文章编号：1007－6735(2011)05－0048－03

C-ρ_R rpp 半群的结构特征

高振林，　吴小宝
（上海理工大学 理学院，上海　200093）

摘要： 引进 ρ_R rpp 和 C-ρ_R rpp 半群，指出它们是 $wrpp$ 和 C-$wrpp$ 半群的推广．从而将 C-rpp 半群和 C-$wrpp$ 半群的若干结果推广到 C-ρ_R rpp 半群上．

关键词： $wrpp$ 半群；C-$wrpp$ 半群；C-ρ_R rpp 半群中
中图分类号： O 152.7　　**文献标志码：** A

Structure Characterizations of C-ρ_R rpp Semigroups

GAO Zhen-ling，　WU Xiao-bao
（*College of Science，University of Shanghai for Science and Technology，Shanghai 200093，China*）

Abstract：A class of semigroups called C-ρ_R rpp semigroups was defined and it is shown that they are a generalization of C-rpp and C-$wrpp$ semigroups. A characterization of them was provided.

Key words：*wrpp semigroups*；*C-wrpp semigroups*；C-ρ_R *rpp semigroups*

文献[1]和文献[2]给出了 rpp 半群和右富足半群的定义：设 S 为半群，若对 $\forall a \in S$，aS^1 作为 S^1－系是投射右 S^1－系，则称 S 是 rpp 半群．若对 $\forall a \in S$，$\mathscr{L}^*$－类 $L_a{}^*$ 至少有一个幂等元，这里 $\mathscr{L}^*$ 为格林 * 关系，则称 S 为右富足半群．文献[1]指出半群 S 是 rpp 的当且仅当 S 是右富足半群．

许多作者通过推广格林 * 关系的方法来研究更广义的半群类．文献[3]用一种格林 * * 关系引进 C-$wrpp$ 半群类．本文的目的在于将文献[1]和文献[4]的理论推广到一类更广义的半群上，把这类半群称为 C-ρ_R rpp 半群．首先在半群 S 上通过偏序关系 ρ_R^S 定义格林 ρ_R^*－ 关系并研究其性质，接着引进了 ρ_R rpp 半群和 C-ρ_R rpp 半群，并给出 C-ρ_R rpp 的结构特征．最后指出，存在 C-ρ_R rpp 半群 S，而 S 不是 C-$wrpp$ 半群．

1　$\mathscr{L}^*$ (ρ_R^S) 关系

首先，回顾一下关于半群 S 上的 $\mathscr{L}^*$ 关系和 $\mathscr{L}^{**}$ 关系的基本知识[4]．

$a, b \in S$，$a \mathscr{L}^* b$ 当且仅当 $\forall x, y \in S^1$，

$$ax = ay \Leftrightarrow bx = by$$

众所周知，在任意半群 S 中[3]，$\mathscr{L}^*$ 关系是 S 的右同余且 $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{L}^*$．设 $\mathscr{R}$ 是 S 上的格林关系：对 $a, b \in S$，$a\mathscr{R}b \Leftrightarrow aS^1 = bS^1$．半群 S 上的 $\mathscr{L}^{**}$ 关系定义[3]为 $\forall a, b \in S$，$a \mathscr{L}^{**} b \Leftrightarrow \forall x, y \in S^1$，$(ax, ay) \in \mathscr{R} \Leftrightarrow (bx, by) \in \mathscr{R}$，同样 $\mathscr{L}^{**}$ 是右同余[4]且 $\mathscr{L}^* \subseteq \mathscr{L}^{**}$．

引进格林 ρ_R^*－ 关系，设 ρ_R^S 是 S 上的偏序关系，即

$$\rho_R^S = \{(a, b) \in S \times S \mid aS^1 \subseteq bS^1\} \quad (1)$$

收稿日期： 2010－06－30
作者简介： 高振林(1949－)，男，教授，研究方向：(序)半群理论．E-mail：zlgao@sina.com.

定义 1　在半群 S 中称关系 $\mathscr{L}^*(\rho_R^S)$ 为格林 ρ_R^* - 关系:对 $a,b\in S$,$a\mathscr{L}^*(\rho_R^S)b$ 当且仅当 $x,y\in S^1$

$$(ax,ay)\in\rho_R^S\Leftrightarrow(bx,by)\in\rho_R^S \qquad (2)$$

性质 1　对任意半群 S,以下结论成立:

a. $\mathscr{L}^*(\rho_R^S)$ 是 S 的右同余且 $\mathscr{R}\subseteq\rho_R^S$;**b.** $\mathscr{L}^{**}\subseteq\mathscr{L}^*(\rho_R^S)$;**c.** $(e\in E(S),a\in S)e\mathscr{L}^*(\rho_R^S)a\Rightarrow ae\mathscr{R}a$.

证明

a. 显然,$\mathscr{R}\subseteq\rho_R^S$.再证 $\mathscr{L}^*(\rho_R^S)$ 是 S 的一个右同余.易知 $\mathscr{L}^*(\rho_R^S)$ 是等价关系.设 $a,b\in S$,$x,y\in S^1$,$t\in S$,若 $(a,b)\in\mathscr{L}^*(\rho_R^S)$,因 $tx,ty\in S^1$,于是

$$(a(tx),a(ty))\in\rho_R^S\Leftrightarrow(b(tx),b(ty))\in\rho_R^S.$$

由定义 1 知,$(at,bt)\in\mathscr{L}^*(\rho_R^S)$.

b. 对 $a,b\in S$,设 $(a,b)\in\mathscr{L}^{**}$,假设 $(ax,ay)\in\rho_R^S$,则存在 $u\in S^1$ 使得 $ax=ayu$ 且 $(ax,a(yu))\in\mathscr{R}$,由 $(a,b)\in\mathscr{L}^{**}$ 和 $(ax,a(yu))\in\mathscr{R}$,得 $bxS^1=byuS^1\subseteq byS^1$,即 $(bx,by)\in\rho_R^S$,反之若 $(bx,by)\in\rho_R^S$,同样可证 $(ax,ay)\in\rho_R^S$,故 $(a,b)\in\mathscr{L}^*(\rho_R^S)$.

c. 对 $e\in E(S)$,$a\in S$,若 $e\mathscr{L}^*(\rho_R^S)a$,则由 $eS^1\subseteq e^2S^1$ 和定义,得 $aS^1\subseteq aeS^1\subseteq aS^1$ 从而 $aS^1=aeS^1$,即 $(ae,a)\in\mathscr{R}$.

记 S 中元素 a 所在的 $\mathscr{L}^*(\rho_R^S)$ - 类为 $L_a^*(\rho_R^S)$.

定义 2　半群 S 的左理想 L 称为 S 的左 ρ_R^* - 理想,如果对所有的 $a\in L$,$L_a^*(\rho_R^S)\subseteq L$.

由 $a\in S$ 生成 S 的最小左 ρ_R^* - 理想,记为 $L^{\rho_R^S}(a)$.由 $a\in S$ 生成的最小主 ρ_R^* - 理想记为 $J^{\rho_R^S}(a)$.与文献[4]中引理 1.7 类似,可得以下引理.

引理 1　令 $a,b\in S$,则以下结论成立:

a. $b\in\mathscr{L}^*(\rho_R^S)\Leftrightarrow\exists a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n\in S$ 且 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n\in S^1$,其中 $a=a_0$,$b=a_n$ 使得 $a_i\ \mathscr{L}^*(\rho_R^S)x_i a_{i-1}(i=1,2,3,\cdots,n)$;

b. $b\in J^{\rho_R^S}(a)\Leftrightarrow\exists a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n\in S$ 且 $x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_n\in S^1$ 其中 $a=a_0$,$b=a_n$,使得 $a_i\ \mathscr{L}^*(\rho_R^S)x_i a_{i-1}\ y_i(i=1,2,3,\cdots,n)$.

下面给出格林 ρ_R^* - 关系 $\mathscr{L}^*(\rho_R^S)$ 的等价定义.

命题 1　S 是一个半群,则

$$\mathscr{L}^*(\rho_R^S)=\{(a,b)\in S\times S\,|\,L^{\rho_R^S}(a)=L^{\rho_R^S}(b)\}$$

$$(a\in S)L^{\rho_R^S}(a)=\bigcup\{L(x)\,|\,\forall x\in L^{\rho_R^S}(a)\}$$

证明

a. 显然,由 $a\mathscr{L}^*(\rho_R^S)b$ 易得 $L^{\rho_R^S}(a)=L^{\rho_R^S}(b)$.反之,假设 $L^{\rho_R^S}(a)=L^{\rho_R^S}(b)$,则 $b\in L^{\rho_R^S}(a)$,由引理 1,$\exists a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n\in S\cdot x_1,x_2,\cdots,x_n\in S^1$ 使得 $a_i\ \mathscr{L}^*(\rho_R^S)x_i a_{i-1}$,$(i=1,2,3,\cdots,n)$,因此,由 ρ_R^S 的传递性得,对 $x,y\in S^1$,有

$$(ax,ay)\in\rho_R^S\Leftrightarrow(x_i a_{i-1}\ x,x_i a_{i-1}\ y)\in\rho_R^S(i=1,2,3,\cdots,n)$$

于是对 $x,y\in S^1$,若 $(ax,ay)\in\rho_R^S$,由 $a=a_0$ 有 $(x_1\ a_0\ x,x_1\ a_0\ y)\in\rho_R^S$.根据 ρ_R^S 的传递性,可得 $(a_i x,a_i y)\in\rho_R^S$,$(i=1,2,3,\cdots,n)$.特别地,$(a_n x,a_n y)\in\rho_R^S$,即 $(bx,by)\in\rho_R^S$.同理,可知当 $a\in L^{\rho_R^S}(b)$,若 $(bx,by)\in\rho_R^S$ 时,同样可证 $(ax,ay)\in\rho_R^S$.综合得 $a\mathscr{L}^*(\rho_R^S)b$ 成立.

b. 令 $T\triangleq\bigcup\{L(x)\,|\,\forall x\in L^{\rho_R^S}(a)\}$,则 T 是 S 的含 a 的左 ρ_R^* - 理想.假设 $y\in T$,则存在 $x\in L^{\rho_R^S}(a)$ 有 $y\in L(x)$,故由 $L\subseteq\mathscr{L}^*(\rho_R^S)$ 得 $y\in L(x)\subseteq L^{\rho_R^S}(a)$.且 $L_y{}^*(\rho_R^S)\subseteq L^{\rho_R^S}(a)$,故得 $T\subseteq L^{\rho_R^S}(a)$.由 $L^{\rho_R^S}(a)$ 是由 a 生成的最小左 ρ_R^* - 理想,从而 $T=L^{\rho_R^S}(a)$.

2　ρ_R rpp 半群和 C-ρ_R rpp 半群

首先,定义 ρ_R rpp 半群和 C-ρ_R rpp 半群.

定义 3　半群 S 称为是 ρ_R rpp 半群,如果每一个 $\mathscr{L}^*(\rho_R^S)$ - 类至少包含一个幂等元且 $\forall e\in E(L_a{}^*(\rho_R^S))$,有 $a=ae$.若 ρ_R rpp 半群 S 中所有的幂等元都是中心的,则半群 S 称为 C-ρ_R rpp 半群.

定义 4　ρ_R rpp 半群 S 称为是充足的,若对所有的 $a\in S$,$L_a{}^*(\rho_R^S)$ 含有唯一幂等元,记为 a^+,使得 $a=a^+a$.

定义 5　半群 S 称为 ρ_R - 左可消半群,对 $a,b,c\in S$,有 $(ca,cb)\in\rho_R^S$,可推得 $(a,b)\in\rho_R^S$.

命题 2　设半群 S 的所有幂等元都是中心的,则

a. $(e\in E(S),a\in S)a\mathscr{L}^*(\rho_R^S)e\Leftrightarrow ea=a$ 且对 $x,y\in S^1$,由 $(ax,ay)\in\rho_R^S$,得 $(ex,ey)\in\rho_R^S$;

b. $(e\in E(S))L_e^*(\rho_R^S)$ 是 S 的有幺元 e 的 ρ_R - 左可消幺半群,且对 $\forall a\in L_e^*(\rho_R^S)$,有 $ea=a$.

通过式(1),定义 1 及性质 1,类似于文献[4]中,引理 3.2 的证明,不难证明命题 2,故在此省略.

命题 3　任何一个 $\mathscr{R}$ - 左可消半群是 ρ_R - 左可消的,反之不成立;每一个 ρ_R - 左可消幺半群包含唯一的幂等元.

证明

a. 对 $a,b,c\in S$,令 $(ca,cb)\in\rho_R^S$,则 $caS^1\subseteq cbS^1$,$\exists u\in S^1$ 使得 $ca=cbu$,从而$(ca,cbu)\in\mathscr{R}$.由 S 是$\mathscr{R}$-左可消的,得$(a,bu)\in\mathscr{R}$,从而有 $aS^1=buS^1\subseteq bS^1$,即$(a,b)\in\rho_R^S$.反之,用以下反例来说明存在 ρ_R-左可消半群,但它不是$\mathscr{R}$-左可消的.

令 $S=N^+$是有唯一幂等元1的自然数幺半群,在 N^+中$\mathscr{R}$-关系与 ρ_R^S关系如下:

$$\left.\begin{array}{l} n\mathscr{R}m\Leftrightarrow nN^+=mN^+\Leftrightarrow n=m \\ n\rho_R^S m\Leftrightarrow nN^+\subseteq mN^+\Leftrightarrow m\mid n \end{array}\right\} \quad (3)$$

因此,N^+的$\mathscr{R}$-类是 N^+的单子集.N^+有且只有一个$\mathscr{L}^*(\rho_R^S)$-类 N^+,则 N^+是 C-ρ_R rpp 半群.显然,它也是 C-$wrpp$ 半群.令 $A=\langle a\rangle$是一个由 a 生成的无穷单演半群,则 A 的$\mathscr{R}$-类同样也是 A 的单子集,ρ_R在A 上是全序关系.令 $M=N^+\cup A$ 为不交并集,定义 M 上的乘法运算"$\circ$"

$$x\circ y=\begin{cases} xy, & x,y\in N^+\ (x,y\in A) \\ y, & x\in N^+,y\in A \\ x, & x\in A,y\in N^+ \end{cases}$$

显然$(M,\circ)$是有幺元1的幺半群,其中幺元是 M 的唯一幂等元.对 $x,y,z\in M$ 令 $x\circ y\circ M\subseteq x\circ z\circ M$,由式(3)知,$N^+$和 A 都是ρ_R-左可消的.易证 $y\circ M\subseteq z\circ M$,因此,$M$ 是一个ρ_R-左可消幺半群.

然而,对 $n,m\in N^+$,$a\circ n\circ M=a\circ M=a\circ m\circ M\Leftrightarrow n=m$,故 M 不是$\mathscr{R}$-左可消的.事实上,M 不是 wpp 半群,因为它的$\mathscr{L}^{**}$-类是 N^+和 A,但 A 不含M 中的任何一个幂等元.

b. 令 S 是有幺元e 的ρ_R-左可消幺半群,若 $f\in E(S)$,则 $fe=ef=f=ff$,于是 $feS^1\subseteq ffS^1$,由 S 是ρ_R-左可消,$eS^1\subseteq fS^1$,又 $fS^1\subseteq S^1=eS^1$,得 $fS=eS=S$,故对$\forall x\in S$,$\exists a\in S$,得 $x=fa$,$fx=f^2a=x$,则 f 是S 的左幺元,由唯一性得$f=e$.

3 C-ρ_R rpp 半群的结构特征

命题4 S 是C-ρ_R rpp 半群,则

对$\forall a\in S$,S 的每一个$\mathscr{L}^*(\rho_R^S)$-类$L_a{}^*(\rho_R^S)$含有唯一的幂等元,记为 a^+,使得 $a=a^+a$.即 S 是充足ρ_R rpp 半群;$(a,b\in S)\,a\mathscr{L}^*(\rho_R^S)\,b\Leftrightarrow a^+=b^+$;$(a,b\in S)(ab)^+=a^+b^+$.

命题4的证明类似于右充足半群的相关命题的证明[3],故在此省略.

引理2 若 S 是一个充足ρ_R rpp 半群,则对 $e\in E(S)$,$L_e^*(\rho_R^S)$是有幺元 e 的ρ_R-左可消幺半群$\Leftrightarrow\forall a\in L_e^*(\rho_R^S)$,$ea=a=ae$.

引理3 令 Y 是半格,对 $\alpha\in Y$,$S=J(Y;S_\alpha;\phi_{\alpha,\beta})$是半群 S_α 的强半格,则

$$(\forall\alpha\in Y)\rho_R{}^{S_\alpha}=\rho_R^S\cap(S_\alpha\times S_\alpha)$$

$$(a_\alpha\in S_\alpha,b_\beta\in S_\beta)(a_\alpha,b_\beta)\in\rho_R^S\text{则}\alpha\leqslant\beta$$

证明

a. 令 $(a,b)\in\rho_R^S\cap(S_\alpha\times S_\alpha)$,则 $(a,b)\in S_\alpha\times S_\alpha$,有 $a\circ S^1\subseteq b\circ S^1$,存在 $x\in S_\beta$ 使得$a=b\circ x=(b\phi_{\alpha,\alpha\beta})(x\phi_{\beta,\alpha\beta})$,有 $\alpha\beta=\alpha$,且 $a=b(x\phi_{\beta,\alpha})$,其中 $x\phi_{\beta,\alpha}\in S_\alpha$,因此,$aS_\alpha\subseteq bS_\beta$,即$(a,b)\in\rho_R{}^{S_\alpha}$,反之显然有 $\rho_R{}^{S_\alpha}\subseteq\rho_R^S\cap(S_\alpha\times S_\alpha)$.

b. 对 $a\in S_\alpha$,$b\in S_\beta$,令$(a,b)\in\rho_R^S$,则 $a\circ S^1\subseteq b\circ S^1$,存在 $x\in S_\gamma$,使得等式 $a=b\circ x=(b\phi_{\beta,\beta\gamma})(x\phi_{\gamma,\beta\gamma})$成立.由 $a\in S_\alpha$可知$\alpha=\beta\gamma\leqslant\beta$.现在给出 C-ρ_R rpp 半群的结构特征.

定理1 任意一个 C-ρ_R rpp 半群S 是ρ_R-左可消幺半群 $L_e^*(\rho_R^S)(\forall e\in E(S))$的强半格.

证明 由命题3知 $S=\bigcup_{e\in E(S)}L_e^*(\rho_R^S)$,对 $e,f\in E(S)$,$e\neq f$,$L_e^*(\rho_R^S)\cap L_f{}^*(\rho_R^S)=\varnothing$.设 $f\leqslant e$,由性质1a,可定义从 $L_e^*(\rho_R^S)$到 $L_f{}^*(\rho_R^S)$的映射 $\phi_{e,f}:a_e\phi_{e,f}=a_ef$.因为 S 的所有幂等元都是中心的,因此对$\forall e,f\in E(S)$,$f\leqslant e$,则 $\phi_{e,f}$是同态映射.特别地,对 $e\in E(S)$,$\phi_{e,e}$是$L_e^*(\rho_R^S)$上的恒等映射.若 $e,f,v\in E(S)$且 $v\leqslant f\leqslant e$,有 $\phi_{e,f}\phi_{f,v}=\phi_{e,v}$.因此 S 的乘法运算可定义为

$$ab=aebf=aefbef=a\phi_{e,ef}b\phi_{f,ef}$$

因此,由文献[4]知,S 是幺半群$L_e^*(\rho_R^S)(\forall e\in E(S))$的一个强半格.对 $a,b,c\in L_e^*(\rho_R^S)$,假设 $caL_e^*(\rho_R^S)\subseteq cbL_e^*(\rho_R^S)$,由引理2可得,$(ca,cb)\in\rho_R^S$.由命题2知[5],$(a,b)=(ea,eb)\in\rho_R^S$,于是对$\forall e\in E(S)$,$L_e^*(\rho_R^S)$是有唯一幂等元 e 的ρ_R-左可消幺半群.

参考文献:

[1] Fountain J. Right PP semigroups with central idempotents[J]. Semigroup Fourum,1977,13(3):229-237.

[2] Fountain J. Abundant semigroups[J]. Proc Edingburgh Math Soc,1979,22:103-129.

[3] Howie J M. An Introduction to semigroup theory[M]. London:Academic Press,1976.

[4] Tang X D. On a theorem of C-$wrpp$ semigroups[J]. Comm in Algebra,1997,25(5):1499-1504.

[5] Du L,Shum K P. On left C-$wrpp$ semigroups[J]. Semigroup Forum,2003,67:373-387.