

文章编号:1007-6735(2012)01-0027-05

# 一类具有变人口规模的含时滞 SIS 流行病模型的稳定性分析

袁艳燕, 原三领, 翟院青

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

**摘要:** 建立了一类含染病期时滞、考虑因病死亡且具有双线性传染率的 SIS 流行病模型, 其人口动力学结构是人口常数输入与自然死亡. 确定了疾病传播的基本再生数; 得到了无病平衡点全局渐近稳定以及地方病平衡点局部渐近稳定的条件.

**关键词:** SIS 流行病模型; 平衡点; 基本再生数; 稳定性

**中图分类号:** O 175.1; N 94 **文献标志码:** A

## Stability Analysis on an SIS Epidemiologic Model with Delay and a Variable Population Size

YUAN Yan-yan, YUAN San-ling, ZHAI Yuan-qing

(College of Science, Shanghai University for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

**Abstract:** The delay existing in SIS epidemiologic model corresponds to an infectious period and disease-related deaths, and hence the population size becomes variable. In the model, the population dynamics structure includes the recruitment for natural deaths and the incidence term belongs to the simple mass action incidence. The thresholds and equilibrium were determined, and the stabilities were examined. The local stability of all kinds of equilibria and the global stability of the disease-free equilibrium.

**Key words:** SIS epidemic model; equilibrium; basic reproduction number; stability

在 SIS 流行病模型中, 易感者在与染病者进行有效接触后成为染病者, 染病者康复后再次成为易感者. 如果在疾病传播过程中有很多因病死亡或出生与死亡不能均衡, 则总人口必定为时间的一个函数<sup>[1]</sup>. 目前, 国内外对于含时滞 SIS 流行病模型的研究结果很多. 当人口总量为常数时, 系统的所有解当

时间趋于无穷时均趋于平衡点<sup>[2-3]</sup>. 具有总人口变化的 SIS 模型的研究可参见文献[1, 4-5]; 文献[1]研究了具有指数人口动力、含时滞的 SIS 流行病模型, 时滞的存在会破坏地方病平衡点的稳定性, 使总人口和染病者人数趋于绝灭, 而染病者在总人口中所占的比例会出现周期震荡, 此时对疾病动力学行

**收稿日期:** 2010-10-30

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(10871129); 上海市教委科研创新基金资助项目(09YZ208)

**作者简介:** 袁艳燕(1987-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 生物数学. E-mail: yuanyan20058@siam.com

原三领(联系人), 男, 教授. 研究方向: 生物数学. E-mail: yuansanling@163.com

为的刻画需要两个阈值;对总人口服从 Logistic 增长规律的 SIS 流行病模型的研究也有类似的结论<sup>[4]</sup>. 笔者建立了一类含染病期时滞、考虑因病死亡且具有双线性传染率的 SIS 流行病模型,其人口动力学结构是人口常数输入与自然死亡. 确定了疾病传播的阈值;得到了各类平衡点局部渐近稳定与无病平衡点全局稳定的条件.

## 1 模型

设  $t$  时刻总人口  $N(t)$  分为易感者类  $S(t)$  和染病者类  $I(t)$ , 即

$$N(t) = S(t) + I(t) \quad (1)$$

当人群中没有疾病流行时,设总人口服从下面的人口动力学规律

$$N'(t) = A - dN$$

式中,  $A$  为单位时间内人口的迁入率;  $d$  为单位个体的自然死亡率,  $d > 0$ . 对于任意的正初值  $N(t)$  趋近于  $A/d$ . 疾病传播的窗式结构图如图 1 所示.

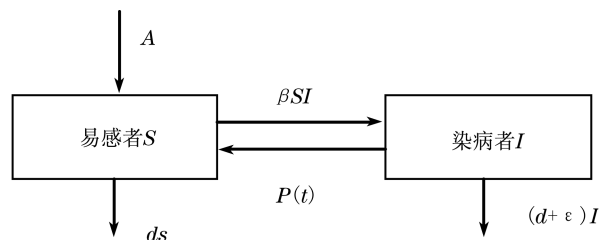


图 1 疾病传播的窗式结构图

Fig.1 Window-type figure of disease spreading

图中,  $P(t)$  为一非负、非增的分段连续函数, 表示易感者在成为染病者  $t$  单位时间后仍为染病者的比例, 满足  $P(0^+) = 1$ ,  $\int_0^\infty P(u) du = \omega$ , 其中  $\omega$  表示不考虑人口的死亡时染病者的平均染病期(如果染病者患病后将不再恢复, 则  $\omega \rightarrow \infty$ , 此时所考虑模型成为 SI 模型). 本文中假设  $\omega$  为一有限的正数. 由上面的图 1 可知, 染病者  $I(t)$  ( $t \geq 0$ ) 满足积分方程

$$I(t) = I_0(t) + \int_0^t \beta [N(u) - I(u)] I(u) P(t-u) e^{-(d+\epsilon)(t-u)} du \quad (2)$$

其中,  $S = N - I$ , 式(2)中的积分项表示在  $u$  时刻得病, 但在  $[u, t]$  时间段没有死亡(自然死亡或因疾死亡), 且在  $t$  时刻仍为染病者的总和;  $I_0(t)$  表示 0 时刻的染病者在  $t$  时刻仍为染病性的人数, 且函数  $I_0(t)$  非负连续, 满足<sup>[6]</sup>

$$I_0(t) \leq I_0(0) e^{-(d+\epsilon)t} \max_{u \geq 0} [P(t+u)/P(u)]$$

由图 1 可知, 当人群中存在疾病流行时, 总人口  $N$  服从微分方程

$$N'(t) = A - dN - \epsilon I \quad (3)$$

其中,  $\epsilon (\geq 0)$  为因病死亡率. 设初值  $N(0) > 0$  ( $N(0) \geq I_0(0)$ ), 则式(3)可写成积分方程形式

$$N(t) = N(0) e^{-dt} + \int_0^t [A - \epsilon I(u)] e^{-d(t-u)} du \quad (4)$$

式(2)和式(3)组成一个混杂动力系统, 而式(2)和式(4)为构成一个与之等价的积分方程系统. 定义

$$\Omega = \left\{ (I, N) \mid 0 \leq I \leq N, 0 < N \right\} \quad (5)$$

显然, 式(2)和式(4)的解在  $\Omega$  内局部存在唯一且满足解的延拓性<sup>[7]</sup>, 即在其解的最大存在区间上存在唯一满足初值  $N(0) > 0$  的解  $(I(t), N(t))$ . 如果解有界, 那么其最大区间为  $[0, \infty)$ . 下面的定理说明从  $\Omega$  内出发的任意解都是有界的<sup>[8-9]</sup>.

**定理 1** 对于式(2)和式(4)从  $\Omega$  内出发的解, 如下结论成立:

- 若  $I_0(0) = 0$ , 则对任意的  $t \geq 0$ ,  $I(t) \equiv 0$  且当  $t \rightarrow \infty$  时,  $N(t) \rightarrow A/d$ ;
- 若  $N(0) > I_0(0) > 0$ , 则解有界且对所有有限的  $t \geq 0$ , 有  $N(t) > I(t) > 0$ ;
- 若  $N(0) = I_0(0) > 0$ , 则解有界且对所有有限的  $t \geq 0$ , 有  $N(t) > I(t) > 0$ .

**证明**

a. 由解的唯一性和式(3)即得.

b. 注意到  $I_0(t)$  是满足  $N(0) > I_0(0) > 0$  的一个非负函数, 令

$$T = \inf \{ t > 0 \mid S(t)I(t) = 0 \}$$

如果  $T$  是有限的, 因为当  $t \in [0, T)$  时,  $S(t)I(t) > 0$ , 所以式(2)右端各项非负且积分项为正, 故当  $t \in [0, T)$  时,  $I(t) > 0$ . 由式(3)可知, 在区间  $[0, T]$  上, 有

$$N'(t) < A - dN$$

于是如果  $N(t) \geq A/d$ , 则  $N(t)$  递减, 故对于所有的  $t \in [0, T]$ , 有

$$N(t) \leq \max \{ A/d, N(0) \}$$

由于  $S(0) = N(0) - I(0) > 0$  且当  $t \in [0, T)$  时,  $S(t) = N(t) - I(t) > 0$ , 再由假设知

$$S'(t) \geq -dS - \beta SI \geq -dS - \beta \max \{ A/d, N(0) \} S, \quad t \in [0, T]$$

故有

$$N(T) - I(T) = S(T) \geq S(0) e^{-(d+\beta \max \{ A/d, N(0) \}) T} > 0$$

但  $S(T)I(T) > 0$  与  $T$  为有限的定义矛盾, 所以  $T$

为无限的,因此对任意  $t \geq 0$ ,有

$$N(t) - I(t) = S(t) > 0, \quad I(t) > 0$$

c. 假设结论不成立,于是存在某个  $T > 0$ ,使得当  $t \in [0, T)$  时,  $I(t) \geq N(t)$ . 此时方程式(2)右边的积分项非正. 又因  $\max_{u \geq 0} [P(t+u)/P(t)] \leq 1$  且  $I_0(0) = N(0)$ , 故有

$$I(t) \leq I_0(t) \leq I_0(0)e^{-(d+\epsilon)t} = N(0)e^{-(d+\epsilon)t}$$

因此,由式(3)可知,在  $t \in [0, T)$  上,有

$$N'(t) \geq A - dN - \epsilon N(0)e^{-(d+\epsilon)t}$$

对其不等式积分,可得

$$N(t) \geq A(1 - e^{-dt})/d + N(0)e^{-(d+\epsilon)t} >$$

$$N(0)e^{-(d+\epsilon)t} = I_0(0)e^{-(d+\epsilon)t} \geq I_0(t) \geq I(t)$$

与上述假设矛盾,所以当  $t \in [0, T)$  时,有  $N(t) > I(t)$ . 再由 b 即可得到 c 的结论.

注:当每个个体的感染周期为一常数  $\omega (> 0)$ , 则  $P(t)$  为一段函数

$$P(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \omega] \\ 0, & t \in [\omega, \infty) \end{cases} \quad (6)$$

此时染病者经过  $\omega$  时间段必定恢复,所以当  $t \geq \omega$  时,  $I_0(t) = 0$ . 故当  $t \geq \omega$  时式(2)变为

$$I(t) = \int_{t-\omega}^t \beta [N(u) - I(u)] I(u) e^{-(d+\epsilon)(t-u)} du$$

且等价于时滞微分方程

$$\begin{aligned} I'(t) &= \beta [N(t) - I(t)] I(t) - \\ &\beta [N(t-\omega) - I(t-\omega)] I(t-\omega) e^{-(d+\epsilon)\omega} - \\ &(d+\epsilon) I(t) \end{aligned} \quad (7)$$

## 2 阈值和平衡点

积分方程(2)中的生存概率是  $Q(t) = P(t) \exp(-(d+\epsilon)t)$ , 故染病者的平均病程<sup>[10]</sup>为

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \int_0^{\infty} t(-Q'(t)) dt = \int_0^{\infty} Q(t) dt = \\ &\int_0^{\infty} P(t) e^{-(d+\epsilon)t} dt \end{aligned} \quad (8)$$

疾病的基本再生数<sup>[11-12]</sup>就是在几乎全为易感者的人群中,一个染病者在其整个病程中所传染的病人的个数,它等于传染系数  $\beta$ , 没有疾病流行时的人口规模及染病者个体的平均病程的乘积,即  $R_0 = \beta(A/d)\bar{t}$ . 对于由式(6)定义的分段函数,由式(8)可得

$$\begin{aligned} R_0 &= \beta \left( \frac{A}{d} \right) \int_0^{\infty} P(t) e^{-(d+\epsilon)t} dt = \\ &\beta \left( \frac{A}{d} \right) \frac{1 - e^{-(d+\epsilon)\omega}}{d + \epsilon} \end{aligned} \quad (9)$$

$\Omega$  内的平衡点由下面的定理给出(注意到在地方平

衡点处基本再生数(或感染者的置换数)

$$R_0 S_e / N_e = 1$$

**定理 2** 式(2)和式(3)确定的系统总存在无病平衡点  $(I, N) = (0, A/d)$ . 如果  $R_0 \leq 1$ , 则系统没有其它平衡点; 如果  $R_0 > 1$ , 则系统还存在一个地方病平衡点

$$\begin{aligned} (I_e, N_e) &= \\ &\left( \frac{A(R_0 - 1)}{(d + \epsilon)R_0}, \frac{1}{d + \epsilon} \left[ 1 + \frac{\epsilon}{dR_0} \right] A \right) \end{aligned} \quad (10)$$

注:在本文中,考虑了染病者的因病死亡. 由于疾病的流行,使平衡点处的人口规模从  $A/d$  (无疾病流行时)减少到  $N_e = \frac{d + \epsilon/R_0}{d + \epsilon} \cdot \frac{A}{d}$ .

## 3 无病平衡点的全局稳定性

**定理 3** 假设在由式(2)和式(3)给出的系统中,  $P(t)$  有紧支集  $[0, a]$ . 如果  $R_0 < 1$ , 则无病平衡点  $(0, A/d)$  在  $\Omega$  中全局渐近稳定; 如果  $R_0 > 1$ , 则无病平衡点  $(0, A/d)$  不稳定.

**证明** 对由式(2)和式(3)所给出的系统中,区域  $\Omega$  是正向不变集. 又因  $N > A/d$  时,  $N'(t) < 0$ , 所以从  $\Omega$  中出发的所有解将趋于、进入或保持在其有界的子集  $T$  中, 其中  $T = \{(I, N) \mid 0 \leq I \leq N, 0 < N \leq A/d\}$ . 所以只需在  $T$  中进行考虑.

注意到  $I_0(t)$  有紧集  $[0, a]$ . 由于  $S(u) = N(u) - I(u) \leq A/d, I(u) \leq A/d$ , 由式(2)可得当  $t > a$  时, 有  $I(t) \leq \frac{A}{d} R_0$ ; 再在式(2)中使用此不等

式,可得当  $t > 2a$  时, 有  $I(t) \leq \frac{A}{d} R_0^2$ . 利用归纳法可

知当  $t > na$ , 有  $I(t) \leq \frac{A}{d} R_0^n$ . 由此可得: 如果

$R_0 < 1$ , 则当  $t \rightarrow \infty$  时,  $I(t) \rightarrow 0$ . 又因当  $t \rightarrow \infty$  时, 式(3)渐近等价于  $N' = A - dN$ , 故当  $t \rightarrow \infty$  时,  $N(t) \rightarrow A/d$ .

系统局部稳定性可通过其在平衡点的线性化方程的特征值来确定<sup>[7]</sup>. 令  $N = A/d + V$ , 式(2) (此时  $I_0(t) = 0$ ) 和式(3)在无病平衡点处的线性化系统为

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^t \beta(A/d) I(u) P(t-u) e^{-(d+\epsilon)(t-u)} du \\ V' &= -dV - \epsilon I \end{aligned}$$

令  $I = c_1 e^{zt}$  和  $V = c_2 e^{zt}$ , 得到一个特征根  $z = -d$  和特征方程

$$1 = \beta(A/d) \int_0^{\infty} P(v) e^{-(z+d+\varepsilon)v} dv \quad (11)$$

对  $R_0 > 1$ , 可以证明式(11)存在实特征根为  $z = x > 0$ . 事实上, 此时式(11)的右边是个关于  $x$  的单减函数, 当  $x \rightarrow 0$  时, 右边从  $x = 0$  时的值  $R_0 > 1$  单调递减趋于 0. 因此当  $R_0 > 1$  时, 式(11)存在一个正的特征根  $x$ , 故无病平衡点不稳定.

#### 4 地方平衡点的局部稳定性

**定理 4** 设  $P(t)$  为由式(6)所定义的  $[0, \omega]$  上的分段函数. 如果  $R_0 \geq 2 + \varepsilon/d$  或  $1 < R_0 \leq 3$ , 则地方平衡点  $(I_e, N_e)$  是局部渐近稳定的.

**证明** 令  $I = I_e + U, N = N_e + V$ , 则式(3)和式(7)组成的系统线性化为

$$U(t) = \beta \int_{t-\omega}^t \left( \frac{(-R_0 d + \varepsilon + 2d)A}{d(d + \varepsilon)R_0} U + \frac{A(R_0 - 1)}{(d + \varepsilon)R_0} V \right) e^{-(d+\varepsilon)(t-u)} du \cdot V' = -dV - \varepsilon U \quad (12)$$

在式(12)中, 令  $U = c_1 e^{zt}, V = c_2 e^{zt}$ , 可得

$$\begin{aligned} c_1 \varepsilon + c_2(z + d) &= 0 \\ c_1 \left[ 1 - \beta \frac{(-R_0 d + \varepsilon + 2d)A}{d(d + \varepsilon)R_0} \cdot \frac{1 - e^{-(z+d+\varepsilon)\omega}}{z + d + \varepsilon} \right] - \\ c_2 \beta \frac{(R_0 - 1)A}{(d + \varepsilon)R_0} \frac{1 - e^{-(z+d+\varepsilon)\omega}}{z + d + \varepsilon} &= 0 \end{aligned}$$

其方程组有非零解的充要条件为其系数行列式等于零, 由此可得特征方程

$$\begin{aligned} z + d + \left[ (z + d) \left( \left(1 - \frac{2}{R_0}\right)d - \frac{\varepsilon}{R_0} \right) + \varepsilon d \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) \right] \cdot \\ \frac{1}{(d + \varepsilon)} \beta(A/d) \frac{1 - e^{-(z+d+\varepsilon)\omega}}{z + d + \varepsilon} = 0 \quad (13) \end{aligned}$$

下面证明当  $R_0 \geq 2 + \varepsilon/d$  时, 特征方程没有纯虚根, 或当  $1 < R_0 \leq 3$  时, 特征方程没有具有非负实部的根. 式(13)具有文献[1, 13]中定理 A. 1 所考虑的特征方程形式, 其所有具有非负实部的根包含在一个有界的区域内. 因为特征根不可能穿过虚根曲面或经由无穷远处进入  $Re(z) \geq 0$  的区域. 由根对参数的连续依赖性可知当  $1 < R_0 \leq 3$ , 所有特征值均具有负实部. 所以, 在上述给定的参数区域中, 地方平衡点是局部稳定的<sup>[14]</sup>.

注意到当  $R_0 > 1$  时,  $z = 0$  不是式(13)的特征根. 假设式(13)有纯虚根  $z = iy (y > 0)$ , 此时特征根的虚部为

$$\begin{aligned} 0 = y(2d + \varepsilon) + \beta A \left(1 - \frac{2}{R_0}\right) e^{-(d+\varepsilon)\omega} \sin \omega y + \\ \beta \left(\frac{A}{d}\right) \frac{1}{d + \varepsilon} y \left[ \left(1 - \frac{2}{R_0}\right)d - \frac{\varepsilon}{R_0} \right] \cdot \\ (1 - e^{-(d+\varepsilon)\omega} \cos \omega y) \quad (14) \end{aligned}$$

首先考虑  $R_0 \geq 2 + \varepsilon/d$  的参数区域.

由式(9)式知  $R_0 = \beta(A/d) \frac{1 - e^{-(d+\varepsilon)\omega}}{d + \varepsilon}$ , 并在

式(14)中令  $D = d\omega, E = \varepsilon\omega, Y = y\omega$ , 得

$$\begin{aligned} 0 = (2D + E)(1 - e^{-(D+E)})Y + [(R_0 - 2)D - E] \cdot \\ Y(1 - e^{-(D+E)} \cos Y) + D(D+E) \cdot (R_0 - 2)e^{-(D+E)} \sin Y \end{aligned}$$

两边同除以  $Y$ , 整理得

$$0 = (2D + E)e^{-(D+E)}(e^{(D+E)} - 1) + E(D + E) \cdot e^{-(D+E)} \sin Y/Y + [(R_0 - 2)D - E] e^{-(D+E)} \cdot$$

$$[e^{(D+E)} - \cos Y + (D + E) \sin Y/Y]$$

注意到  $R_0 \geq 2 + \varepsilon/d, -\cos Y \geq -1, \sin Y/Y \geq -1, e^{D+E} \geq 1 + (D + E)$ , 则由上式, 可知

$$\begin{aligned} 0 \geq (2D + E)(D + E) - E(D + E) + \\ [(R_0 - 2)D - E][1 + (D + E) - 1 - \\ (D + E)] = 2D(D + E) > 0 \end{aligned}$$

矛盾, 故式(14)不成立. 所以当  $R_0 \geq 2 + \varepsilon/d$  时, 特征方程没有纯虚根.

对  $1 < R_0 < 3 + \frac{2\varepsilon}{d}$  的情形, 式(13)可改写为

$$z + d = \left[ (z + d) \left( \left( \frac{2}{R_0} - 1 \right) d + \frac{\varepsilon}{R_0} \right) - \right.$$

$$\left. \varepsilon d \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) \right] \frac{1}{(d + \varepsilon)} \beta(A/d) \int_{-\omega}^0 e^{(z+d+\varepsilon)u} du$$

令  $z = x + iy (x \geq 0)$ , 对上式两边取绝对值, 得

$$|x + d + iy| \leq \left| (x + d + iy) \cdot \right.$$

$$\left. \frac{-R_0 d + \varepsilon + 2d}{R_0} - \varepsilon d \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) \right| \cdot$$

$$\frac{1}{(d + \varepsilon)} \beta \left(\frac{A}{d}\right) \int_{-\omega}^0 e^{(d+\varepsilon)u} du$$

注意到  $R_0 = \beta(A/d) \int_{-\omega}^0 e^{(d+\varepsilon)u} du$ , 由上式可得

$$(x + d)^2 + y^2 \leq \frac{1}{(d + \varepsilon)^2} \left\{ [(x + d)(\varepsilon + 2d - R_0 d) + \varepsilon d(1 - R_0)]^2 + (\varepsilon + 2d - R_0 d)^2 y^2 \right\}$$

当  $1 < R_0 < 3 + 2\varepsilon/d$  时, 上式的左边比右边大, 并且

$$\frac{(x + d)(\varepsilon + 2d - R_0 d) + \varepsilon d(1 - R_0)}{d + \varepsilon} \leq x + d$$

整理得

$$-(x+d)(d+\epsilon) \leq (x+d)(\epsilon+2d-R_0d) + \epsilon d(1-R_0) \leq (x+d)(d+\epsilon) \quad (15)$$

式(5)中,右边的不等式恒成立;左边的不等式当  $R_0 \leq 3$  时对所有的  $x \geq 0$  恒成立. 上述矛盾说明当  $1 < R_0 \leq 3$  时,式(2)和(3)组成系统不存在具有非负实部的特征根.

**推论 1** 如果  $\epsilon/d \leq 1$ ,则对所有  $R_0 > 1$ ,地方平衡点  $(I_e, N_e)$  局部渐近稳定.

## 5 讨论

在用微分方程所描述的确定性流行病模型中,疾病的发生率(单位时间内新增的病例数)可能具有多种形式. 本文考虑的是具有双线性的传染率形式  $\beta SI$ , 其中  $\beta$  为传播系数. 尽管这里的  $\beta$  在流行病学中没有直接的解释,但与标准的传染率形式  $\lambda SI/N$  (疾病发病率的另一种形式,  $\lambda$  表示单位时间内一个染病者有效接触的平均数)相比,  $\beta = \lambda/N$ , 即  $\lambda = \beta N$ , 这意味着接触率  $\lambda$  与人口总数  $N$  成正比. 这与实际应该是比较相符的: 假如  $S, I, N$  分别是单位土地面积的人口密度, 则如果人口密度增长一倍, 接触率  $\lambda$  也会相应增加一倍. 以往的研究结果表明: 对于具有双线性传染率的流行病模型, 如果人口规模超过一定的阈值, 疾病将持续流行; Mena-Lorca 和 Hethcote<sup>[5]</sup> 在对鼠群中一些像巴氏杆菌等病毒传播的研究表明, 这种双线性的传染率形式相比标准型的传染率和实验室中得到的实际数据更为一致. 本文通过对含染病期时滞的 SIS 流行病系统的研究, 确定了疾病传播的基本再生数, 得到了无病平衡点全局渐近稳定以及地方病平衡点局部渐近稳定的条件. 对该系统, 还可以进一步考虑疾病持续流行以及地方病平衡点的全局渐近行为. 有关结果将在另一篇文章中给出.

**参考文献:**

- [1] Hethcote H W, Yorke J A. Gonorrhea transmission dynamics and control [M]. New York: Springer-Verlag, 1984.
- [2] Anderson R M, Medly G P, May R M, et al. A pre-

liminary study of the transmission dynamics of the human immunodeficiency virus, the causative agent of AIDS[J]. IMA Journal of Mathematics Applied in Medicine and Biology, 1986, 3(4): 229 - 263.

- [3] Gao L Q, Hethcote H W. Disease transmission models with density-dependent demographics [J]. J Math Biol, 1992, 30(7): 717 - 731.
- [4] Busenberg S, Cooke K L, Pozio A. Analysis of a model of a vertically transmitted disease[J]. J Math Biol, 1983, 17(3): 305 - 329.
- [5] 原三领, 马知恩, 韩茂安. 一类含时滞的 SIS 流行病模型的全局稳定性[J]. 数学物理学报, 2005, 25(3): 349 - 356.
- [6] Castillo-Chavez C, Cooke K, Huang W, et al. On the role of long incubation periods in the dynamics of acquire immunodeficiency syndrome (AIDS). Part 1: single population models [J]. J Math Biol, 1989, 27(4): 373 - 398.
- [7] Beiley N T. The mathematical theory of infectious diseases [M]. 2nd Edition. New York: Hafner Press Co, 1975.
- [8] Brauer F. Models for the spread of universally fatal diseases [J]. J Math Biol, 1990, 28(4): 451 - 462.
- [9] Yuan S, Ma Z. Global stability and hopf bifurcation of an SIS epidemic model with time delays [J]. System Science and Complexity, 2001, 14(3): 327 - 336.
- [10] Yuan S, Ma Z. Study on an SIS epidemic model with time variant delay [J]. Journal of Systems Science and Complexity. 2002, 15(3): 299 - 306.
- [11] Busenberg S, Cooke K L. Analysis of a model of a vertically transmitted disease [J]. J Math Biol, 1983, 17(3): 305 - 329.
- [12] Cooke K L, Yorke J A. Some equations modelling growth processes and gonorrhea epidemics [J]. J Math Biol, 1973, 16(1/2): 75 - 101.
- [13] Hethcote H W, Van Ark J W. Epidemiological models for heterogeneous populations: proportionate mixing, parameter estimation and immunization programs [J]. J Math Biol, 1987, 84(1): 85 - 118.
- [14] Anderson R M, May R M. Infectious diseases of humans: dynamics and control [M]. New York: Oxford University Press, 1992.