文章编号:1007-6735(2011)05-0051-05

分数阶积分微分方程多点边值问题解的存在性和唯一性

窦丽霞， 刘锡平， 金京福， 王平友
(上海理工大学 理学院，上海 200093)

摘要：研究一类非线性分数阶积分微分方程多点边值问题，通过计算边值问题的 Green 函数并分析 Green 函数的性质，利用压缩映射原理研究边值问题解的存在唯一性定理，并应用不动点定理得到了边值问题至少有一个解存在结论. 同时给出了一个实例，说明所得结论.

关键词：分数导数；积分微分方程；多点边值问题；不动点定理；压缩映射原理；存在性和唯一性
中图分类号：O 175.1 **文献标志码**：A

Existence and Uniqueness of Solutions of Multi-point Boundary Value Problems for Integro-differential Equations of Fractional Order

DOU Li-xia， LIU Xi-ping， JIN Jing-fu， WANG Ping-you
(*College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China*)

Abstract: The existence and uniqueness of solutions were investigated for a class of multi-point boundary value problems of nonlinear integro-differential equations with fractional derivatives. Via calculating the Green's function and analyzing the properties of Green's function, the existence of solutions for multi-point boundary value problems was studied based on the Banach contraction, principle and by applying, the fixed point theorem. An example was given to illustrate the results.

Key words: *fractional derivative*; *integro-differential equation*; *multi-point boundary value problem*; *fixed point theorem*; *contraction principle*; *existence and uniqueness*

1 问题的提出

随着非线性科学的发展，人们发现用分数阶微分方程能更准确地描述一些自然现象的变化规律. 因此，研究分数阶微分方程对解决非线性问题意义重大[1]，而分数阶微分方程的边值问题是分数阶微分方程理论研究的重要问题之一，已经成为很多数学工作者的研究热点. 关于分数阶微分方程边值问题解的存在性研究已经有很多[2-7]. 但是，对于分数阶积分微分方程边值问题的研究相对较少[8].

收稿日期：2011-01-04
基金项目：上海市教委科研创新基金资助项目(10ZZ93)；安徽省自然科学基金资助项目(10040606Q50)
作者简介：窦丽霞(1985-)，女，硕士研究生. 研究方向：微分方程理论及应用. E-mail：doulixia0123@126.com
刘锡平(联系人)，男，教授. 研究方向：微分方程理论及应用. E-mail：xipingliu@usst.edu.cn

本文研究分数微分积分多点边值问题

$$\left.\begin{array}{l}{}^{C}D^{q}x(t)=f(t,x(t),(\phi x)(t),(\varphi x)(t)),0<t<1\\ x(0)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}a_{i}x'(\xi_{i}),\quad x(1)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}b_{i}x(\xi_{i})\end{array}\right\} \tag{1}$$

解的存在性和唯一性.其中 ${}^{C}D^{q}$ 表示是 Caputo 型分数阶导数,$f\in C([0,1]\times R^{3},R)$,$\gamma,\delta\in L([0,1]\times[0,1],[0,+\infty))$ 为已知函数,$(\phi x)(t)=\int_0^t\gamma(t,s)x(s)\mathrm{d}s$,$(\varphi x)(t)=\int_0^t\delta(t,s)x(s)\mathrm{d}s$,$1<q<2$,$0<a_i,b_i<1$,$i=1,2,\cdots,m-2$,$0<\sum\limits_{i=1}^{m-2}a_i,\sum\limits_{i=1}^{m-2}b_i<1$,$0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{m-2}<1$.

本文研究多点边值问题(1),利用压缩映射原理和不动点定理得到边值问题(1)解的存在性和唯一性.最后,给出了一个实例,用于说明所得结论.

2 预备知识

定义 1[1] 函数 $g:[0,+\infty)\to R$ 的 $q>0$ 阶分数积分定义为

$$I^{q}g(t)=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t\frac{g(s)}{(t-s)^{1-q}}\mathrm{d}s$$

其中,Γ 是 Gamma 函数.

定义 2[1] 函数 $g:[0,+\infty)\to R$ 的 q 阶 Caputo 型分数阶微分定义为

$${}^{C}D^{q}g(t)=\frac{1}{\Gamma(n-q)}\int_0^t(t-s)^{n-q-1}g^{(n)}(s)\mathrm{d}s,$$
$$n-1<q<n,q>0$$

引理 1[9] 阶数为 q 的分数阶微分方程 ${}^{C}D^{q}x(t)=0$ 的一般解是

$$x(t)=c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_{n-1}t^{n-1},$$
$$c_i\in R,i=0,1,2,\cdots,n-1$$

其中,$n=[q]+1$,$[q]$ 为不超过 q 的最大整数.

为方便,记 $a_{m-1}=0$,$b_{m-1}=-1$,$\xi_0=0$,$\xi_{m-1}=1$,并记 $\rho=\dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m-1}b_i\xi_i+\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i\sum\limits_{i=1}^{m-1}b_i}$

显然,$\rho<0$.

定义线性函数 $h_1(t)=\rho\left(-\sum\limits_{i=1}^{m-1}b_it+\sum\limits_{i=1}^{m-1}b_i\xi_i\right)$

$$h_2(t)=-\rho\left(t+\sum_{i=1}^{m-1}a_i\right)$$

则容易证明:$h_1(t)>0$ 且单调递减,$h_2(t)>0$ 且单调递增,$t\in[0,1]$.

引理 2 设 $1<q<2$,则对于给定的 $\sigma\in C[0,1]$,边值问题

$$\begin{cases}{}^{C}D^{q}x(t)=\sigma(t),0<t<1\\ x(0)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}a_ix'(\xi_i),x(1)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}b_ix(\xi_i)\end{cases}$$

存在唯一解

$$x(t)=\int_0^1G_1(t,s)\sigma(s)\mathrm{d}s+\int_0^1G_2(t,s)\sigma(s)\mathrm{d}s$$

其中,当 $\xi_{i-1}<s<\xi_i$,$i=1,2,\cdots,m-1$ 时

$$G_1(t,s)=\begin{cases}\dfrac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}+\dfrac{h_1(t)}{\Gamma(q-1)}\sum\limits_{j=i}^{m-1}a_j(\xi_j-s)^{q-2},s\leqslant t\\ \dfrac{h_1(t)}{\Gamma(q-1)}\sum\limits_{j=i}^{m-1}a_j(\xi_j-s)^{q-2},t\leqslant s\end{cases} \tag{2}$$

$$G_2(t,s)=\frac{h_2(t)}{\Gamma(q)}\sum_{j=i}^{m-1}b_j(\xi_j-s)^{q-1} \tag{3}$$

证明 利用引理 1,对于 ${}^{C}D^{q}x(t)=\sigma(t)$,有 $x(t)=I^{q}\sigma(t)+c_1t+c_2$,其中 c_1,c_2 为任意常数.于是 $x'(t)=I^{q-1}\sigma(t)+c_1$

根据边值条件,可得

$$c_1=-\rho\left(\sum_{i=1}^{m-1}b_i\sum_{i=1}^{m-1}a_iI^{q-1}\sigma(\xi_i)+\sum_{i=1}^{m-1}b_iI^{q}\sigma(\xi_i)\right)$$

$$c_2=\rho\left(\sum_{i=1}^{m-2}b_i\xi_i\sum_{i=1}^{m-1}a_iI^{q-1}\sigma(\xi_i)-\sum_{i=1}^{m-1}a_i\sum_{i=1}^{m-1}b_iI^{q}\sigma(\xi_i)\right)$$

因此

$$x(t)=I^{q}\sigma(t)+\rho\left(-\sum_{i=1}^{m-1}b_it+\sum_{i=1}^{m-1}b_i\xi_i\right)\sum_{i=1}^{m-1}a_iI^{q-1}\sigma(\xi_i)-$$
$$\rho\left(t+\sum_{i=1}^{m-1}a_i\right)\sum_{i=1}^{m-1}b_iI^{q}\sigma(\xi_i)=\int_0^t\frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\sigma(s)\mathrm{d}s+$$
$$h_1(t)\sum_{i=1}^{m-1}a_i\int_0^{\xi_i}\frac{(\xi_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}\sigma(s)\mathrm{d}s+$$
$$h_2(t)\sum_{i=1}^{m-1}b_i\int_0^{\xi_i}\frac{(\xi_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\sigma(s)\mathrm{d}s$$

当 $\xi_{k-1}\leqslant t\leqslant\xi_k$,$1\leqslant k\leqslant m-1$ 时

$$x(t)=\sum_{i=1}^{k-1}\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}\left[\frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}+\frac{h_1(t)}{\Gamma(q-1)}\sum_{j=i}^{m-1}a_j(\xi_j-s)^{q-2}+\right.$$
$$\left.\frac{h_2(t)}{\Gamma(q)}\sum_{j=i}^{m-1}b_j(\xi_j-s)^{q-1}\right]\sigma(s)\mathrm{d}s+$$
$$\int_{\xi_{k-1}}^{t}\left[\frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}+\frac{h_1(t)}{\Gamma(q-1)}\sum_{j=k}^{m-1}a_j(\xi_j-s)^{q-2}+\right.$$
$$\left.\frac{h_2(t)}{\Gamma(q)}\sum_{j=k}^{m-1}b_j(\xi_j-s)^{q-1}\right]\sigma(s)\mathrm{d}s+$$
$$\int_t^{\xi_k}\left[\frac{h_1(t)}{\Gamma(q-1)}\sum_{j=k}^{m-1}a_j(\xi_j-s)^{q-2}+\right.$$

$$\frac{h_2(t)}{\Gamma(q)}\sum_{j=k}^{m-1}b_j(\xi_j-s)^{q-1}\Big]\sigma(s)\mathrm{d}s+$$
$$\sum_{i=k+1}^{m-1}\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}\Big[\frac{h_1(t)}{\Gamma(q-1)}\sum_{j=i}^{m-1}a_j(\xi_j-s)^{q-2}+$$
$$\frac{h_2(t)}{\Gamma(q)}\sum_{j=i}^{m-1}b_j(\xi_j-s)^{q-1}\Big]\sigma(s)\mathrm{d}s=$$
$$\int_0^1 G_1(t,s)\sigma(s)\mathrm{d}s+\int_0^1 G_2(t,s)\sigma(s)\mathrm{d}s.$$

由式(2)、式(3)易证函数 $G_1(t,s)$ 与 $G_2(t,s)$ 具有下列性质.

引理 3　当 $i=1,2,\cdots,m-1,t,s\in[0,1]$时:

a. $G_1(t,s)>0$,且对任意 $\xi_{i-1}\leqslant s\leqslant\xi_i$,

$$\max_{t\in[0,1]}G_1(t,s)\leqslant\frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}+\frac{h_1(0)}{\Gamma(q-1)}\sum_{j=i}^{m-1}a_j(\xi_j-s)^{q-2};$$

b. $G_2(t,s)<0$,且对任意 $\xi_{i-1}\leqslant s\leqslant\xi_i$,

$$\max_{t\in[0,1]}|G_2(t,s)|=|G_2(1,s)|.$$

引理 4[10]　M 是 Banach 空间 X 上的一个非空闭有界凸集,如果 A,B 算子满足:
(a).$\forall\ x,y\in M,Ax+By\in M$;(b).$A$ 是一个压缩映射;(c).B 紧且连续.则存在 $z\in M$ 使得 $z=Az+Bz$.

3　主要结果

为了证明主要结论,记

$$\gamma_0=\sup_{t\in[0,1]}\int_0^t\gamma(t,s)\mathrm{d}s,\ \delta_0=\sup_{t\in[0,1]}\int_0^t\delta(t,s)\mathrm{d}s$$

引入条件

(H_1)　存在函数 $L_1(t),L_2(t),L_3(t)>0,t\in[0,1]$,且 $I^\omega L_i(t)$存在,$\omega=q,q-1,i=1,2,3$,使

$$|f(t,x,y,z)-f(t,\bar{x},\bar{y},\bar{z})|\leqslant L_1(t)|x-\bar{x}|+L_2(t)|y-\bar{y}|+L_3(t)|z-\bar{z}|,x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z}\in R.$$

记

$$I^\omega L(\xi_j)=\max\{|I^\omega L_1(\xi_j)|,|I^\omega L_2(\xi_j)|,|I^\omega L_3(\xi_j)|\},$$
$$j=1,2,\cdots,m-1,\omega=q,q-1$$
$$\Delta=(1+\gamma_0+\delta_0)(I^qL(1)+h_1(0)\sum_{j=1}^{m-1}a_jI^{q-1}L(\xi_j)-h_2(1)\sum_{j=1}^{m-1}b_jI^qL(\xi_j))$$

因为,$L_i(t)>0$,则有$\int_0^{\xi_i}\frac{(\xi_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}L_i(s)\mathrm{d}s\leqslant\int_0^1\frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}L_i(s)\mathrm{d}s$,即 $I^qL_i(\xi_j)\leqslant I^qL_i(1)$,于是 $I^qL(\xi_j)\leqslant I^qL(1)$,$-h_2(1)\sum_{j=1}^{m-1}b_jI^qL(\xi_j)>0$.所以,$\Delta>0$.

首先,运用压缩映射原理研究边值问题(1)解的存在唯一性.

定理 1　设 $1<q<2$,条件(H_1)成立,并且 $0<\Delta<1$,则边值问题(1)存在唯一的解.

证明　设 $X=C[0,1]$,并取范数$\|x\|\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$.则$(X,\|\cdot\|)$为 Banach 空间.定义算子 $F_1,F_2:X\to X$,

$$(F_1x)(t)=\int_0^1G_1(t,s)f(s,x(s),(\phi x)(s),(\varphi x)(s))\mathrm{d}s$$
$$(F_2x)(t)=\int_0^1G_2(t,s)f(s,x(s),(\phi x)(s),(\varphi x)(s))\mathrm{d}s$$

并记

$$(Fx)(t)=(F_1x)(t)+(F_2x)(t)$$

对于 $x,y\in X,t\in[0,1]$,由引理 3,可得

$$|(F_1x)(t)-(F_1y)(t)|\leqslant\int_0^1G_1(t,s)|f(s,x(s),(\phi x)(s),(\varphi x)(s))-f(s,y(s),(\phi y)(s),(\varphi y)(s)|\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\int_0^1G_1(t,s)(L_1(s)|x(s)-y(s)|+L_2(s)|(\phi x)(s)-(\phi y)(s)|+L_3(s)|(\varphi x)(s)-(\varphi y)(s)|)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\int_0^1\Big(\frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}+h_1(0)\sum_{j=1}^{m-1}a_j\frac{(\xi_j-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}\Big)(L_1(s)+\gamma_0L_2(s)+\delta_0L_3(s))\|x-y\|\mathrm{d}s\leqslant$$
$$(1+\gamma_0+\delta_0)(I^qL(1)+h_1(0)\sum_{j=1}^{m-1}a_jI^{q-1}L(\xi_j))\|x-y\|$$

$$|(F_2x)(t)-(F_2y)(t)|\leqslant\int_0^1|G_2(1,s)||f(s,x(s),(\phi x)(s),(\varphi x)(s))-f(s,y(s),(\phi y)(s),(\varphi y)(s)|\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{m-1}\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}\Big(-\frac{h_2(1)}{\Gamma(q)}\sum_{j=i}^{m-1}b_j(\xi_j-s)^{q-1}\Big)(L_1(s)|x(s)-y(s)|+L_2(s)|\phi x(s)-\phi y(s)|+$$
$$L_3(s)|\varphi x(s)-\varphi y(s)|)\mathrm{d}s\leqslant-(1+\gamma_0+\delta_0)h_2(1)\sum_{j=1}^{m-1}b_jI^qL(\xi_j)\|x-y\|$$

所以$\|Fx-Fy\|\leqslant\Delta\|x-y\|$

由于$0<\Delta<1$,故$F:X\rightarrow X$是压缩映射,利用压缩映射原理[11],F在X上有不动点,即边值问题(1)存在唯一解.

下面,应用不动点定理研究边值问题(1)解的存在性.

记$\Delta_1=(1+\gamma_0+\delta_0)(I^qL(1)+h_1(0)\sum_{j=1}^{m-1}a_j I^{q-1}L(\xi_j))$

(H_2) $|f(t,x,y,z)|\leqslant\mu(t),\forall(t,x,y,z)\in[0,1]\times R^3,\mu\in L^2([0,1],R^+)$

定理2 设$1<q<2$,条件(H_1)、(H_2)成立,且有$0<\Delta_1<1$,则边值问题(1)至少存在一个解.

证明 取

$$r\geqslant\|\mu\|_{L^2}\left(\frac{1+\sqrt{-h_2(1)\sum_{j=1}^{m-1}b_j\xi_j^{2q-1}}}{\sqrt{2q-1}\,\Gamma(q)}+\frac{\sqrt{h_1(0)\sum_{j=1}^{m-1}a_j\xi_j^{2q-3}}}{\sqrt{2q-3}\,\Gamma(q-1)}\right)$$

,定义集合$M_r=\{x\in C:\|x\|\leqslant r\}$

显然,$M_r\subset X$是非空有界闭凸集.

在M_r上定义算子$A,B:M_r\rightarrow X$,

$$(Ax)(t)=\int_0^1 G_1(t,s)f(s,x(s),(\phi x)(s),(\varphi x)(s))\mathrm{d}s$$

$$(Bx)(t)=\int_0^1 G_2(t,s)f(s,x(s),(\phi x)(s),(\varphi x)(s))\mathrm{d}s$$

对于任意$x,y\in M_r$,有

$$|Ax+By|\leqslant\int_0^1 G_1(t,s)|f(s,x(s),(\phi x)(s),(\varphi x)(s))|\mathrm{d}s+\int_0^1|G_2(t,s)||f(s,y(s),(\phi y)(s),(\varphi y)(s))|\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\int_0^1\frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\mu(s)\mathrm{d}s+h_1(0)\sum_{i=1}^{m-1}a_j\int_0^{\xi_j}\frac{(\xi_j-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}\mu(s)\mathrm{d}s-h_2(1)\sum_{i=1}^{m-1}b_j\int_0^{\xi_j}\frac{(\xi_j-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\mu(s)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\|\mu\|_{L^2}\frac{1+\sqrt{-h_2(1)\sum_{j=1}^{m-1}b_j\xi_j^{2q-1}}}{\sqrt{2q-1}\,\Gamma(q)}+\frac{\sqrt{h_1(0)\sum_{j=1}^{m-1}a_j\xi_j^{2q-3}}}{\sqrt{2q-3}\,\Gamma(q-1)}\leqslant r$$

所以,$Ax+By\in M_r$.

由假设条件(H_1)和$0<\Delta_1<1$结合定理1的证明知A是个压缩映射.由f的连续性知算子B是连续的,由引理3和(H_2),可得

$$|Bx|\leqslant\int_0^1|G_2(t,s)||f(s,x(s),(\phi x)(s),(\varphi x)(s))|\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{m-1}\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}-\frac{h_2(1)}{\Gamma(q)}\sum_{j=i}^{m-1}b_j(\xi_j-s)^{q-1}\mu(s)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$-h_2(1)\sum_{i=1}^{m-1}b_j\int_0^{\xi_j}\frac{(\xi_j-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\mu(s)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\|\mu\|_{L^2}\frac{\sqrt{-h_2(1)\sum_{j=1}^{m-1}b_j\xi_j^{2q-1}}}{\sqrt{2q-1}\,\Gamma(q)}$$

故B在M_r上是一致有界的.

在条件(H_1)、(H_2)下,记

$$f_{\max}=\sup\{|f(t,x,\phi y,\varphi z)|\mid t\in[0,1],|x|\leqslant r,|y|\leqslant\gamma_0 r,|z|\leqslant\delta_0 r\}$$

对任意$x\in M_r$,当$t\in[0,1]$时,有$|(\phi x)(t)|\leqslant\int_0^t\gamma(t,s)|x(s)|\mathrm{d}s\leqslant r\int_0^t\gamma(t,s)\mathrm{d}s\leqslant\gamma_0 r$,同理$|\phi x(t)|\leqslant\delta_0 r$.

因此

$$|(Bx)(t_1)-(Bx)(t_2)|\leqslant\int_0^1|G_2(t_1,s)-G_2(t_2,s)|\,|f(s,x(s),(\phi x)(s),(\varphi x)(s))|\mathrm{d}s\leqslant$$
$$f_{\max}\int_0^1|G_2(t_1,s)-G_2(t_2,s)|\mathrm{d}s$$

由于$G_2(t,s)$一致连续,所以,对任意$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,当$t_1,t_2\in[0,1]$且$|t_1-t_2|<\delta$时,有$|G_2(t_1,s)-G_2(t_2,s)|<\frac{\varepsilon}{f_{\max}}$,因此$|(Bx)(t_1)-(Bx)(t_2)|\leqslant\varepsilon$

即B是等度连续的.

由Arzela-Ascoli's定理[11]知B在M_r上是紧的,所以,由引理4知边值问题(1)至少存在一个解.

4 例子

以下给出一个实例,用于说明所得的主要结论.

考虑以下边值问题

$$\left.\begin{aligned}&{}^CD^{\frac{3}{2}}x(t)=\frac{1}{10}\left(\frac{t|x(t)|}{1+|x(t)|}+\int_0^t e^{t-s}x(s)\mathrm{d}s+\int_0^t\frac{e^{t-s}}{2}x(s)\mathrm{d}s\right),t\in[0,1]\\&x(0)=\frac{1}{8}\left(x'\left(\frac{1}{8}\right)+x'\left(\frac{1}{6}\right)+x'\left(\frac{1}{4}\right)\right)\\&x(1)=\frac{1}{8}\left(x\left(\frac{1}{8}\right)+x\left(\frac{1}{6}\right)+x\left(\frac{1}{4}\right)\right)\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

其中，$q=\frac{3}{2}$，$\gamma(t,s)=e^{t-s}$，$\delta(t,s)=\frac{e^{t-s}}{2}$，$a_i=b_i=\frac{1}{8}$，$i=1,2,3$，$\xi_1=\frac{1}{8}$，$\xi_2=\frac{1}{6}$，$\xi_3=\frac{1}{4}$

$$\gamma_0=\sup_{t\in[0,1]}\int_0^t e^{t-s}ds=e-1,\delta_0=\sup_{t\in[0,1]}\int_0^t \frac{e^{t-s}}{2}ds=\frac{e-1}{2},h_1(0)=\frac{179}{224},h_2(1)=\frac{33}{28}$$

$$f(t,x,y,z)=\frac{1}{10}\left(\frac{t|x|}{1+|x|}+y+z\right)$$，显然 $f\in C([0,1]\times R^3,R)$

设 $L_i(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{10}$，$i=1,2,3$. 则容易证明条件($H_1$)成立，并且

$I^qL(1)=\frac{2}{15}$，$I^qL(\xi_1)=\frac{1}{120\sqrt{2}}$，$I^qL(\xi_2)=\frac{1}{45\sqrt{6}}$，$I^qL(\xi_3)=\frac{1}{60}$，$I^{q-1}L(\xi_1)=\frac{1}{10\sqrt{2}}$，$I^{q-1}L(\xi_2)=\frac{1}{5\sqrt{6}}$，$I^{q-1}L(\xi_3)=\frac{1}{10}$. 因此

$$\Delta=(1+\gamma_0+\delta_0)(I^qL(1)+h_1(0)\sum_{j=1}^{m-1}a_jI^{q-1}L(\xi_j)-h_2(1)\sum_{j=1}^{m-1}b_jI^qL(\xi_j))\approx 0.218<1$$

综上所述，边值问题(4)满足定理 1 的条件，根据定理 1，边值问题(4)存在唯一解.

参考文献：

[1] Podlubny I. Fractional differential equations[M]. San Diego: Acad Press, 1999.

[2] Ahmad B, Juan J N. Existence results for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with three-point boundary conditions[J]. Appl Math Comput, 2009, 58(9): 1838-1843.

[3] Zhong W Y, Lin W. Nonlocal and multiple-point boundary value problem for fractional differential equations[J]. Appl Math Comput, 2010, 59(3): 1345-1351.

[4] Ahmad B, Sivasundram S. Existence of solution for impulsive integral boundary value problems of fractional order[J]. Nonlinear Anal: Hybrid Syst, 2010, 4(1): 134-141.

[5] Ahmad B. Existence of solutions for irregular boundary value problems of nonlinear fractional ddifferential equations[J]. Appl Math Lett, 2010, 23(4): 390-394.

[6] Liu X P, Jia M. Multiple solutions for fractional differential equations with nonlinear boundary conditions[J]. Compu Math Appl, 2010, 59(8): 2880-2886.

[7] Mujeeb UR R, Rahmat A K. Existence and uniqueness of solutions for multi-point boundary value problems for fractional differential equations[J]. Appl Math Lett, 2010, 23(9): 1038-1044.

[8] Ahmad B, Sivasundram S. On four-point nonlocal boundary value problems of nonlinear integro-differential equations of fractional order[J]. Appl Math Comput, 2010, 217(2): 480-487.

[9] Lakshmikantham V, Leela S J, Vasundhar D. Theory of fractional dynamic systems [M]. Cambridge: Cambridge Academic Publishers, 2009.

[10] 尤秉礼. 常微分方程补充教程[M]. 北京：人民教育出版社，1981.

[11] 郭大钧，孙经先，刘兆理. 非线性常微分方程泛函方法[M]. 济南：山东科学技术出版社，2006.