助项目(NZ102228)

**作者简介:** 赵 瑜(1982-), 男, 讲师. 研究方向: 生物数学. E-mail: zhaoyuzy123@163.com

原三领(联系人), 男, 副教授. 研究方向: 微分方程与动力系统、生物数学. E-mail: yuansanling@263.net

被疾病感染后的潜伏过程. 本文在以往文献的基础上, 假设易感者被感染后不是立即对外呈现传染力, 而是具有一定的潜伏时间, 并把此考虑为时滞因素, 建立了一类含有相当于潜伏期时滞的 SIS 传染病模型. 利用构造 Liapunov 泛函的方法, 得到了各类平衡点局部和全局渐近稳定的充分条件; 当时滞超过某一临界值时, 地方病平衡点失去稳定性, 通过 Hopf 分支在其附近跳出极限环, 疾病的传播会呈现周期性的振荡现象.

## 1 模型

假设  $t$  时刻总人口为  $N(t)$ , 把总人口分为易感者类, 染病者类, 即  $N(t) = S(t) + I(t)$ , 其中  $S(t)$  和  $I(t)$  分别表示  $t$  时刻易感者类和染病者类的数量, 考虑模型

$$\begin{cases} \dot{S} = -aU(S)I + S_0 - \mu_d S + rI \\ \dot{I} = I[maU(S(t-\tau)) - (\mu_d + e + r)] \end{cases} \quad (1)$$

其中, 所有的参数均为正常数.  $a$  为疾病最大传染力;  $S_0$  为人口的净迁入;  $\mu_d$  为人口的自然死亡率;  $r$  为疾病的恢复率;  $e$  为因病死亡率;  $\tau$  为易感者感染疾病后的潜伏期;  $m$  为易感者被感染经潜伏期后进入染病者类的比率;  $aU(S)$  表示染病者具有的传染力, 且满足

$$\begin{cases} U(0) = 0 \\ \frac{dU}{dS} > 0 \\ \lim_{S \rightarrow \infty} U(S) = 1 \end{cases} \quad (2)$$

容易验证:

a. 系统(1)总是存在无病平衡点  $E_0 = \left(\frac{S_0}{\mu_d}, 0\right)$ ;

b. 假设  $\mu_d + e + r < ma$ , 并且  $S_0 > \mu_d S^*$ , 系统(1)具有唯一的正平衡点  $E^* = (S^*, I^*)$ , 其中

$$\begin{cases} S^* = U^{-1}\left(\frac{\mu_d + e + r}{ma}\right) \\ I^* = \frac{S_0 - \mu_d S^*}{aU(S^*) - r} \end{cases} \quad (3)$$

## 2 正平衡点的稳定性

### 2.1 正平衡点 $E^*$ 的局部稳定性

首先考虑正平衡点  $E^* = (S^*, I^*)$  的局部稳定性, 令

$$\begin{cases} x_1 = S - S^* \\ x_2 = I - I^* \end{cases} \quad (4)$$

则  $-S^* < x_1 < \infty$ ,  $-I^* < x_2 < \infty$ . 系统(1)关于  $E^*$  的线性化系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -[\mu_d + aI^* U'(S^*)]x_1 - (aU(S^*) - r)x_2 \\ \dot{x}_2 = maI^* U'(S^*)x_1(t - \tau) \end{cases} \quad (5)$$

为了方便讨论, 定义

$$\begin{cases} A = \mu_d + aI^* U'(S^*) \\ B = aU(S^*) - r \\ C = maI^* U'(S^*) \end{cases} \quad (6)$$

则系统(5)变成

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -Ax_1 - Bx_2 \\ \dot{x}_2 = Cx_1(t - \tau) \end{cases} \quad (7)$$

设  $(x_1(t), x_2(t))$  是系统(7)的任一解, 首先考虑泛函  $V_1(t) = x_1^2(t)$ , 当  $t > \tau$  时, 沿着系统(7)的解求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= 2x_1(t)\dot{x}_1(t) = 2x_1(t)(-Ax_1 - Bx_2) = \\ &= -2Ax_1^2(t) - 2Bx_1(t)x_2(t) \end{aligned} \quad (8)$$

令

$$V_{21}(t) = [x_2(t) + C \int_{t-\tau}^t x_1(u)du]^2 \quad (9)$$

则

$$\begin{aligned} \dot{V}_{21}(t) &= 2[x_2(t) + C \int_{t-\tau}^t x_1(u)du]Cx_1(t) = \\ &= 2Cx_1(t)x_2(t) + 2C^2x_1(t) \int_{t-\tau}^t x_1(u)du \leq \\ &= 2Cx_1(t)x_2(t) + C^2\tau x_1^2(t) + C^2 \int_{t-\tau}^t x_1(u)du \end{aligned}$$

再令

$$V_{22}(t) = C \int_{t-\tau}^t \int_r^t x_1^2(u)du dr \quad (10)$$

则

$$\dot{V}_{22}(t) = C^2[\tau x_1^2(t) - \int_{t-\tau}^t x_1^2(u)du]$$

考虑泛函  $V_2(t) = V_{21}(t) + V_{22}(t)$ , 由式(8)与式(10), 得

$$\dot{V}_2(t) \leq 2Cx_1(t)x_2(t) + 2C^2\tau x_1^2(t) \quad (11)$$

再令

$$V(t) = V_1(t) \times C + V_2(t) \times B$$

由式(8)和式(11), 得

$$\dot{V}(t) \leq -2C(A - BC\tau)x_1^2(t) \quad (12)$$

由式(12)可证明如下结论:

**定理 1** 如果  $\tau < \frac{A}{BC}$ , 则系统(1)的正平衡点

$E^*$  是局部渐近稳定的.

**证明** 设  $(x_1(t), x_2(t))$  是系统(7)的任一解, 令  $T_0 > \tau$ , 对式(12)的两边由  $T_0$  到  $t (\geq T_0)$  积分, 得到

$$V(t) + \int_{T_0}^t 2(AC - BC^2 \tau) \cdot x_1^2(s) ds \leq V(T_0) \quad (13)$$

其中

$$V(t) = V_1(t) \times C + V_2(t) \times B \geq Cx_1^2(t) + Bx_2^2(t)$$

故由式(13), 可得

$$Cx_1^2(t) + Bx_2^2(t) + 2(AC - BC^2 \tau) \cdot \int_{T_0}^t x_1^2(s) ds \leq V(T_0) < +\infty$$

因此  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  是有界的, 并且  $x_1(t) \in L_1[0, \infty)$ , 由系统(7)和中值定理有  $x_1(t), x_2(t)$  及其微分泛函在  $[0, \infty)$  上是一致连续的. 由 Barbalat 引理(见 Gopalsamy<sup>[9]</sup> 引理 1.2.2 和 1.2.3), 可得当  $t \rightarrow \infty$  时,  $(x_1(t), \dot{x}_1(t)) \rightarrow 0$ . 因此由系统(7)的第一个方程, 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [-Bx_2(t)] = 0 \quad (14)$$

即当  $t \rightarrow \infty$  时,  $x_2(t) \rightarrow 0$ . 因此对系统(7)的任一解都有  $(x_1(t), x_2(t)) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$ .

## 2.2 正平衡点 $E^*$ 的全局渐近稳定性

为了研究  $E^*$  的全局稳定性, 考虑系统(1)的任一正解  $X(t) = (S(t), I(t))$ . 做变换

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= S - S^* \\ x_2 &= \ln(I/I^*) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

定义

$$\xi(x_1) = U(x_1 + S^*) - U(S^*)$$

由假设方程组(2)有  $-U(S^*) \leq \xi(x_1) < 1 - U(S^*)$ , 则

$$\left. \begin{aligned} S &= x_1 + S^* \\ I &= I^* e^{x_2} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

且对任意的  $x_1 \in [-S^*, +\infty]$  都有  $x_1 \xi(x_1) > 0$ , 当且仅当  $x_1 = 0$  时,  $x_1 \xi(x_1) = 0$ . 由式(15), 系统(1)可写成

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\mu_d x_1(t) - aI^* e^{x_2(t)} \xi(x_1(t)) - aU(S^*)I^* [e^{x_2(t)} - 1] + rI^* [e^{x_2(t)} - 1] \\ \dot{x}_2(t) &= ma\xi(x_1(t - \tau)) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

此时, 系统(1)的正平衡点被变换成系统(17)的平衡点  $(0, 0)$ .

**定理 2** 如果  $\mu_d + e + r < ma$ ,  $S_0 > \mu_d S^*$ ,  $T_r < 1$ , 则正平衡点  $E^*$  是全局渐近稳定的. 其中

$$T_r = \frac{1}{2} m[aU(S^*) - r] \left[ \frac{1}{ma - \mu_d - e - r} \cdot (e^{(ma - \mu_d - e - r)\tau} - 1) + \tau e^{(ma - \mu_d - e - r)\tau} \right] \quad (18)$$

**证明** 首先, 证明  $E^*$  是全局吸引的. 令  $(x_1(t), x_2(t))$  是系统(17)的任一解, 考虑泛函

$$V_1(t) = \int_0^{x_1(t)} \xi(u) du \quad (19)$$

则  $V_1(t) \geq 0$ , 当且仅当  $x_1(t) = 0$  时  $V_1(t) = 0$ . 沿着系统(17)的解求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= \xi(x_1(t)) \dot{x}_1(t) = -\mu_d x_1(t) \xi(x_1(t)) - aI^* e^{x_2(t)} \xi^2(x_1(t)) - [aU(S^*) - r] \cdot I^* \xi(x_1(t)) [e^{x_2(t)} - 1] \end{aligned}$$

令

$$V_2(t) = \int_0^{x_2(t)} (e^s - 1) ds \quad (20)$$

则

$$\dot{V}_2(x(t + \tau)) = ma\xi(x_1(t)) [e^{x_2(t + \tau)} - 1]$$

令

$$V_3(t) = V_1(x_1(t)) + \frac{[aU(S^*) - r]I^*}{ma} V_2(x(t + \tau)) \quad (21)$$

则, 可得

$$\begin{aligned} V_3(t) &= -\mu_d x_1(t) \xi(x_1(t)) - aI^* e^{x_2(t)} \xi^2(x_1(t)) + [aU(S^*) - r]I^* \xi(x_1(t)) [e^{x_2(t + \tau)} - e^{x_2(t)}] = \\ &= -\mu_d x_1(t) \xi(x_1(t)) - aI^* e^{x_2(t)} \xi^2(x_1(t)) + [aU(S^*) - r]I^* \xi(x_1(t)) \int_t^{t + \tau} e^{x_2(u)} \dot{x}_2(u) du = \\ &= -\mu_d x_1(t) \xi(x_1(t)) - aI^* e^{x_2(t)} \xi^2(x_1(t)) + [aU(S^*) - r]I^* \xi(x_1(t)) ma \int_t^{t + \tau} e^{x_2(u)} \cdot \xi(x_1(u - \tau)) du \leq \\ &= -\mu_d x_1(t) \xi(x_1(t)) - aI^* e^{x_2(t)} \xi^2(x_1(t)) + \frac{1}{2} ma[aU(S^*) - r] \cdot I^* \int_t^{t + \tau} e^{x_2(t)} [\xi^2(x_1(t)) + \xi^2(x_1(u - \tau))] du = \\ &= -\mu_d x_1(t) \xi(x_1(t)) - aI^* e^{x_2(t)} \xi^2(x_1(t)) + \frac{1}{2} ma[aU(S^*) - r]I^* \xi^2(x_1(t)) \int_t^{t + \tau} e^{x_2(u)} du \end{aligned}$$

再令

$$V_4(t) = \frac{1}{2} ma[aU(S^*) - r] \cdot I^* \int_{t - \tau}^t \int_r^t e^{x_2(v + \tau)} \xi^2(x_1(v)) dv dr \quad (22)$$

则

$$\dot{V}_4(t) = \frac{1}{2}ma[aU(S^*) - r] \cdot$$

$$I^* \int_{t-\tau}^t e^{x_2(u+\tau)} \xi^2(x_1(t)) du$$

考虑泛函

$$V_5(t) = V_3(t) + V_4(t) \quad (23)$$

则

$$\begin{aligned} \dot{V}_5(t) = & -\mu_d x_1(t) \xi(x_1(t)) - aI(t) \xi^2(x_1(t)) + \\ & \frac{1}{2}ma[aU(S^*) - r] \xi^2(x_1(t)) \int_t^{t+\tau} I(u) du + \\ & \frac{1}{2}ma[aU(S^*) - r] \xi^2(x_1(t)) \cdot \\ & \left[ \int_t^{t+\tau} I(u) du + \tau I(t+\tau) \right] \end{aligned}$$

另一方面,由系统(1)的第二个方程,可得

$$\dot{I}(t) \leq [ma - (\mu_d + e + r)]I(t) \quad (24)$$

因此,有

$$I(t) \leq e^{[ma - (\mu_d + e + r)](s-t)}, \quad (s \geq t > 0) \quad (25)$$

由系统(17)和式(25),得

$$\begin{aligned} \dot{V}_5 = & -\mu_d x_1(t) \xi(x_1(t)) - aI(t) \xi^2(x_1(t)) + \\ & \frac{1}{2}ma[aU(S^*) - r] \xi^2(x_1(t)) \cdot \\ & \int_t^{t+\tau} e^{[ma - (\mu_d + e + r)](s-t)} + \tau e^{[ma - (\mu_d + e + r)]\tau} du = \\ & -\mu_d x_1(t) \xi(x_1(t)) - aI(t) \xi^2(x_1(t)) + \\ & \frac{1}{2}ma[aU(S^*) - r] \xi^2(x_1(t)) \cdot \\ & \left[ \frac{1}{ma - \mu_d - e - r} (e^{(ma - \mu_d - e - r)\tau} - 1) + \right. \\ & \left. \tau e^{(ma - \mu_d - e - r)\tau} \right] I(t) = -\mu_d x_1(t) \xi(x_1(t)) - \\ & a(1 - T_r)I(t) \xi^2(x_1(t)) \end{aligned} \quad (26)$$

类似于定理1的证明过程,可以证明当  $T_r < 1$  时,正平衡点  $E^*$  是全局吸引的. 又由定理1,  $E^*$  是局部渐近稳定的,因此  $E^*$  是全局渐近稳定的.

### 3 $E^*$ 处的 Hopf 分支

系统(7)的特征方程为

$$\lambda^2 + A\lambda + BCe^{-\lambda\tau} = 0 \quad (27)$$

令  $\lambda = \mu + iv$ , 代入方程(27), 得到方程

$$\begin{cases} \mu^2 - v^2 + \mu A = -BCe^{-\mu\tau} \cos v\tau \\ 2\mu v + Av = BCe^{-\mu\tau} \sin v\tau \end{cases} \quad (28)$$

$E^*$  的稳定性改变的必要条件是特征方程具有一对

纯虚根  $\lambda = iv$ , 设  $\tau = \hat{\tau}$  使得  $\mu(\hat{\tau}) = 0$ , 由方程(28)

得(其中  $\hat{v} = v(\hat{\tau})$ )

$$\begin{cases} \hat{v}^2 = BC \cos \hat{v}\hat{\tau} \\ A\hat{v} = BC \sin \hat{v}\hat{\tau} \end{cases} \quad (29)$$

方程(29)中两式平方相加,得

$$F(\hat{v}) = \hat{v}^4 + A^2 \hat{v}^2 - B^2 C^2 = 0 \quad (30)$$

方程(30)具有唯一正实根

$$\hat{v} = \sqrt{\frac{-A^2 + \sqrt{A^2 + 4B^2 C^2}}{2}} > 0$$

由方程(29)可解得  $\hat{\tau}$  为

$$\hat{\tau}_k = \frac{1}{\hat{v}} \arcsin \frac{A\hat{v}}{BC} + \frac{2k\pi}{\hat{v}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (31)$$

为了证明在  $\tau = \hat{\tau}_k$  处存在 Hopf 分支, 需要验证

$(d/d\tau)\mu(\hat{\tau}_k) \neq 0$ . 对方程(29)两端关于  $\tau$  求导, 得

$$\begin{cases} (A - BC\tau \cos v\tau) \frac{d\mu}{d\tau} - \\ (2v + BC\tau \sin v\tau) \frac{dv}{d\tau} = BCv \sin v\tau \\ (2v + BC\tau \sin v\tau) \frac{d\mu}{d\tau} + \\ (A - BC\tau \cos v\tau) \frac{dv}{d\tau} = BCv \cos v\tau \end{cases} \quad (32)$$

故

$$\frac{d\mu}{d\tau} \Big|_{\tau=\hat{\tau}_k} = \frac{\begin{vmatrix} BCv \sin v\tau & -(2v + BC\tau \sin v\tau) \\ BCv \cos v\tau & A - BC\tau \cos v\tau \end{vmatrix}}{M^2 + N^2}$$

其中,  $M = A - BC\tau \cos v\tau$ ,  $N = 2v + BC\tau \sin v\tau$ . 因此

$$\text{sign} \left( \frac{d\mu}{d\tau} \Big|_{\tau=\hat{\tau}_k} \right) =$$

$$\text{sign} \frac{\begin{vmatrix} BC\hat{v} \sin \hat{v}\hat{\tau} & -(2\hat{v} + BC\hat{\tau} \sin \hat{v}\hat{\tau}) \\ BC\hat{v} \cos \hat{v}\hat{\tau} & A - BC\hat{\tau} \cos \hat{v}\hat{\tau} \end{vmatrix}}{M^2 + N^2} =$$

$$\text{sign} \frac{\begin{vmatrix} BC\hat{v} \sin \hat{v}\hat{\tau} & -(2\hat{v} + BC\hat{\tau} \sin \hat{v}\hat{\tau}) \\ BC\hat{v} \cos \hat{v}\hat{\tau} & A - BC\hat{\tau} \cos \hat{v}\hat{\tau} \end{vmatrix}}{M^2 + N^2} =$$

$$\text{sign} |ABC \sin \hat{v}\hat{\tau} + BC\hat{v} \cos \hat{v}\hat{\tau}| =$$

$$\text{sign} \{A^2 \hat{v} + 2\hat{v}^4\} = 1$$

由 Hopf 分支理论<sup>[11]</sup>, 在  $\hat{\tau}_0 = \frac{1}{\hat{v}} \arcsin \frac{A\hat{v}}{BC}$  附近,  $E^*$

将产生 Hopf 分支, 因此, 系统(1)存在周期解.

## 4 无病平衡点 $E_0$ 的稳定性

考虑无病平衡点  $E_0 = (\bar{S}, 0)$  的稳定性, 其中  $\bar{S} = \frac{S_0}{\mu_d}$ , 得到如下的定理:

**定理 3** 如果  $\mu_d + e + r > ma$ , 则无病平衡点  $E_0$  是全局渐近稳定的.

**证明** 定义  $x(t) = S(t) - \bar{S}$ ,  $\xi(x(t)) = U(x(t)) = U(x(t) + \bar{S}) - U(\bar{S})$ , 由式(2)知:  $-\bar{S} \leq x(t) < +\infty$ ,  $-U(\bar{S}) \leq \xi(x(t)) < 1 - U(\bar{S})$ . 系统(1)可写成

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= -a\xi(x(t))I(t) - \\ &\quad aU(\bar{S}) - \mu_d x(t) + rI(t) \\ \dot{I}(t) &= maI(t)\xi(x(t-\tau)) + \\ &\quad I(t)[-(\mu_d + e + r) + maU(\bar{S})] \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

由方程(33)的第二个方程, 可得

$$\begin{aligned} \dot{I}(t) &= maI(t)\xi(x(t-\tau)) + I(t)[-(\mu_d + e + r) + \\ &\quad maU(\bar{S})] \leq maI(t)(1 - U(\bar{S})) + I(t) \cdot \\ &\quad [-(\mu_d + e + r) + maU(\bar{S})] = \\ &\quad [ma - (\mu_d + e + r)]I(t) \end{aligned}$$

当  $ma < \mu_d + e + r$  时,  $I(t) \leq I(t_0) \exp[ma - (\mu_d + e + r)](t - t_0)$ , 所以当  $t \rightarrow \infty$  时,  $I(t) \rightarrow 0$ . 由方程(33)的第一个方程, 有

$$\dot{x}(t) \leq -a[\xi(x(t)) + U(\bar{S})]I(t) - \mu_d x(t) + rI(t) \quad (34)$$

由方程(34)可得, 当  $I(t) \rightarrow 0$  时,  $x(t) \rightarrow 0$ . 因此, 当  $\mu_d + e + r > ma$  时, 无病平衡点  $E_0$  是全局渐近稳定的.

## 5 讨论

将易感者被感染后的潜伏期作为时滞因素, 考虑了一类含时滞的 SIS 传染病模型. 利用构造 Liapunov 泛函的方法, 得到了各类平衡点局部和全局渐近稳定的条件: 如果  $\mu_d + e + r > ma$ , 无病平衡

点  $E_0$  是全局渐近稳定的; 如果  $\mu_d + e + r < ma$ ,  $S_0 > \mu_d S^*$ ,  $T_r < 1$ , 则正平衡点  $E^*$  是全局渐近稳定的. 当  $\tau \in (0, \tau_0)$  时, 平衡点  $E^*$  是稳定的, 当  $\tau > \tau_0$  时, 平衡点  $E^*$  失去稳定性, 且系统(1)在  $\tau_0$  附近从  $E^*$  处通过 Hopf 分支产生周期解, 此时, 疾病的传播呈现周期性的振荡现象.

### 参考文献:

- [1] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 等. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [2] COOKE K L, YORKE J A. Some equations modeling growth processes and gonorrhea epidemics[J]. Math Biosci, 1973, 16(1/2): 75 - 101.
- [3] HETHCOTE H W. The mathematics of infectious diseases[J]. SIAM Review, 2000, 42(4): 599 - 653.
- [4] HETHCOTE H W, DRIESCHE P van den. Two SIS epidemiologic models with delays[J]. J Math Biol, 2000, 40(1): 3 - 26.
- [5] YUAN San-ling, MA Zhi-en. Global stability and Hopf bifurcation of an SIS epidemic model with time delays[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2001, 14(3): 327 - 336.
- [6] YUAN San-ling, MA Zhi-en, JIN Zhen. Persistence and periodic solution on a nonautonomous SIS model with delays[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2003, 19(1): 167 - 176.
- [7] 胡宝安, 孙利民, 夏爱生, 等. 一类时滞 SIS 传染病模型的讨论[J]. 数学研究, 2007, 40(1): 103 - 108.
- [8] 赵瑜, 原三领, 李盼. 一类具有染病者隔离的非线性传染病模型的研究[J]. 上海理工大学学报, 2009, 31(5): 414 - 416.
- [9] 周艳丽, 王美娟. 含时滞具有饱和传染率的 SIQRS 接种传染病模型[J]. 上海理工大学学报, 2009, 31(5): 417 - 421.
- [10] YANG Kuang. Delay Differential Equation with Applications in Population Dynamics[M]. Boston: Academic Press, 1993.
- [11] MARSDEN J E, MCKRACKEN M. The Hopf Bifurcation and its Applications [M]. New York: Springer, 1976.