

文章编号:1007-6735(2011)05-0485-04

控制数固定树的邻接谱半径

陈萍, 何常香

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 研究定义在 $\Gamma_{n,\gamma}(n \geq 2\gamma+1, \gamma \geq 2)$ 中的树, 借助夺邻、嫁接等移边定理, 通过构造一种新的移边运算 Operation I, 给出了 $\Gamma_{n,\gamma}$ 中前两大谱半径, 并证明了 $T(n, r), S(n, r)$ 是达到前两大谱半径的图.

关键词: 图; 树; 邻接谱半径; 控制数

中图分类号: O 157.5 **文献标志码:** A

On the spectral radius of trees with given domination number

CHEN Ping, HE Chang-xiang

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The trees defined on $\Gamma_{n,\gamma}(n \geq 2\gamma+1, \gamma \geq 2)$ were discussed. By using the theorems of moving edges, a new operation of moving edges was constructed. The first two largest spectral radii in the class $\Gamma_{n,\gamma}$, together with the corresponding graphs were given.

Key words: graph; tree; spectral radius; domination number

仅考虑简单连通图, 设 $G = (V, E)$ 是一个以 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为顶点的集合, E 为边集合的简单连通图. G 的邻接矩阵 $A(G)$ 为一个 $n \times n$ 矩阵, 设 $A(G) = (a_{ij})$, 其中当 v_i 与 v_j 相邻时, $a_{ij} = 1$; 当 v_i 与 v_j 不相邻时, $a_{ij} = 0$. G 的特征多项式定义为 $\Phi(G, x) = \det(xI_n - A(G))$, 简记为 $\Phi(G)$. 由于 G 是一个简单图, $A(G)$ 是一个实对称 $(0, 1)$ -矩阵, 其所有特征值都为实数. 不失一般性, 可以假设

$$\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G)$$

且称 $\lambda_k(G)$ 为 G 的第 k 大特征值. 特别地, $\lambda_1(G)$ 称为 G 的谱半径, 记为 $\lambda(G)$.

令 $d_i = d(v_i)$ 表示 G 中点 v_i 的度数, P_n 表示

有 n 个点的路, G 中度数为 1 的点叫悬挂点. 悬挂路是指内部顶点度数为 2, 端点度数为 1 的路. 对于图 $G = (V, E)$, 用 $N_G(u)$ 或 $N(u)$ 来表示 G 中与 u 相邻的点的集合. 称 $U \subset V$ 为 G 的一个控制集, 若 $U \cup N(U) = V$, 其中 $N(U) = \bigcup_{u \in U} N(u)$. 控制数是指 G 中所有控制集的最小基数, 用 $\gamma(G)$ 表示. 如果 G 没有孤立点, 则 $\gamma(G) \leq n/2$. 恰有 γ 个点的控制集叫做 γ -set. 在本文中, 用 $\Gamma_{n,\gamma}(n \geq 2\gamma+1, \gamma \geq 2)$ 表示阶数为 n , 控制数为 γ 的树的集合.

文献[1]曾提出, 在给定的一类图的集合 G 中, 寻找谱半径的上界与下界, 并刻画达到了上界或下

收稿日期: 2010-09-21

作者简介: 陈萍(1986-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 组合优化. E-mail: chenping691@126.com
何常香(联系人), 女, 讲师. 研究方向: 组合优化. E-mail: changxianghe@hotmail.com

界的图.此问题提出后,掀起了对特殊图类的谱半径的研究的热潮.比如树,文献[2]研究了悬挂点数固定的树的谱半径,所有阶数为 n ,有 k 个悬挂点的树中, $T_{n,k}$ 是唯一具有最大谱的树,其中 $T_{n,k}$ 是在星图 $K_{1,k}$ 的每个悬挂点处引出一条长度几乎相等的悬挂路所得的图.文献[3]研究了割点数固定的树的谱半径,证明了在所有阶数为 n ,有 k 条割边的连通图中, K_n^k 是唯一具有最大谱的图.其中 K_n^k 是在完全图 K_{n-k} 的某个顶点上引出 k 条悬挂边而得到的图,文献[4]研究了割边数固定的图的谱半径,证明了在所有阶数 n ,有 k 条割边的连通图中, K_n^k 是唯一具有最大谱的图,其中 K_n^k 是在完全图 K_{n-k} 的某个顶点上引出 k 条悬挂边而得到的图.更多关于树的谱半径的研究见文献[5-7].笔者主要研究在控制数固定的条件下树的谱半径问题,并得到如下结论:

定理 1 设 $T \in \Gamma_{n,\gamma} (n \geq 2\gamma + 1, \gamma \geq 2)$, $T(n, \gamma), S(n, \gamma)$ 如图 1 所示,则

a. $\lambda(T(n, \gamma)) > \lambda(S(n, \gamma))$;

b. 对所有 $T \notin \{T(n, \gamma), S(n, \gamma)\}$ 均有 $\lambda(S(n, \gamma)) > \lambda(T)$ 成立;

c. $\lambda(T(n, \gamma))$ 是方程的最大根

$$x^4 - (n - \gamma + 1)x^2 + n - 2\gamma + 1 = 0$$

d. $\lambda(S(n, \gamma))$ 是方程的最大根

$$x^6 + (-n - 2 + \gamma)x^4 + (3n - 4\gamma - 1)x^2 - 2n + 4\gamma = 0$$

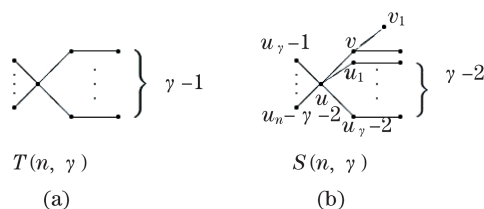


图 1 $T(n, \gamma)$ 和 $S(n, \gamma)$

Fig.1 $T(n, \gamma)$ and $S(n, \gamma)$

1 预备知识

引理 1^[8-9] 设 G 是阶数为 n 的连通二部图 ($n \geq 2$), $v \in V(G)$. $G_{k,l}$ 是通过在 v 点处加两条长度分别为 k, l 的悬挂路所得到的图.若 $k \geq l \geq 1$, 则 $\lambda(G_{k,l}) > \lambda(G_{k+1,l-1})$.

引理 2^[2] 设 u, v 是树 T 的顶点, $v_1, v_2, \dots, v_s (1 \leq s \leq d(v))$ 和 $u_1, u_2, \dots, u_t (1 \leq t \leq d(u))$ 分别属于 $N_T(v) \setminus \{u\}, N_T(u) \setminus \{v\}$. 记

$$T_u = T - vv_1 - vv_2 - \dots - vv_s +$$

$$uv_1 + uv_2 + \dots + uv_s$$

$$T_v = T - uu_1 - uu_2 - \dots - uu_t +$$

$$vu_1 + vu_2 + \dots + vu_t$$

则 $\max\{\lambda(T_u), \lambda(T_v)\} > \lambda(T)$.

引理 3^[10] 设 v 为图 G 的一个悬挂点, u 是 v 的邻点, 则 $\Phi(G) = x\Phi(G-v) - \Phi(G-u-v)$.

引理 4^[8] 设 G 是一连通图, G' 是 G 的连通真子图. 则对任意 $x \geq \lambda(G)$ 有 $\Phi(G', x) > \Phi(G, x)$.

记 $\Delta(G)$ 为 G 的最大度. 由引理 4, 有 $\lambda(G) \geq \lambda(K_{1,\Delta(G)} \cup (n - \Delta(G) - 1)K_1) = \sqrt{\Delta(G)}$.

2 定理 1 的证明

首先, 给出如下两个图的控制数的关系:

引理 5 设 G 是一个连通图, $u \in V(G)$, H 是由 G 通过 u 点加一条悬挂路 $uu_1u_2u_3$ 得到的图, W 是由 G 通过 u 点加一条悬挂边 uu_1 和一条悬挂路 uu_2u_3 得到的图(见图 2). 则

$$\gamma(H) = \gamma(G) + 1$$

$$\gamma(W) \geq \gamma(H)$$

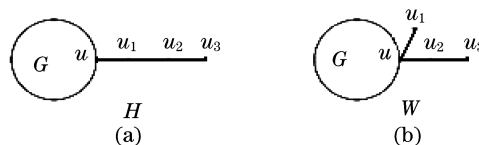


图 2 H 和 W

Fig.2 H and W

证明

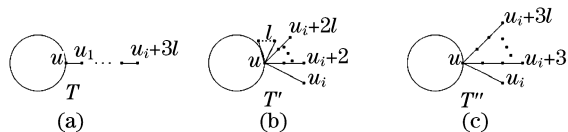
a. 设 $\gamma(G) = \gamma$, $\gamma(H) = \gamma'$, M 是 G 的一个 γ -set. 不难看出, $M \cup \{u_2\}$ 是 H 的一个控制集, 于是 $\gamma' \leq \gamma + 1$. 由于 u_3 是一个悬挂点, H 中一定存在一个包含 u_2 的 γ' -set, 记为 M' , 于是 $M' \setminus \{u_2\}$ 是 G 的一个控制集, 则有 $\gamma' - 1 \geq \gamma$.

综上, $\gamma' = \gamma + 1$.

b. 不难看出, W 中任意 γ 个顶点都不能控制 W , 因此 $\gamma(W) \geq \gamma(G) + 1 = \gamma(H)$.

为了方便起见, 把图 G 中度数不小于 3 的点的个数用 $r(G)$ 来表示. 设 u 是 T 中度数不小于 3 的点, $uu_1 \dots u_{3l+i} (l \geq 0, 0 \leq i \leq 2)$ 是 T 的一条悬挂路. 如果 T' 是将 T 中悬挂路 $uu_1 \dots u_{3l+i}$ 用 l 条 P_3 , l 条悬挂边和一条悬挂路 P_{i+1} 代替得到的新图, 就说 T' 是由 T 经 Operation I 得到的(见图 3).

为了说明 $\gamma(T)$ 和 $\gamma(T')$ 的大小关系, 设 $H = T - u_{i+1} - \cdots - u_{i+3l}$, 不难看出 T 是由 H 通过在 u_i 点加一条长为 $3l$ 的悬挂路 P_{3l+1} 所得的图. 若记 T'' 是由 H 经 u 点加 l 条悬挂路 P_4 所得的图. 根据引理 5, $\gamma(T) = \gamma(T'') = \gamma(H) + l$ 且 $\gamma(T') \geq \gamma(T'')$. 于是有 $\gamma(T') \geq \gamma(T)$.

图3 Operation I (从 T 到 T')Fig.3 Operation I (from T to T')

综上及引理 1, 得到以下结论:

引理 6 如果 T' 是由树 T 经 Operation I 得到的树, 则

$$\begin{aligned}\gamma(T') &\geq \gamma(T) \\ r(T') &= r(T) \\ \lambda(T') &\geq \lambda(T)\end{aligned}$$

定义 1 设 u, v 是树 T 度数不小于 3 的顶点. $uu_i u_{i1} \cdots u_{il_i}$ ($i = 1, \dots, s$, 其中 $s = d(u) - 1$) 和 $vv_j v_{j1} \cdots v_{jl_j}$ ($j = 1, \dots, t$, 其中 $t = d(v) - 1$) 是分别从 u, v 发出的两条悬挂路, 且按以下规则对邻点排序:

- 包含 u_{i+1} 的悬挂路的长度大于等于包含 u_i 的悬挂路的长度, $i = 1, \dots, s - 1$;
- 包含 v_{j+1} 的悬挂路的长度大于等于包含 v_j 的悬挂路的长度, $j = 1, \dots, t - 1$.

定义

$$\begin{aligned}T_u(j) &= T - vv_1 - \cdots - vv_{j-1} - vv_{j+1} - \cdots - \\ &\quad vv_t + uv_1 + \cdots + uv_{j-1} + \\ &\quad uv_{j+1} + \cdots + uv_t \\ T_v(i) &= T - uu_1 - \cdots - uu_{j-1} - uu_{j+1} - \\ &\quad \cdots - uu_s + vu_1 + \cdots + vu_{j-1} + \\ &\quad vu_{j+1} + \cdots + vu_s \\ 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t\end{aligned}$$

引理 7 设 $T \in \Gamma_{n, \gamma}$, $T \in \Gamma_{n, \gamma} v$ 是 T 中度数不小于 3 的顶点, P 是从 u 到 v 的路. 若从 u, v 出发的除 P 外的其它所有路都是长不超过 2 的悬挂路, 则

$$\begin{aligned}\min\{\gamma(T_u(1)), \gamma(T_v(1))\} &\geq \gamma \\ r(T_u(1)) &= r(T_v(1)) = r(T) - 1 \\ \max\{\lambda(T_u(1)), \lambda(T_v(1))\} &> \lambda(T)\end{aligned}$$

证明

a. 先证 $\gamma(T_u(1)) \geq \gamma$. 设 s, t 分别为 T 中从 u 出发的长为 1, 2 的悬挂路的条数, s', t' 分别为从 v 出发的长为 1, 2 的悬挂路的条数. 分别证明:

情形 1 $t = 0$

由于 u 是 T 中度数不小于 3 的顶点, 故有 $s \geq 2$, 此时 u 属于 T 的任一 γ -set. 因此 $\gamma(T_u(1)) \geq \gamma$;

情形 2 $t \neq 0$

若 $s' \geq 2$ 时, u 从 v 处所夺边包含有悬挂边, 所以 $\gamma(T_u(1)) \geq \gamma$. 当 $s' \leq 1$ 时, 则 $t' \geq 1$, u 从 v 处所夺边都是长为 2 的悬挂路, 此时 $\gamma(T_u(1)) = \gamma$. 综上有, $\gamma(T_u(1)) \geq \gamma$. 同理可证, $\gamma(T_v(1)) \geq \gamma$.

b. 从定义 1, 容易得出 $r(T_u(1)) = r(T_v(1)) = r(T) - 1$;

c. 由引理 2, 有 $\max\{\lambda(T_u(1)), \lambda(T_v(1))\} > \lambda(T)$.

引理 8 设 $T \in \Gamma_{n, \gamma}$, 如果 $r(T) \geq 3$, 则一定存在一棵树 T' 满足

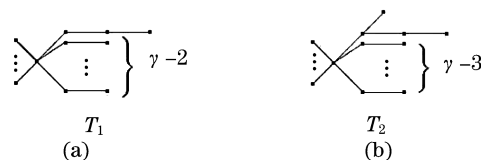
$$\begin{aligned}\gamma(T') &\geq \gamma(T) \\ r(T') &= r(T) - 1 \\ \lambda(T') &> \lambda(T)\end{aligned}$$

证明 设 u, v 是 T 中距离最远的两个度数不小于 3 的点, P 是从 u 到 v 的路. 从 u, v 出发的除 P 外的其它所有路都是悬挂路. 对 u, v 分别进行 Operation I, 并记得到的新树为 F , 由引理 6, $\gamma(F) \geq \gamma(T)$, $r(F) = r(T)$, $\lambda(F) \geq \lambda(T)$. 对 F , 由引理 7, 引理 1 和定义 1, 有

$$\begin{aligned}\min\{\gamma(F_u(1)), \gamma(F_v(1))\} &\geq \gamma(F) = \gamma \\ r(F_u(1)) &= r(F_v(1)) = r(F) - 1 = \gamma(T) - 1 \\ \max\{\lambda(F_u(1)), \lambda(F_v(1))\} &> \lambda(F) \geq \lambda(T)\end{aligned}$$

于是 $F_u(1), F_v(1)$ 中邻接谱半径最大的那个树就是满足条件的树 T' .

引理 9 设 $S(n, \gamma)$ 如图 1 所示, T_2 如图 4 所示. 则 $\lambda(S(n, \gamma)) > \lambda(T_2)$.

图4 树 T_1 和 T_2 Fig.4 T_1 and T_2

证明 由引理 3, 有

$$\begin{aligned}\Phi(S(n, \gamma)) &= x^{n-2\gamma}(x^2 - 1)^{\gamma-3}[x^6 - (n - \gamma + \\ &\quad 2)x^4 + (3n - 4\gamma - 1)x^2 + 4\gamma - 2n] \\ &\triangleq x^{n-2\gamma}(x^2 - 1)^{\gamma-3}p(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi(T_2) &= x^{n-2\gamma}(x^2-1)^{\gamma-4}[x^8-(n-\gamma+3)x^6+ \\ &\quad (4n-5\gamma+1)x^4-(4n-7\gamma+3)x^2+ \\ &\quad n-2\gamma+1] \\ &\triangleq x^{n-2\gamma}(x^2-1)^{\gamma-4}f(x)\end{aligned}$$

容易看出

$$\begin{aligned}f(x) &= (x^2-1)p(x) + (n-\gamma-4)x^2 - \\ &\quad n+2\gamma+1 \\ &\triangleq (x^2-1)p(x) + r(x)\end{aligned}$$

设 a 是方程 $f(x)=0$ 的最大根, 由引理 4, 有 $a \geq \sqrt{\Delta(T_2)} = \sqrt{n-\gamma-1}$. 显然 $r(a) > 0$, 则 $p(a) < 0$, 从而有 $p(x)=0$ 的最大根大于 a , 即有 $\lambda(S(n, \gamma)) > \lambda(T_2)$.

引理 10 设 $T \in \Gamma_{n,\gamma} \setminus \{T(n, \gamma)\}$ 且 $r(T)=1$, 则 $\lambda(T) < \lambda(S(n, \gamma))$.

证明 因为 $r(T)=1, T \neq T(n, \gamma)$, T 至少有一条长度不小于 3 的悬挂路. 根据引理 1, $\lambda(T) \leq \lambda(T_1)$, 又由引理 1, 有 $\lambda(T_1) < \lambda(S(n, \gamma))$, 故有 $\lambda(T) < \lambda(S(n, \gamma))$.

引理 11 设 $T \in \Gamma_{n,\gamma}$ 且 $r(T)=2$, 则 $\lambda(T) \leq \lambda(S(n, \gamma))$, 等号成立的充要条件是 $T = S(n, \gamma)$.

证明 设 u, v 是 T 的两个度数不小于 3 的点. 分别对 u, v 进行 Operation I, 记得到的树为 T' , 则 $r(T')=2, \gamma(T') \geq \gamma(T)$ 且 $\lambda(T') \geq \lambda(T)$.

情形 1 如果 $uv \notin E(T)$

因为 $uv \notin E(T)$, 所以 $uv \notin E(T')$. 由引理 7, 可知 $\max\{\lambda(T'_u(1)), \lambda(T'_v(1))\} > \lambda(T')$ 且 $\min\{\gamma(T'_u(1)), \gamma(T'_v(1))\} \geq \gamma$. 由引理 1, $\max\{\lambda(T'_u(1)), \lambda(T'_v(1))\} \leq \lambda(T_1)$. 于是

$$\lambda(T) \leq \lambda(T') < \max\{\lambda(T'_u(1)), \lambda(T'_v(1))\} \leq \lambda(T_1) < \lambda(S(n, \gamma))$$

情形 2 如果 $uv \in E(T)$

$uv \in E(T)$ 于是有 $uv \in E(T')$. 设 s, t 分别为 T' 中从 u 出发的长为 1, 2 的悬挂路的条数, s', t' 分别为从 v 出发的长为 1, 2 的悬挂路的条数.

a. $t \neq 0$ 且 $t' \neq 0$

(a) $s \neq 0$ 且 $s' \neq 0$

由引理 2, $\lambda(T') \leq \lambda(T_2) < \lambda(S(n, \gamma))$.

(b) s, s' 中恰有一个为 0

由引理 2, $\lambda(T') < \max\{\lambda(T_1), \lambda(T_2)\} < \lambda(S(n, \gamma))$, 故 $\lambda(T) < \lambda(S(n, \gamma))$.

(c) $s = s' = 0$

由引理 2, $\lambda(T') < \lambda(T_1)$, 于是即有 $\lambda(T) < \lambda(S(n, \gamma))$.

b. t, t' 中恰有一个为 0

不失一般性, 假设 $t=0$, 则 $s \geq 2$.

(a) $s' = 0$

由引理 2, $\lambda(T') \leq \max\{\lambda(T_1), \lambda(S(n, \gamma))\} = \lambda(S(n, \gamma))$, 等号成立当且仅当 $T = S(n, \gamma)$.

(b) $s' \neq 0$

由引理 2, $\lambda(T') \leq \max\{\lambda(T_2), \lambda(S(n, \gamma))\} = \lambda(S(n, \gamma))$, 等号成立当且仅当 $T = S(n, \gamma)$.

c. $t = t' = 0$

此时有 $\gamma=2, s \geq 2$ 且 $s' \geq 2$. 由引理 2, $\lambda(T') \leq \lambda(S(n, 2))$, 等号成立当且仅当 $T = S(n, 2)$.

综上所述, 有 $\lambda(T) \leq \lambda(T') \leq \lambda(S(n, \gamma))$, 等号成立当且仅当 $T = S(n, \gamma)$.

定理 1 的证明

a. 在引理 2 中, 取 $T = S(n, \gamma), u = u, v = v, s = 1$ 且 $t = n - \gamma - 3$, 则

$$T_u = S(n, \gamma) - vv_1 + uv_1$$

$$T_v = S(n, \gamma) - uu_1 - \cdots - uu_{n-\gamma-3} +$$

$$vu_1 + \cdots + vu_{n-\gamma-3}$$

则 $\max\{\lambda(T_u), \lambda(T_v)\} = \lambda(T(n, \gamma)) > \lambda(S(n, \gamma))$.

b. 分 4 种情形考虑

(a) $r(T) = 0$

如果 $r(T) = 0$, 则 T 是一条路, $\lambda(T) < \lambda(S(n, \gamma))$ 显然成立.

(b) $r(T) = 1$

由引理 10, $\lambda(T) < \lambda(S(n, \gamma))$.

(c) $r(T) = 2$

由引理 11, $\lambda(T) < \lambda(S(n, \gamma))$.

(d) $r(T) \geq 3$

由引理 8, 存在一个 $\gamma(T')=2$ 的树 $T', \gamma(T') \geq \gamma$, 且 $\lambda(T') > \lambda(T)$. 再由 (b), $\lambda(T') \leq \lambda(S(n, \gamma(T'))) \leq \lambda(S(n, \gamma))$, 于是有 $\lambda(T) < \lambda(T') \leq \lambda(S(n, \gamma))$.

c. 由引理 3, 有

$$\Phi(T(n, \gamma)) = x^{n-2\gamma}(x^2-1)^{\gamma-2}[x^4 - (n - \gamma + 1)x^2 + n - 2\gamma + 1]$$

故 $\lambda(T(n, \gamma))$ 是方程 $x^4 - (n - \gamma + 1)x^2 + n - 2\gamma + 1 = 0$ 的最大根.

d. 由引理 3, 有

$$\Phi(S(n, \gamma)) = x^{n-2\gamma}(x^2-1)^{\gamma-3}[x^6 - (n - \gamma + 2)x^4 + (3n - 4\gamma - 1)x^2 + 4\gamma - 2n]$$

故 $\lambda(S(n, \gamma))$ 是方程 $x^6 + (-n - 2 + \gamma)x^4 + (3n - 4\gamma - 1)x^2 - 2n + 4\gamma = 0$ 的最大根.

(下转第 494 页)