上海理工大学学报
第34卷 第1期 J. University of Shanghai for Science and Technology Vol.34 No.1 2012

文章编号:1007－6735(2012)01－0076－05

耦合 mKdV 系统的非奇异正子解、负子解及复子解

张 玲， 桑本文， 胡恒春
（上海理工大学 理学院，上海 200093）

摘要：研究从二层流体模型中导出的变系数耦合 mKdV 模型，利用达布变换法，并依据系统中 Lax 对的谱参数的性质，给出了耦合 mKdV 系统的正子解、负子解、复子解及这些解的具体结构图形．其中所得到的耦合 mKdV 系统的正子解、负子解和复子解都是解析的，而复子解可看作一种形式的周期波解．

关键词：正子解；负子解；复子解；耦合 KdV 系统
中图分类号：O 13　　**文献标志码**：A

New Nonsingular Positon, Negaton and Complexiton Solutions of a Special Coupled mKdV System

ZHANG Ling， SANG Ben-wen， HU Heng-chun
（*College of Science*，*University of Shanghai for Science and Technology*，*Shanghai 200093*，*China*）

Abstract: New positon, negaton and complexiton solutions of a special coupled mKdV system, which derived from a two-layer fluid model, were constructed by means of Darboux transformation. It means that with different general parameters, different types of solutions and the structures of the solutions can be obtained. All the solutions presented are analytical, and the complexiton solution is a periodic wave solution.

Key words: *positon*; *negaton*; *complexiton*; *coupled mKdV system*

众所周知，自从孤立子理论从 20 世纪 60 年代建立以来，许多数学家和理论物理学家提出了多种求解非线性系统的有效方法，如反散射方法、贝克隆变换、对称分析法、双线性方法、分离变量法、傅里叶方法以及达布变换法等．有关非线性方程精确解的讨论也有很多[1－3]．但由于孤立子理论的研究对象大多是非线性系统，不同于一般的线性系统，解的叠加性原理不再适用，因此，人们并没有统一的方法来处理非线性系统的求解问题．针对不同的非线性系统，所采用的方法也各不相同．在文献[4]中，作者提出了一种根据可积系统的 Lax 对的谱参数性质来划分可积系统精确解的新方法．即当 Lax 对中谱参数是正实数时得到的解称为正子解，这样的解一般是由三角函数构成的；当 Lax 对中谱参数是负实数时得到的解称为负子解，它一般是由双曲函数构成的；而所谓的复子解，就是当 Lax 对的谱参数是复数时

收稿日期：2010－10－29
基金项目：上海市重点学科建设资助项目（S30501）；国家自然科学基金资助项目（10601033）
作者简介：张 玲（1986－），女，硕士研究生．研究方向：孤立子与可积系统．E-mail：diankouzhangling@163.com

所得到的，一般是由三角函数和双曲函数组合而成的解.目前已经发现的可积系统的正子解大多是奇异的.对于非线性系统的负子解和复子解来说，有的是奇异的，有的是非奇异的.非线性系统的复子解作为近年来的一个研究热点，人们已经通过多种方法构造出不同系统的复子解.例如，马文秀利用 Casoratian 公式构造了 Toda lattice 方程的复子解[5]，借助于 Wronskian 行列式给出了 Boussinesq 方程的有理解、正子解和复子解[6-8].需要指出的是，非线性可积系统的复子解大都是奇异的.比如，熟知的 KdV 方程作为孤子理论中描绘长浅水波的典型模型，人们研究了它的对称性、守恒律、反散射变换、贝克隆变换、达布变换等性质，并且 KdV 方程是一完全可积的哈密顿系统，但它的正子解和复子解也是奇异的.因此如何寻求非线性可积系统的非奇异正子解、复子解具有重要的理论意义.

另一方面，非线性耦合系统作为物理学诸多研究领域中的重要研究对象，已经引起了许多数学和物理学家的关注，并且取得了一定的研究成果.1981 年，Hirota 和 Satsuma 提出了第一个耦合 KdV 系统，并详细讨论了其多孤子解、守恒律等性质.随后，人们通过不同的手段构造了其它形式的耦合 KdV 系统，如 Ito's 耦合系统、Nutku-Oguz 耦合系统和 Zharkov 模型等.

1　问题的提出

本文主要研究一种特殊类型的非线性耦合系统，即耦合 mKdV 系统，从该系统已有的达布变换出发来构造其正子解、负子解和复子解，给出这些解的具体结构图形.利用多重尺度展开法，文献[9]从二层流体模型出发，导出了一般变系数耦合mKdV 模型为

$$\begin{aligned} &A_{1T} + r_1 A_{1XXX} + (r_2 A_1^2 + r_3 A_1 A_2 + \\ &\quad r_4 A_1 + r_5 A_2^2 + r_6 A_2 + r_7)A_{1X} + \\ &\quad (r_8 A_1^2 + r_9 A_1 A_2 + r_{10} A_1 + r_{11} A_2 + \\ &\quad r_{12})A_{2X} + r_{13} A_1 = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &A_{2T} + e_1 A_{2XXX} + (e_2 A_2^2 + e_3 A_1 A_2 + \\ &\quad e_4 A_2 + e_5 A_1^2 + e_6 A_1 + e_7)A_{2X} + \\ &\quad (e_8 A_2^2 + e_9 A_1 A_2 + e_{10} A_2 + e_{11} A_1 + \\ &\quad e_{12})A_{1X} + e_{13} A_2 = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

式中，A_1，A_2为 X，T 的函数；r_i，e_i为关于 T 的任意函数（$i=1,\cdots,13$）.通过对任意函数 r_i，e_i的适当选取，可得到多种形式的耦合 mKdV 系统.如 Hirota[10]用 Pfaffian 表示出另一种形式的耦合 mKdV 系统的多孤子解.

由于变系数耦合 mKdV 系统的复杂性，这里不研究其一般形式.为简单起见，仅考虑式(1)和式(2)的一种特殊形式，换句话说，通过对(1+1)维 mKdV 方程适当复化，将 $U=u+Iv$ 带入(1+1)维 mKdV 方程

$$U_t + 6U^2 U_x + U_{xxx} = 0 \tag{3}$$

其中，$I^2=-1$，将实部和虚部完全分离开后，得到一种耦合的 mKdV 系统

$$u_t - 12uvv_x + 6u^2 u_x - 6v^2 u_x + u_{xxx} = 0 \tag{4}$$

$$v_t + 12uvu_x + 6u^2 v_x - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0 \tag{5}$$

显而易见，非线性系统式(3)与式(4)是变系数耦合 mKdV 系统式(1)与式(2)的一种特殊情况.在文献[11]中，作者利用双线性方法研究了另一种形式耦合 mKdV 系统的复子解，并讨论了这些解的演化过程.

文献[12-13]中，作者利用达布变换研究了两种类型的耦合 KdV 系统，并给出了它们新的正子解、负子解和复子解.达布变换是孤立子理论中卓有成效的一种求解方法，本文将利用耦合 mKdV 系统的达布变换来构造该系统的正子解、负子解和复子解.

2　正子解、负子解和复子解

借助于 mKdV 的达布变换以及耦合 mKdV 系统和 mKdV 系统之间的关系，文献[14]给出了耦合 mKdV 系统的达布变换，下面将简单列出耦合 mKdV 系统的达布变换具体形式，并进一步求得它的正子解、负子解和复子解.

耦合 mKdV 系统的 Lax 对为

$$\phi_{1x} = \lambda\phi_1 - v\varphi_2 + u\varphi_1 \tag{6}$$

$$\phi_{2x} = \lambda\phi_2 + u\varphi_2 + v\varphi_1 \tag{7}$$

$$\varphi_{1x} = -u\phi_1 + v\phi_2 - \lambda\varphi_1 \tag{8}$$

$$\varphi_{2x} = -u\phi_2 - v\phi_2 - \lambda\varphi_2 \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \phi_{1t} = {} & (2\lambda v^2 - 4\lambda^3 - 2\lambda u^2)\phi_1 + 4\lambda uv\phi_2 + \\ & (6uv^2 - 2\lambda u_x - 4\lambda^2 u - 2u^3 - u_{xx})\varphi_1 - \\ & (2v^3 - 2\lambda v_x - 6u^2 v - v_{xx} - 4\lambda^2 v)\varphi_2 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \phi_{2t} = {} & -4\lambda uv\phi_1 + (2\lambda v^2 - 2\lambda u^2 - 4\lambda^3)\phi_2 - \\ & (v_{xx} + 6u^2 v + 2\lambda v_x + 4\lambda^2 v - 2v^3)\varphi_1 - \\ & (u_{xx} + 4\lambda^2 u - 6uv^2 + 2\lambda u_x + 2u^3)\varphi_2 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{1t} = {} & (u_{xx} - 6uv^2 + 2u^3 + 4\lambda^2 u - 2\lambda u_x)\phi_1 + \\ & (2v^3 - 6u^2 v + 2\lambda v_x - v_{xx} - 4\lambda^2 v)\phi_2 + \end{aligned}$$

$$(4\lambda^3 - 2\lambda v^2 + 2\lambda u^2)\varphi_1 - 4\lambda uv\varphi_2 \tag{12}$$

$$\varphi_{2t} = (v_{xx} - 2\lambda v_x + 4\lambda^2 v - 2v^3 + 6u^2 v)\phi_1 + (2u^3 + 4\lambda^2 u + u_{xx} - 2\lambda u_x - 6uv^2)\phi_2 + 4\lambda uv\varphi_1 + (2\lambda u^2 + 4\lambda^3 - 2\lambda v^2)\varphi_2 \tag{13}$$

其中，ϕ_1，ϕ_2，φ_1，φ_2是 Lax 对的波函数. 可以直接验证式(6)～(13)的相容性条件恰好是耦合 mKdV 系统，其达布变换为

$$\bar{u} = - u - \frac{4\lambda_0 AC}{F} \tag{14}$$

$$\bar{v} = - v - \frac{4\lambda_0 BD}{F} \tag{15}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \\ \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{F}\begin{pmatrix} \lambda-\lambda_0 CD & 4\lambda_0 AB & -2\lambda_0 AC & -2\lambda_0 BD \\ -4\lambda_0 AB & \lambda-\lambda_0 CD & 2\lambda_0 BD & -2\lambda_0 AC \\ -4\lambda_0 AB & \lambda-\lambda_0 CD & 2\lambda_0 BD & -2\lambda_0 AC \\ -2\lambda_0 BD & 2\lambda_0 AC & -4\lambda_0 BD & -\lambda-\lambda_0 CD \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

其中

$$\begin{aligned} A &= A(f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}) = f_{11} f_{21} + f_{12} f_{22} \\ B &= B(f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}) = f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21} \\ C &= C(f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}) = f_{11}^2 + f_{21}^2 + f_{12}^2 + f_{22}^2 \\ D &= D(f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}) = f_{12}^2 - f_{21}^2 + f_{11}^2 - f_{22}^2 \\ F &= F(f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}) = (f_{11}^2 + f_{21}^2 - f_{12}^2 - f_{22}^2)^2 + 4(f_{11} f_{12} + f_{21} f_{22})^2 \end{aligned} \tag{17}$$

4 个函数 f_{11}，f_{12}，f_{21}，f_{22}是当 $\lambda = \lambda_0$，$\phi_1 = f_{11}$，$\phi_2 = f_{12}$，$\varphi_1 = f_{21}$，$\varphi_2 = f_{22}$时，Lax 对的解.

下面将利用耦合 mKdV 系统的达布变换来具体构造其相应的正子解、负子解和复子解. 如果取定耦合 mKdV 系统的初值解为$\{u = 0, v = 1\}$，代入其 Lax 对可以得到波函数为

$$\phi_1 = c_3 \cos[\sqrt{-\lambda^2 - 1}(4\lambda^2 t - 2t - x)] + c_4 \sin[\sqrt{-\lambda^2 - 1}(4\lambda^2 t - 2t - x)] \tag{18}$$

$$\phi_2 = c_1 \cos[\sqrt{-\lambda^2 - 1}(4\lambda^2 t - 2t - x)] + c_2 \sin[\sqrt{-\lambda^2 - 1}(4\lambda^2 t - 2t - x)] \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\varphi_1 = {} & c_1\Big\{\sqrt{-\lambda^2 - 1}\sin[\sqrt{-\lambda^2 - 1}(4\lambda^2 t-2t-x)] - \lambda\cos[\sqrt{-\lambda^2 - 1}(4\lambda^2 t - 2t - x)]\Big\} - \\ & c_2\Big\{\lambda\sin[\sqrt{-\lambda^2 - 1}(4\lambda^2 t - 2t - x)] + \sqrt{-\lambda^2 - 1}\cos[\sqrt{-\lambda^2 - 1}(4\lambda^2 t-2t-x)]\Big\}\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 = {} & c_3\Big\{\lambda\cos[\sqrt{-\lambda^2 - 1}(4\lambda^2 t - 2t - x)] - \sqrt{-\lambda^2 - 1}\sin[\sqrt{-\lambda^2 - 1}(-4\lambda^2 t + 2t + x)]\Big\} + \\ & c_4\Big\{\lambda\sin[\sqrt{-\lambda^2 - 1}(4\lambda^2 t - 2t - x)] + \sqrt{-\lambda^2 - 1}\cos[\sqrt{-\lambda^2 - 1}(4\lambda^2 t-2t-x)]\Big\}\end{aligned} \tag{21}$$

其中，c_1，c_2，c_3，c_4 为任意常数.

2.1 正子解

为了求得耦合 mKdV 系统的正子解，在式(18)～(21)中，取 $\lambda = \frac{1}{2}$，得到

$$\phi_1 = c_3 \cosh(\frac{\sqrt{5}}{2}(x+t)) - Ic_4 \sinh(\frac{\sqrt{5}}{2}(x+t)) \tag{22}$$

$$\phi_2 = c_1 \cosh(\frac{\sqrt{5}}{2}(x+t)) - Ic_2 \sinh(\frac{\sqrt{5}}{2}(x+t)) \tag{23}$$

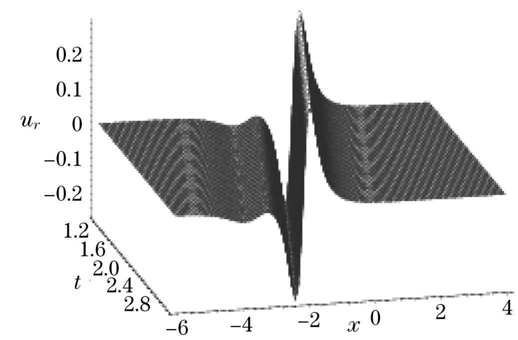
$$\begin{aligned}\varphi_1 = {} & c_1[\frac{\sqrt{5}}{2}\sinh(\frac{\sqrt{5}}{2}(x+t)) - \frac{1}{2}\cosh(\frac{\sqrt{5}}{2}(x+t))] + \\ & Ic_2[\frac{1}{2}\sinh(\frac{\sqrt{5}}{2}(x+t)) - \frac{\sqrt{5}}{2}\cosh(\frac{\sqrt{5}}{2}(x+t))]\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 = {} & c_3[\frac{1}{2}\cosh(\frac{\sqrt{5}}{2}(x+t)) - \frac{\sqrt{5}}{2}\sinh(\frac{\sqrt{5}}{2}(x+t))] + \\ & Ic_4[\frac{\sqrt{5}}{2}\cosh(\frac{\sqrt{5}}{2}(x+t)) - \frac{1}{2}\sinh(\frac{\sqrt{5}}{2}(x+t))]\end{aligned} \tag{25}$$

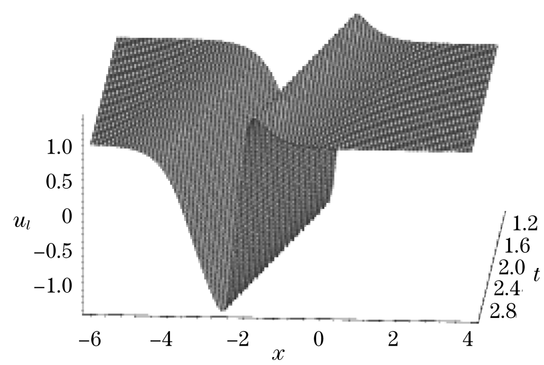
其中，c_1，c_2，c_3，c_4为任意常数. 将波函数及谱参数 $\lambda = \frac{1}{2}$代入式(14)～(15)并取定任意常数为

$$c_1 = 2, c_2 = -4, c_3 = -1, c_4 = 3 \tag{26}$$

就得到耦合 mKdV 系统的一复值的非奇异正子解. 为了能更好地了解耦合 mKdV 系统正子解的解析结构，将复值解的实部和虚部完全分离开，给出了它们的具体图形(见图 1 和图 2)，这里省略了正子解复杂的表达式.



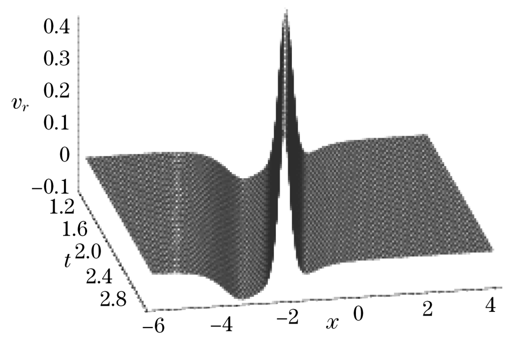
(a) 解u的实部u_r



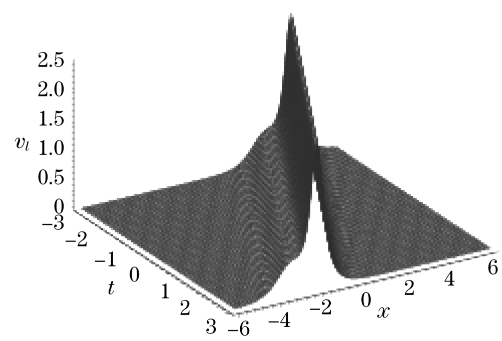
(b) 解u的虚部u_I

图 1　正子解 u 的实部与虚部

Fig.1　Positon solution of the real and imaginary parts for the field u



(a) 解v的实部v_r



(b) 解v的虚部v_I

图 2　正子解 v 的实部与虚部

Fig.2　Positon solution of the real and imaginary parts for the field v

2.2　负子解

类似上一小节的讨论,为了得到耦合 mKdV 系统的负子解,在式(18)中取 $\lambda=-1$,得到波函数为

$$\phi_1=c_3\cosh(2\sqrt{2}\,t-\sqrt{2}\,x)+Ic_4\sinh(2\sqrt{2}\,t-\sqrt{2}\,x) \tag{27}$$

$$\phi_2=c_1\cosh(2\sqrt{2}\,t-\sqrt{2}\,x)+Ic_2\sinh(2\sqrt{2}\,t-\sqrt{2}\,x) \tag{28}$$

$$\varphi_1=c_1[\cosh(2\sqrt{2}\,t-\sqrt{2}\,x)-\sqrt{2}\sinh(2\sqrt{2}\,t-\sqrt{2}\,x)]-Ic_2[\sqrt{2}\cosh(2\sqrt{2}\,t-\sqrt{2}\,x)-\sinh(2\sqrt{2}\,t-\sqrt{2}\,x)] \tag{29}$$

$$\varphi_2=c_3[\sqrt{2}\sinh(2\sqrt{2}\,t-\sqrt{2}\,x)-\cosh(2\sqrt{2}\,t-\sqrt{2}\,x)]+Ic_4[\sqrt{2}\cosh(2\sqrt{2}\,t-\sqrt{2}\,x)-\sinh(2\sqrt{2}\,t-\sqrt{2}\,x)] \tag{30}$$

同样将波函数式(27)~(30)及普参数 $\lambda=-1$ 代入式(14),取定式(26)的常数,就得到耦合 mKdV 系统的一种负子解.这里省略其复杂的具体表达式,仅给出该负子解的关于势函数 u 的详细结构图形,类似可以求得势函数 v 的负子解的表达式(见下页图 3).

2.3　复子解

由前面可知,非线性系统的复子解对应于其 Lax 对中复值的谱参数.因此,为了得到耦合 mKdV 系统的复子解,只要在式(18)~(21)中取定 $\lambda=3I$ 以及常数

$$c_1=1,c_2=-2,c_3=3,c_4=4 \tag{31}$$

得到波函数为

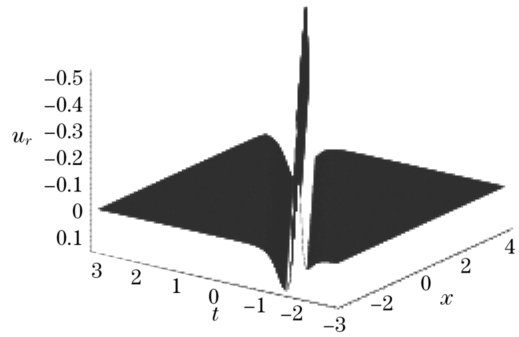
$$\phi_1=3\cos(76\sqrt{2}\,t+2\sqrt{2}\,x)-4\sin(76\sqrt{2}\,t+2\sqrt{2}\,x) \tag{32}$$

$$\phi_2=\cos(76\sqrt{2}\,t+2\sqrt{2}\,x)+2\sin(76\sqrt{2}\,t+2\sqrt{2}\,x) \tag{33}$$

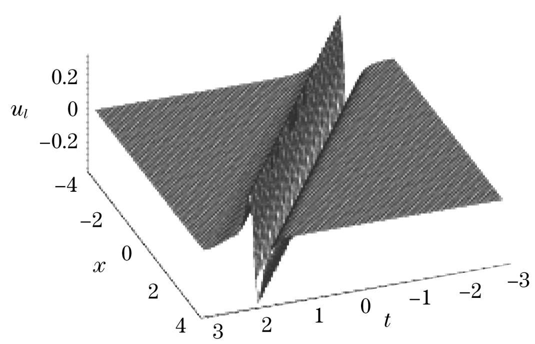
$$\varphi_1=2\sqrt{2}[2\cos(76\sqrt{2}\,t+2\sqrt{2}\,x)-\sin(76\sqrt{2}\,t+2\sqrt{2}\,x)]-3I[2\sin(76\sqrt{2}\,t+2\sqrt{2}\,x)+\cos(76\sqrt{2}\,t+2\sqrt{2}\,x)] \tag{34}$$

$$\varphi_2=2\sqrt{2}[3\sin(76\sqrt{2}\,t+2\sqrt{2}\,x)+4\cos(76\sqrt{2}\,t+2\sqrt{2}\,x)]+3I[3\cos(76\sqrt{2}\,t+2\sqrt{2}\,x)-4\sin(76\sqrt{2}\,t+2\sqrt{2}\,x)] \tag{35}$$

将上式代入耦合mKdV系统的达布变换——式(14)~(15),就得到了耦合 mKdV 系统复值的非奇异复子解.把实部和虚部分离开后,发现该复子解可以看作是一种周期波解,具体结构见下页图 4 与图 5.



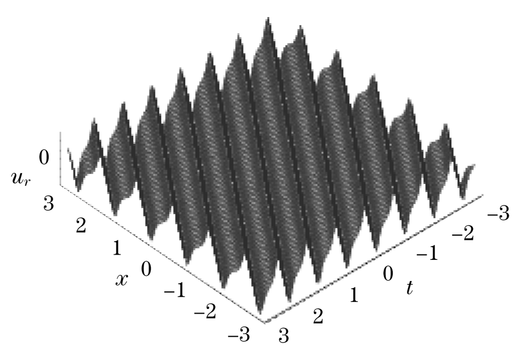
(a) 解u的实部u_r



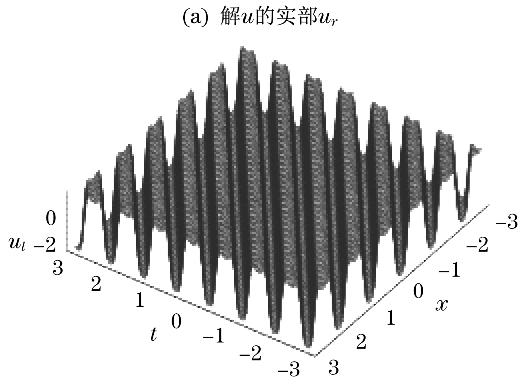
(b) 解u的虚部u_l

图 3　负子解 u 的实部与虚部

Fig.3　Negaton solution of the real and imaginary parts for the field u



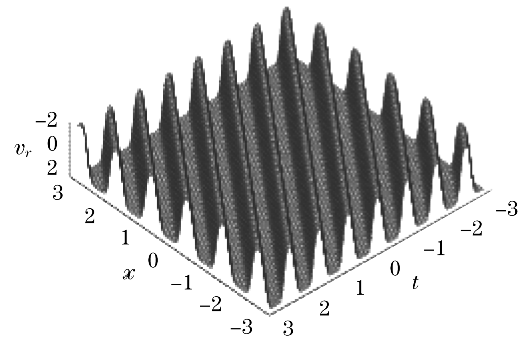
(a) 解u的实部u_r



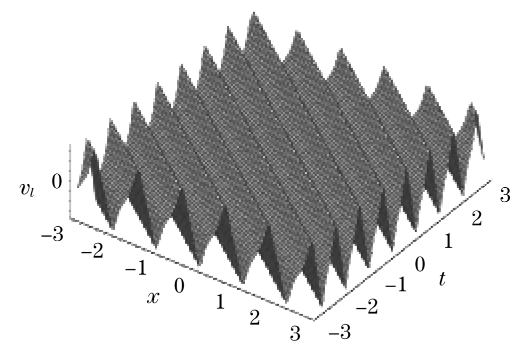
(b) 解u的虚部u_l

图 4　复子解 u 的实部与虚部

Fig.4　Complexiton solution of parts for the field u



(a) 解v的实部v_r



(b) 解v的虚部v_l

图 5　复子解 v 的实部与虚部

Fig.5　Complexiton solution of the real and imaginary parts for the field v

3　小结与讨论

本文利用耦合 mKdV 系统的达布变换，通过对其 Lax 对中谱参数的多种选择，构造了耦合 mKdV 系统非奇异的正子解、负子解和复子解，并且给出了这些解的具体结构图形. 所得到的耦合 mKdV 系统的正子解、负子解和复子解都是解析的，其中复子解可以看作是一种形式的周期波解. 另一方面，一般的 mKdV 方程可通过多种方法，如贝克隆变换法、Hirota 双线性形式法等得到多种形式的精确解. 然而，本文利用达布变换法给出了耦合 mKdV 系统的正子解、负子解及复子解，那么一个自然的问题就是如何通过其它方法，如对称约化、贝克隆变换法等来构造耦合 mKdV 系统的其它精确解. 在今后的工作中，将对耦合 mKdV 系统的其它可积性质作更深入的研究.

参考文献：

[1] 张卫国，安俊英，滕晓燕. 广义 KDV 方程的准确周期解及相关结论[J]. 上海理工大学学报，2005，27(1)：1－5.

（下转第 87 页）