文章编号:1007－6735(2012)01－0056－03

三维欧氏空间中的球面曲线

郑长波[1]，　李晓毅[2]
（1. 大连海洋大学 理学院，大连　116300；2. 沈阳师范大学 数学与系统科学学院，沈阳　110034）

摘要： 依据经典微分几何空间曲线的基本理论与特征，采用一种新的活动标架——三维欧氏空间中的球面 Frenet 标架，并利用三维曲线的 Frenet 标架场，对三维欧式空间中的球面曲线进行研究，得到了在三维空间 E^3 下的贝特朗、曼海姆及从切等特殊曲线，给出了一个由曲线的曲率与挠率的一阶常微分方程描述的三维欧氏空间中的球面曲线，得出了比对应微分方程阶数更低的条件，且大大简化了计算过程.

关键词： 球面曲线；曲率；挠率；球面 Frenet 公式
中图分类号： O 186.1　　**文献标志码：** A

Spherical Curves in Euclidean 3-Space

ZHENG Chang-bo[1]，　LI Xiao-yi[2]
（1. *College of Science, Dalian Ocean University, Dalian 116300, China*；
2. *College of Mathematics and Systematic Science, Shenyang Normal University, Shenyang 110034, China*）

Abstract：Based on the basic theory and characteristics of space curves in classical differential geometry, a new kind of moving construction——the spherical Frenet construction of this kind were finany obtained in 3-D Euclidean space, as well as the 3-D curves Frenet construction field were introduced to inspect the spherical curves in 3-D Euclidean space. Bertrand, Mannheim, rectifying curves, and special curves of this kind were finally obtained in the 3-D E^3 space, giving spherical curves in 3-D Euclidean space which can be described by first-order ordinary differential equations with respect to curve's curvature and torsion, and producing a low-level curve representation for the corresponding differential equation. The new characteristics of spherical curves were verified and the calculation process was simplified.

Key words：*spherical curve*；*curvature*；*torsion*；*sperical Frenet formula*

微分几何是运用数学分析的理论研究曲线和曲线在其领域的性质，在经典力学中有着广泛的应用，基于差分系统的一般离散变分方法和差分离散变分原理对几何空间曲线的球面曲线的基本理论与特征的进行了研究[1－4]，进而提出一种新型的三维欧氏空间中的球面 Frenet 标架. 球面曲线在经典力学中有着不可替代的作用[5－6]. 1 条空间曲线的指标曲线由 3 条球面曲线构成. 球面曲线具有一个重要的特征[7－8]，球面曲线的曲率和挠率存在一个二阶常微分方程，本文利用球面活动标架方法，给出三维欧氏空间 $\boldsymbol{E}^3$ 中球面曲线的另一个特征以及一个关于球面螺旋线的应用，建立了球面曲线的曲率和挠率

收稿日期： 2011－09－09
作者简介： 郑长波（1954－），男，教授. 研究方向：微分几何. E-mail：dhdzcb@163.com

的一阶常微分方程，得到了比对应微分方程阶数更低的条件，而且大大简化了计算过程.

1　三维欧氏空间中的球面 Frenet 标架

1.1　条件参数的假定

设 $\Gamma: x(s)$是 $\boldsymbol{E}^3$ 中的一条空间曲线，s 是它的弧长参数. 利用$\{\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s)\}$表示沿着曲线 $\Gamma: x(s)$的 Frenet 标架场，即 $\boldsymbol{\alpha}(s)$是曲线的切向量场，$\boldsymbol{\beta}(s)$是曲线的主法向量场，$\boldsymbol{\gamma}(s)$是曲线的副法向量场. 由 Frenet 公式可以写为

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\alpha}}(s) &= \kappa(s)\boldsymbol{\beta}(s) \\ \dot{\boldsymbol{\beta}}(s) &= -\kappa(s)\boldsymbol{\alpha}(s) + \tau(s)\boldsymbol{\gamma}(s) \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}}(s) &= -\tau(s)\boldsymbol{\beta}(s) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

本文用“点”表示相对于曲线的弧长参数求导数，即

$$\dot{\kappa} = \dot{\kappa}(s) = \frac{\mathrm{d}\kappa(s)}{\mathrm{d}s}$$

如果 Γ 是一条球面曲线，根据需要作一个 $\boldsymbol{E}^3$ 中的变换，假设$\langle \boldsymbol{x}(s) \cdot \boldsymbol{x}(s) \rangle = \langle \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} \rangle = a^2$，即将球面曲线所在球面的球心选为坐标原点建立新坐标系，利用球面曲线的弧长 s 作为球面曲线方程的参数. 这里 $a>0$，a 是一个常数，$\langle \cdot \rangle$表示 $\boldsymbol{E}^3$ 中的标准内积. 不失一般性，假定 $a=1$. 设 $\boldsymbol{\alpha}(s) := \dot{\boldsymbol{x}}(s)$ 及 $\boldsymbol{y}(s) := \boldsymbol{\alpha}(s) \times \boldsymbol{x}(s)$，这里×表示 $\boldsymbol{E}^3$ 中两个向量的向量积，则 $\boldsymbol{\alpha}(s)$，$\boldsymbol{x}(s)$和 $\boldsymbol{y}(s)$形成 $\boldsymbol{E}^3$ 中沿着 Γ 的一个标准正交基. 称$\{\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{y}(s)\}$为 $\boldsymbol{E}^3$ 中球面曲线 Γ 的球活动标架场. 因此，存在一个函数 $\lambda(s)$使得

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\alpha}}(s) &= -\boldsymbol{x}(s) + \lambda(s)\boldsymbol{y}(s) \\ \dot{\boldsymbol{x}}(s) &= \boldsymbol{\alpha}(s) \\ \dot{\boldsymbol{y}}(s) &= -\lambda(s)\boldsymbol{\alpha}(s) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

定义 $\lambda(s)$为 $\boldsymbol{E}^3$ 中的球面曲线 Γ 的球曲率函数.

1.2　命题验证

如果 $\boldsymbol{E}^3$ 中的曲线 Γ 的球曲率函数 $\lambda(s)$是常数，则曲线 Γ 是一个圆.

证明　如果 λ 是一个常数，由式(2)可得

$$\dot{\boldsymbol{x}}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) \tag{3}$$

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(s) = \dot{\boldsymbol{\alpha}}(s) = -\boldsymbol{x}(s) + \lambda\boldsymbol{y}(s) \tag{4}$$

$$\dddot{\boldsymbol{x}}(s) = -\dot{\boldsymbol{x}}(s) + \lambda\dot{\boldsymbol{y}}(s) = -(1+\lambda^2)\dot{\boldsymbol{x}}(s) \tag{5}$$

利用式(5)，通过解方程很容易得到 Γ 是一个圆. 因为 λ 是常数，解三阶常系数常微分方程(5)得到

$$\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{c}_1\cos(\sqrt{1+\lambda}s) + \boldsymbol{c}_2\sin(\sqrt{1+\lambda}s) + \boldsymbol{c}_3$$

式中，$\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3$ 为 $\boldsymbol{E}^3$ 中的常向量.

2　定理的证明

引理 1　设 Γ 是三维欧氏空间 $\boldsymbol{E}^3$ 中的一条曲线，s 是曲线的弧长参数，则 Γ 是球面曲线，当且仅当 Γ 的曲率 $\kappa(s)$与挠率 $\tau(s)$满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{1}{\tau(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\right] + \frac{\tau(s)}{\kappa(s)} \equiv 0 \tag{6}$$

由式(6)可知，这个方程是曲线 Γ 的曲率 $\kappa(s)$与挠率 $\tau(s)$的一个二阶常微分方程. 本文利用球面活动标架方法，给出三维欧氏空间 $\boldsymbol{E}^3$ 中球面曲线的另一个特征以及一个关于球面螺旋线的应用，据此提出定理 1.

定理 1　设 Γ 是三维欧氏空间 $\boldsymbol{E}^3$ 中的一条空间曲线，s 是曲线 Γ 的弧长参数，则 Γ 是单位球面曲线，当且仅当 Γ 的曲率 $\kappa(s)$与挠率 $\tau(s)$满足

$$\frac{\mathrm{d}\kappa(s)}{\mathrm{d}s} \pm \kappa(s)\tau(s)\sqrt{\kappa^2(s)-1} \equiv 0 \tag{7}$$

为了证明定理 1，考虑球面曲线 Γ 的球曲率函数 $\lambda(s)$与 Frenet 曲率函数 $\kappa(s)$和挠率函数 $\tau(s)$的关系. 假设 $\Gamma: \boldsymbol{x}(s)$是一个球面曲线. 由式(1)和式(2)有

$$\kappa(s)\boldsymbol{\beta}(s) = \dot{\boldsymbol{\alpha}}(s) = -\boldsymbol{x}(s) + \lambda(s)\boldsymbol{y}(s) \tag{8}$$

则

$$\kappa^2(s) = 1 + \lambda^2(s) \tag{9}$$

式(8)两边分别对 s 求导数，并利用式(1)和式(2)可以得出

$$\dot{\kappa}(s)\boldsymbol{\beta}(s) - \kappa^2(s)\boldsymbol{\alpha}(s) + \kappa(s)\tau(s)\boldsymbol{\gamma}(s) = -\boldsymbol{\alpha}(s) + \dot{\lambda}(s)\boldsymbol{y}(s) - \lambda^2(s)\boldsymbol{\alpha}(s)$$

这样

$$\dot{\kappa}(s)\boldsymbol{\beta}(s) + \kappa(s)\tau(s)\boldsymbol{\gamma}(s) = \dot{\lambda}(s)\boldsymbol{y}(s)$$

因此

$$\dot{\kappa}^2(s) + \kappa^2(s)\tau^2(s) = \dot{\lambda}^2(s) \tag{10}$$

再应用式(9)和式(10)，可以得出

$$\dot{\kappa}^2(s) + \kappa^2(s)\tau^2(s) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\sqrt{\kappa^2(s)-1}\right)^2$$

即

$$\dot{\kappa}^2(s) = \kappa^2(s)\tau^2(s)(\kappa^2(s)-1) \tag{11}$$

不难证明，如果 $\kappa(s)$和 $\tau(s)$满足式(11)，则它们也满足式(6)，即式(11)可以写为

$$-\frac{1}{\tau(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right) = \frac{\sqrt{\kappa^2(s)-1}}{\kappa(s)}$$

两边对 s 求导，并利用式(11)可以得到

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{1}{\tau(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\right] = \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)\sqrt{\kappa^2(s)-1}} = \frac{\tau(s)}{\kappa(s)}$$

这就是方程(6).因此,微分方程(11)(即式(7))是一条空间曲线成为单位球面曲线的一个充分必要条件.这样就证明了定理 1 的正确性.

3 应 用

在定理 2 中应用本文的三维欧氏空间 $\boldsymbol{E}^3$ 中球面螺旋线的概念.

定理 2 设 $\Gamma:\boldsymbol{x}(s)$ 是 $\boldsymbol{E}^3$ 中的一条球面曲线,s 是曲线的弧长参数.如果 $\Gamma:x(s)$ 的切向量场与 $\boldsymbol{E}^3$ 中的一个常值向量的交角是常数,则 $\Gamma:x(s)$ 的球曲率函数 $\lambda(s)$ 满足

$$\ddot{\lambda}(s)(1+\lambda^2(s))-3\lambda(s)\dot{\lambda}^2(s)\equiv 0 \tag{13}$$

即

$$\frac{\lambda(s)}{\sqrt{1+\lambda^2(s)}}=as+b \tag{14}$$

其中,a 和 b 为常数,$a\neq 0$.因此,曲线 Γ 的位置向量 $\boldsymbol{x}(s)$ 满足

$$[(as+b)^2-1]\ddddot{\boldsymbol{x}}(s)+3a(as+b)\dddot{\boldsymbol{x}}(s)-\ddot{\boldsymbol{x}}(s)\equiv 0 \tag{15}$$

证明 设 $\boldsymbol{c}$ 是 $\boldsymbol{E}^3$ 中的一常值向量,且 $\langle\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{c}\rangle=l$,$l$ 是一常数.如果 $l=0$,由 $\langle\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{c}\rangle=0$,有

$$0=\langle\dot{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{c}\rangle=\langle-\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{c}\rangle=-\langle\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{c}\rangle+\lambda\langle\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{c}\rangle$$

$$0=-\langle\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{c}\rangle+\dot{\lambda}\langle\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{c}\rangle+\lambda\langle\dot{\boldsymbol{y}}\cdot\boldsymbol{c}\rangle=\dot{\lambda}\langle\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{c}\rangle$$

这样,由 λ 的导数等于 0 推出 λ 是常数.因此,由命题可知曲线是一个圆.设 l 不等于 0 且 λ 不等于常数.由 $\langle\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{c}\rangle=l$ 可以得出

$$0=\langle\dot{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{c}\rangle=\langle-\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{c}\rangle=-\langle\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{c}\rangle+\lambda\langle\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{c}\rangle$$

$$0=-\langle\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{c}\rangle+\dot{\lambda}\langle\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{c}\rangle+\lambda\langle\dot{\boldsymbol{y}}\cdot\boldsymbol{c}\rangle=-\langle 1+\lambda^2\rangle l+\dot{\lambda}\langle\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{c}\rangle \tag{16}$$

$$0=-2\lambda\dot{\lambda}l+\ddot{\lambda}\langle\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{c}\rangle-\lambda\dot{\lambda}l=-3\lambda\dot{\lambda}l+\ddot{\lambda}\langle\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{c}\rangle \tag{17}$$

这样,由式(16)和式(17)得到式(13).

解方程(13)得到

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\lambda}}{\dot{\lambda}}=\frac{3\lambda\,\mathrm{d}\lambda}{1+\lambda^2}$$

$$\lg|\dot{\lambda}|=\frac{3}{2}\lg(1+\lambda^2)+\lg|a|$$

$$\dot{\lambda}=a(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}},\quad \frac{\lambda(s)}{\sqrt{1+\lambda^2(s)}}=as+b$$

由式(2)有

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{\alpha},\quad \ddot{\boldsymbol{x}}=-\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}$$

$$\dddot{\boldsymbol{x}}=-(1+\lambda^2)\dot{\boldsymbol{x}}+\dot{\lambda}\boldsymbol{y}$$

$$\ddddot{\boldsymbol{x}}=-3\lambda\dot{\lambda}\dot{\boldsymbol{x}}-(1+\lambda^2)\ddot{\boldsymbol{x}}+\ddot{\lambda}\boldsymbol{y}$$

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}\,\ddddot{\boldsymbol{x}}&=-3\lambda\dot{\lambda}^2\dot{\boldsymbol{x}}-(1+\lambda^2)\dot{\lambda}\ddot{\boldsymbol{x}}+\ddot{\lambda}\dot{\lambda}\boldsymbol{y}=\\&-3\lambda\dot{\lambda}^2\dot{\boldsymbol{x}}-(1+\lambda^2)\dot{\lambda}\ddot{\boldsymbol{x}}+\ddot{\lambda}[\dddot{\boldsymbol{x}}+(1+\lambda^2)\dot{\boldsymbol{x}}]=\\&[\ddot{\lambda}(1+\lambda^2)-3\lambda\dot{\lambda}^2]\dot{\boldsymbol{x}}-(1+\lambda^2)\dot{\lambda}\ddot{\boldsymbol{x}}\ddot{\boldsymbol{x}}+\ddot{\lambda}\dddot{\boldsymbol{x}}=\\&\ddot{\lambda}\dddot{\boldsymbol{x}}-(1+\lambda^2)\dot{\lambda}\ddot{\boldsymbol{x}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+\lambda^2)\dot{\lambda}\,\ddddot{\boldsymbol{x}}&=\ddot{\lambda}(1+\lambda^2)\dddot{\boldsymbol{x}}-(1+\lambda^2)^2\dot{\lambda}\ddot{\boldsymbol{x}}=\\&3\lambda\dot{\lambda}^2\dddot{\boldsymbol{x}}-(1+\lambda^2)^2\dot{\lambda}\ddot{\boldsymbol{x}}\end{aligned}$$

$$(1+\lambda^2)\,\ddddot{\boldsymbol{x}}=3\lambda\dot{\lambda}\dddot{\boldsymbol{x}}-(1+\lambda^2)^2\ddot{\boldsymbol{x}}$$

$$\begin{aligned}(1+\lambda^2)^{-1}\,\ddddot{\boldsymbol{x}}&=3\lambda\dot{\lambda}(1+\lambda^2)^{-2}\dddot{\boldsymbol{x}}-\ddot{\boldsymbol{x}}=\\&\frac{3\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)\dddot{\boldsymbol{x}}-\ddot{\boldsymbol{x}}\end{aligned} \tag{18}$$

这样由式(14)和式(18)得到式(15),因此,证明了定理 2 的正确性.

4 结 论

a. 给出了三维欧氏空间中球面曲线的一个由曲线的曲率与挠率的一阶常微分方程描述的球面曲线的新特征,比对应的微分方程阶数低,计算简化.

b. 得到了三维空间 $\boldsymbol{E}^3$ 中的其它特殊曲线:贝特朗曲线(Bertrand curve)和曼海姆曲线(Mannheim curve)或从切曲线(rectifying curve).

参考文献:

[1] 王权陡,余景池,张学军,等.离轴非球面最接近球面半径及非球面度的求解[J].光电工程,2000,27(3):16-19.

[2] 王瑞秋,陈五一,金曼.多点切触加工中的局部干涉分析[J].北京航空航天大学学报,2006,32(5):580-584.

[3] Kong D X,Liu K F,Wang Z G.Hyperbolic mean curvature flow: evolution of plane curves [J]. Acta Mathematica Scientia 2009,29B(3):493-514.

[4] 贺志民,方美娥.空间代数曲线的参数化逼近[J].计算机应用与软件,2008,25(9):130-135.

[5] 闫德宝.球面曲线为平面曲线的充要条件及其所在平面的方程[J].科学技术与工程,2008,8(15):4270-4271.

[6] 王如山,刘渐和.一般曲面曲线的曲率和挠率关系式[J].安徽师范大学学报(自然科学版),2008,31(4):307-310.

[7] Carmo M P.曲线与曲面的微分几何[M].田畴,忻元龙,译.北京:机械工业出版社,2005.

[8] 吴大任.微分几何讲义[M].3 版.北京:人民教育出版社,1979.