

文章编号:1007-6735(2012)02-0118-20

独树一帜的统计物理理论——子动力学

毕 桥¹, 方锦清², 刘 杰¹

(1. 武汉理工大学 理学院, 武汉 430070; 2. 中国原子能科学研究院 核技术应用研究所, 北京 102413)

摘要: 介绍了子动力学基本思想, 描述了子动力学基本框架与复谱的意义, 并提出了相似网络的模型及扩张空间技术在反量子信息密码传输中的应用.

关键词: 子动力学; 非平衡统计物理; 复谱分解; 相似网络; 扩张空间

中图分类号: O 414.2 **文献标志码:** A

Subdynamics—Peculiar Branch of Statistical Physics Theory

BI Qiao¹, FANG Jin-qing², LIU Jie¹

(1. Science School, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China

2. Application of Nuclear Technology Research Institute, China Institute of Atomic Energy, Beijing 102413, China)

Abstract: The basic idea of subdynamics was briefly introduced; the basic frame of subdynamics and the meaning of complex spectrum decomposition were described. A similar network model was proposed as well and the application of expanding space technique in the anti-encryption transmission of quantum information was presented.

Key words: subdynamics; non-equilibrium statistical physics; complex spectral decomposition; similar network; expansion space

吉布斯建立的平衡态统计物理系综理论是统计物理发展史上的一个重要里程碑. 对于能量和粒子数固定的孤立系统, 采用微正则系综; 对于可以和大热源交换能量但粒子数固定的系统, 采用正则系综; 对于可以和大热源交换能量和粒子的系统, 采用巨正则系综. 平衡态系综理论取得了巨大的成功, 成为现代物理的重要基础之一.

非平衡态分布函数及其演化方程的建立, 不仅成为输运过程微观统计理论的基础, 而且由它定义的 H 函数及其遵循的 H 定理对理解宏观过程的不

可逆性及趋于平衡的过程起过重要作用. 熵增加原理的微观统计解释表明, 统计理论已从平衡态向非平衡态发展, 已经从对某些宏观概念和规律的微观统计解释发展到对热力学第二定律这样的普遍规律作出微观统计解释, 在对离平衡不太远以及平衡态附近的非平衡过程现象的研究中, 取得了许多有意义的结果. 但是, 迄今非平衡态统计物理还远未达到成为一门成熟的学科的水准, 还在继续发展和完善之中^[1].

20 世纪 60 年代以后国际上出现了著名的新三

收稿日期: 2012-02-13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61174151); 中国原子能科学研究院院长基金资助项目(2011-20).

作者简介: 毕 桥(1957-), 男, 教授. 研究方向: 非平衡统计物理, 包括量子网络、量子信息. Email: biqiao@gmail.com

论:耗散结构理论、协同学和突变论. 1969年,以比利时普利高津为首的布鲁塞尔学派,研究远离平衡状态开放系统时提出非平衡热力学和统计物理学中的耗散结构理论,用来研究远离平衡态的开放系统从无序到有序的演化规律. 1973年以后,原西德理论物理学家赫尔曼·哈肯发现不同系统之间共同存在着同一系统的要素之间的协同现象,创立了协同论. 1972年法国数学家 René Thom 提出突变论:《结构稳定性和形态发生学》^[2]. 在自然界和人类社会活动中,除了渐变的和连续光滑的变化现象外,还存在着大量的突变和跃迁现象,如地震、海啸、战争及经济危机等. 突变论可用来认识和预测复杂系统/复杂网络的突发性行为.

之后,非线性科学及其混沌理论、复杂性科学的兴起,非常强劲地影响着当时的科学研究和发展,当然也为网络科学提供了极其重要的理论基础.

上述理论对非平衡统计物理的发展起到了很大的推动作用,这些理论方法与众多科学达到了广泛的交叉融合. 特别值得一提的是,比利时布鲁塞尔学派著名的统计物理学家普利高津创立了耗散结构理论,发现了远离平衡可以出现有序结构,提出了“非平衡是有序之源”的著名论断,用来研究远离平衡态的开放系统从无序到有序的演化规律.

耗散结构是普利高津于 1969 年在理论物理和生物学国际会议上提出的一个概念,指处在远离平衡态的复杂系统与外界进行能量、物质的交换下,通过自组织形成的一种新的有序结构. 这是普利高津学派 20 多年从事非平衡热力学和非平衡统计物理学研究的成果. 1971 年普利高津等人写成著作《结构、稳定和涨落的热力学理论》^[3],比较详细地阐明了耗散结构的热力学理论,并将它应用到流体力学、化学和生物学等方面,引起了人们的重视. 1971~1977 年耗散结构理论的研究有了进一步的发展,这包括用非线性数学对分岔的讨论,从随机过程的角度说明涨落和耗散结构的联系,以及耗散结构在化学和生物学等方面的应用. 1977 年普利高津等人所著《非平衡系统中的自组织》一书就是这些成果的总结^[4].

1977 年普利高津由于耗散结构理论的贡献而获得诺贝尔化学奖,在众多热誉的时候,普利高津却陷入沉思:基本的动力学方程,牛顿、薛定谔、爱因斯坦方程,包括被称为统计物理的基本方程, Liouville (Schrödinger) 方程,都是时间可逆的,正时间和负时间带入所得的结果是一样的,表现出它的演化算

子是么正的;另一方面,热力学第二定律指出,对于一个孤立系统,其内部熵绝不会减少,似乎定义了一个时间方向之矢,即 $\Delta S \geq 0$, S 为熵. 这一时间演化悖论告诉我们,仅仅靠现有的动力学方程不能解释万事万物的演化,这就是不可逆性佯谬. 因而在建立非平衡态统计物理理论时,首先面临的难题就是不可逆性佯谬,它表现在微观动力学是可逆的而宏观统计热力学过程却是不可逆的. 这个矛盾自波尔兹曼 (1844—1906) 以来一直困扰着很多物理学家. 最关键的问题之一就是 Liouville 方程能不能描述非平衡不可逆过程,如果不能,那么如何推广它成为描述平衡态和非平衡态的统一基本方程.

还有一种流传的观点,认为“量子力学是描述单个粒子运动的方程,同热现象无关,所以不存在量子力学同热力学第二定律的矛盾”. 事实上,量子力学不仅仅是描述单个粒子运动的方程,也可以利用波函数张量积的形式来描述量子多粒子体系;量子 Liouville 方程也是对密度算子求导并利用 Schrödinger 方程而得出的,从而与热现象发生关系. 所以,基本问题还是在量子力学的 Schrödinger 方程上.

于是人们自然要探索不可逆性佯谬的起源究竟是什么,又如何把已知平衡态统计理论推广到(远离平衡)非平衡态领域, 150 多年以来,许多研究围绕这些问题中的部分进行了新探索,力图发现非平衡统计物理的基本方程和理论框架. 前辈们已经做了许多优秀的工作,这里略举 3 例. 加拿大的 Chan Eu 就提出了广义波尔兹曼动理方程,并由此建立了一套非平衡系综理论;德国的 Zubarev 也提出了推广的 Liouville 方程,并构造了相应的非平衡系综理论;我国的邢修三也提出了刘维扩散方程作为非平衡统计力学的基本方程,并预言了熵扩散的存在.

但是,要获得普适的、大家都接受的平衡态、非平衡态统计物理基本方程仍然非常困难. Liouville 方程后面新项的添加,要同各种经典和量子的复杂系统相协调,在 150 年来众多努力还不能说成功之后,渐渐地变成好像是一个天方夜谭的要求.

历史上以普利高津为首的布鲁塞尔学派早就洞察不可逆性佯谬的矛盾,一直力图延拓 Liouville 方程来建立非平衡态统计物理理论. 早在 1970 年左右普利高津与合作者乔治就建立了子动力学的初步框架. 1975 年布鲁塞尔学派的代表人物之一 Balescu 发表了总结性的专著,对布鲁塞尔学派之前的工作进行了总结,在其著作非平衡统计部分中的主要理

论成果就是表述了子动力学. 之后经 80~90 年代一批数学物理学家在国际 Solvay 研究院的大力研究投入, 特别是在普利高津领导下的 Brussels-Austin 小组中的数学物理学家 Antoniou, Petrosky 和 Tasaki 对子动力学物理表述形式和数学空间基础进行了修正和发展, 试图发展和完善独树一帜的子动力学理论, 包括扩张函数空间的理论, 力图从量子统计的基础上来协调热力学第二定律同量子力学的矛盾. 1970~2003 年布鲁塞尔学派在完善和发展子动力学理论方面做了很多工作, 发表了不少于 800 篇文章涉及到利用子动力学理论求解、分析 Liouville 方程复本征谱的表达以及相联的 Hilbert 或 Liouville 空间扩张的理论. 子动力学是布鲁塞尔学派 90 年代后期的主要理论武器.

子动力学作为一种广义的统计物理投影算子理论在过去的十几年中取得了重要进展. 在混沌映射的演化算子谱分析方面, 在量子 Friedrichs 系统方面, 在大规模 Poincare 系统方面、Liouville 算子复本征谱的分析方面都取得了成功, 揭示了系统不可逆和复杂性的特性. 从 1997~2012 年, 多种子动力学基本算子方程已经得到了发展, 在子动力学基本方程上引进了投影格林函数, 考虑了非微扰求解方法. 子动力学和所发展的理论已成功应用于量子信息抗消相干、纳米系统有关传输特性、量子网络或纳米网络的构造和特性分析上, 子动力学的发展正方兴未艾.

为了简洁, 现从子动力学 93 年的版本开始介绍.

1 一般动力系统的子动力学

现介绍子动力学表述的一种新形式, 对任意线性算子描述的系统都适用而不仅仅是对 Hamiltonian 描述的系统合适, 所以, 它能够应用于各类(不显含时)的复杂系统或网络. 其次, 以往的子动力学的形式往往没有提出明确的或有效的计算产生和消灭算符的公式, 进而造成在实际应用中的困难, 在新形式里已得到克服. 产生和消灭算符可以通过构造产生和消灭算符的基本公式来求解, 程序化也是可能的.

1.1 产生和消灭关联算符的引入

首先用一种简洁的形式引入产生和消灭关联算符 C, D , 对在线性空间具有 2-形式的线性算符 L , 选择正交归一基 $|\varphi_\alpha\rangle, \langle\varphi_\alpha|$ 或双正交归一系 $|\tilde{\varphi}_\alpha\rangle, \langle\varphi_\alpha|$, 将算子 L 上展开为对角部分和非对角部分. 不失一般性, 用双正交归一系将 L 展为

$$L = L_0 + \lambda L_1 = \sum_{\alpha} \langle\varphi_\alpha| L |\tilde{\varphi}_\alpha\rangle |\tilde{\varphi}_\alpha\rangle \langle\varphi_\alpha| + \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \\ \alpha \neq \alpha'}} \langle\varphi_\alpha| L |\tilde{\varphi}_{\alpha'}\rangle |\tilde{\varphi}_\alpha\rangle \langle\varphi_{\alpha'}| \quad (1)$$

这里, λ 是相互作用的耦合系数, $\langle\varphi_\alpha| L |\tilde{\varphi}_\alpha\rangle = l_\alpha$, 所以, 对角部分的 L_0 可以用本征投影算符 P_v 表达

$$L_0 = \sum_v l_v P_v \quad (2)$$

$$P_v = \sum_v |\tilde{\varphi}_v\rangle \langle\varphi_v|, \quad Q_v = I - P_v \quad (3)$$

非对角部分为

$$L_1 = \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \\ \alpha \neq \alpha'}} \langle\varphi_\alpha| L |\tilde{\varphi}_{\alpha'}\rangle \langle\tilde{\varphi}_\alpha| \langle\varphi_{\alpha'}| \quad (4)$$

通过引入广义投影算子(可以是非厄米的) Π_v

$$\Pi_v L = L \Pi_v, \quad (\text{对易性}) \quad (5)$$

$$\sum_v \Pi_v = I, \quad (\text{完备性}) \quad (6)$$

$$\Pi_v^2 = \Pi_v, \quad (\text{投影性}) \quad (7)$$

$$\Pi_v \Pi_{v'} = 0, \quad v \neq v', \quad (\text{正交性}) \quad (8)$$

$$\Pi_v \rightarrow P_v, \quad \lambda \rightarrow 0, \quad (\text{解析性}) \quad (9)$$

可直接定义产生(关联)和消灭(关联)算子为

$$Q_v \Pi_v = C_v P_v \Pi_v \quad (10)$$

$$\Pi_v Q_v = \Pi_v P_v D_v \quad (11)$$

即算子 C_v 为从算子 Π_v 的 Q_v 部分产生 P_v 部分, 算子 D_v 消灭其右边的部分并产生 P_v 部分.

根据以上定义, 由 Liouville 方程, $\partial_t \rho = -iL\rho$,

$\frac{\partial}{\partial t} \equiv \partial_t$, 这里, ρ 在经典系统定义为密度分布函数,

在量子系统为密度算子, 就可获得子动力学基本方程(SKE).

$$\begin{aligned} \partial_t P_v \Pi_v \rho &= -i P_v L \Pi_v \rho = P_v \Pi_v \partial_t \rho = -i P_v \Pi_v L \rho = \\ &= -i (P_v L P_v \Pi_v \rho + P_v L Q_v \Pi_v \rho) = \\ &= -i (P_v L P_v \Pi_v \rho + P_v L C_v P_v \Pi_v \rho) = \\ &= -i (P_v L P_v + P_v L C_v P_v) P_v \Pi_v \rho = \\ &= -i \Theta_v P_v \Pi_v \rho \end{aligned} \quad (12)$$

这里定义中介算子为

$$\Theta_v \equiv P_v L P_v + P_v L C_v P_v \quad (13)$$

SKE 再一次显示投影密度算符 $P_v \Pi_v \rho$ 随时间独立地演化, 是一个在 Liouville 空间上的投影关联态, 遵循由中介算子确定的子动力学的法则. 由于中介算子可以是非厄米的, 所以, 此 SKE 可能有复本征值解. 由此表示系统在这一子空间是可以不可逆的. 需要指出的是, 对于开放体系, 这一关联态 $P_v \Pi_v \rho$ 就包括了系统和环境的相互作用, 所反映的可以是马尔可夫、非马尔可夫或更一般的不可逆过程, 它不可以简单地通过求迹运算来消掉环境的影

响而获得.这也许是长期用求迹运算构造约化密度分布来建立各种主方程或动力学方程不能真正解决远离平衡开放系统不可逆问题的原因.

进一步,对方程 SKE 两边求和,得到总体 SKE 方程

$$\partial_t \sum_{\nu} P_{\nu} \Pi_{\nu} \rho = -i \sum_{\nu} P_{\nu} L \Pi_{\nu} \rho = -i \sum_{\nu} P_{\nu} L P_{\nu} + P_{\nu} L C_{\nu} P_{\nu}) P_{\nu} \Pi_{\nu} = -i \sum_{\nu} \Theta_{\nu} P_{\nu} \Pi_{\nu} \rho$$

即得到

$$i \frac{\partial \rho_{\text{proj}}}{\partial t} = \Theta \rho_{\text{proj}}$$

其中, $\rho_{\text{proj}} = \sum_{\nu} P_{\nu} \Pi_{\nu} \rho$, $\Theta = \sum_{\nu} \Theta_{\nu}$. 总体 SKE 的广义谱分解式可通过一个非么正变换转化为原 Liouville 方程的广义谱分解式.

另一个有趣的问题是 Π_{ν} 是什么,首先由定义式(10)和式(11)可以导出 $P_{\nu} \Pi_{\nu} P_{\nu}$ 的一般表达式. Π_{ν} 的精确表达式为

$$\Pi_{\nu} = (P_{\nu} + C_{\nu})(P_{\nu} + D_{\nu} C_{\nu})^{-1}(P_{\nu} + D_{\nu}) \quad (14)$$

进一步,从定义式(10)和式(11)可得

$$Q_{\nu} C_{\nu} P_{\nu} = C_{\nu} \quad (15)$$

$$P_{\nu} D_{\nu} Q_{\nu} = D_{\nu} \quad (16)$$

说明产生关联算符和消灭关联算符也是某种类型的投影算符,这是要注意的,因为它们的逆算符可能不存在.事实上,由

$$Q_{\nu} \Pi_{\nu} = C_{\nu} P_{\nu} \Pi_{\nu} = Q_{\nu} C_{\nu} P_{\nu} \Pi_{\nu}$$

可得

$$C_{\nu} P_{\nu} \Pi_{\nu} = Q_{\nu} C_{\nu} P_{\nu} \Pi_{\nu} \\ C_{\nu} P_{\nu} \Pi_{\nu} P_{\nu} = Q_{\nu} C_{\nu} P_{\nu} \Pi_{\nu} P_{\nu}$$

所以

$$C_{\nu} = Q_{\nu} C_{\nu} P_{\nu}$$

同理,可证式(16),说明它们的投影性.

从式(14)可以看出, Π_{ν} 的精确表达式同产生和消灭算符密切相关.由于 P_{ν} 和 Q_{ν} 算符已知,在这种意义上可以说子动力学的基本问题是确定产生和消灭算符 C_{ν} 或 D_{ν} ,那么,有没有 C_{ν} 或 D_{ν} 的基本方程存在呢,下面将重点讨论这一问题.

1.2 产生和消灭算子的基本算子方程

实际上,根据式(5)有

$$L \Pi_{\nu} = \Pi_{\nu} L \\ L \Pi_{\nu} P_{\nu} = \Pi_{\nu} L P_{\nu} = (P_{\nu} + C_{\nu}) P_{\nu} \Pi_{\nu} L P_{\nu} = \\ (P_{\nu} + C_{\nu}) P_{\nu} L \Pi_{\nu} P_{\nu} = \\ (P_{\nu} + C_{\nu}) P_{\nu} L (P_{\nu} + C_{\nu}) P_{\nu} \Pi_{\nu} P_{\nu} \quad (17)$$

因为

$$\Pi_{\nu} P_{\nu} = (P_{\nu} + C_{\nu}) P_{\nu} \Pi_{\nu} P_{\nu}$$

$$L (P_{\nu} + C_{\nu}) P_{\nu} \Pi_{\nu} P_{\nu} = \\ (P_{\nu} + C_{\nu}) P_{\nu} L (P_{\nu} + C_{\nu}) P_{\nu} \Pi_{\nu} P_{\nu} \quad (18)$$

应用 $(P_{\nu} \Pi_{\nu} P_{\nu})^{-1}$,得

$$L (P_{\nu} + C_{\nu}) = (P_{\nu} + C_{\nu}) P_{\nu} L (P_{\nu} + C_{\nu}) \quad (19)$$

用 Q_{ν} 作用于式(19)两边,得

$$Q_{\nu} L P_{\nu} + Q_{\nu} L Q_{\nu} C_{\nu} = C_{\nu} P_{\nu} L P_{\nu} + \\ C_{\nu} P_{\nu} L P_{\nu} C_{\nu} \quad (20)$$

同理,可得

$$D_{\nu} Q_{\nu} L Q_{\nu} - P_{\nu} L P_{\nu} D_{\nu} = \\ C_{\nu} Q_{\nu} L P_{\nu} D_{\nu} - P_{\nu} L Q_{\nu} \quad (21)$$

这里注意

$$L_0 C_{\nu} = 0, \lambda C_{\nu} L_1 P_{\nu} = 0 \quad (22)$$

$$D_{\nu} L_0 = 0, \lambda P_{\nu} L_1 D_{\nu} = 0 \quad (23)$$

式(20)和式(21)给出基本算子方程

$$[L_0, C_{\nu}] = \lambda (C_{\nu} - Q_{\nu}) L_1 (P_{\nu} + C_{\nu}) \quad (24)$$

$$[L_0, D_{\nu}] = \lambda (P_{\nu} + D_{\nu}) L_1 (Q_{\nu} - D_{\nu}) \quad (25)$$

解方程(24)和方程(25),得 $P_{\nu} C_{\nu}$ 和 $D_{\nu} P_{\nu}$ 所满足的方程为

$$[L_0, P_{\nu} C_{\nu}] = \lambda (P_{\nu} C_{\nu} - P_{\nu}) L_1 (P_{\nu} + C_{\nu}) \quad (26)$$

$$[L_0, D_{\nu} P_{\nu}] = \lambda (P_{\nu} + D_{\nu}) L_1 (P_{\nu} - D_{\nu} P_{\nu}) \quad (27)$$

因为, $L_0 P_{\nu} = l_{\nu} P_{\nu}$, 方程(26)和方程(27)变为

$$(l_{\nu} - l_{\nu}) P_{\nu} C_{\nu} = \\ \lambda (P_{\nu} C_{\nu} - P_{\nu}) L_1 (P_{\nu} + C_{\nu}) \quad (28)$$

$$(l_{\nu} - l_{\nu}) D_{\nu} P_{\nu} = \\ \lambda (P_{\nu} + D_{\nu}) L_1 (P_{\nu} - D_{\nu} P_{\nu}) \quad (29)$$

所以,得到计算 C_{ν} 和 D_{ν} 矩阵元的公式为

$$P_{\nu} C_{\nu} = \\ \frac{1}{l_{\nu} - l_{\nu} \pm i\epsilon} \lambda (P_{\nu} C_{\nu} - P_{\nu}) L_1 (P_{\nu} + C_{\nu}) \quad (30)$$

$$D_{\nu} P_{\nu} = \\ \frac{1}{l_{\nu} - l_{\nu} \pm i\epsilon} \lambda (P_{\nu} + D_{\nu}) L_1 (P_{\nu} - D_{\nu} P_{\nu}) \quad (31)$$

这里, ϵ 符号的选取对应于一种编时法则,法则允许在解基本非线性算子方程(24)和方程(25)时,所获得 C_{ν} 和 D_{ν} 的矩阵元对应于关联朝“将来”增加、往“过去”减少.从数学上表达为:关联传播增大,可取超前积分解;关联传播减少,可取滞后积分解.

1.3 编时法则

对于算子方程

$$[L_0, X] = Y \quad (32)$$

有超前或滞后解为

$$X^{\pm} = i \int_0^{\pm\infty} dt e^{-iL_0 t} Y e^{+iL_0 t} \quad (33)$$

所以,方程(30)和方程(31)的解可表为

$$P_m C_n = i \int_0^{\pm\infty} dt e^{-iL_0 t} \lambda (P_m C_n - P_m) \cdot$$

$$L_1(P_n + C_n) e^{iL_0 t}, \quad \begin{matrix} m > n \\ m < n \end{matrix} \quad (34)$$

$$D_n P_m = i \int_0^{\pm\infty} dt e^{-iL_0 t} \lambda (P_n D_n - D_n) \cdot$$

$$L_1(P_m + D_n P_m) e^{iL_0 t}, \quad \begin{matrix} n > m \\ n < m \end{matrix} \quad (35)$$

这里, $P_m C_n$ 和 $D_n P_m$ 的下标显示它们分别是 n 相关态传播到 m 相关态和从 m 相关态传播到 n 相关态. 为此, 已启用了编时法则来对应于超前和滞后积分. 对于 P_n 和 P_m 相关空间中 L_0 的本征矢量 $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$, 有

$$\langle \alpha | C_n | \beta \rangle = \frac{\lambda}{l_\alpha - l_\beta + i\epsilon_{\alpha\beta}} \cdot$$

$$\langle \alpha | (C_n - Q_n) L_1 (P_n + C_n) | \beta \rangle \quad (36)$$

$$\langle \beta | C_n | \alpha \rangle = \frac{\lambda}{l_\beta - l_\alpha + i\epsilon_{\beta\alpha}} \cdot$$

$$\langle \beta | (P_n - D_n) L_1 (Q_n - D_n) | \alpha \rangle \quad (37)$$

这里

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{cases} -\epsilon, & d_\alpha > d_\beta \\ +\epsilon, & d_\alpha < d_\beta \end{cases} \quad (38)$$

其中, d 定义为参考本征投影算子的关联度, 它是 Liouville 算子相互作用部分联系参考本征投影算子和本征投影算子的最小幕数, 这里参考本征投影算子对应的本征值为 $0^{[5-7]}$.

由于式(15)和式(16)

$$C_n = Q_n C_n P_n, \quad D_n = P_n D_n Q_n$$

成立, 所以, 对于产生关联和消灭关联算子来说, 相等关联传播的情况是不存在的.

方程(30)和方程(31)加上时间编时边界条件式(34)~(38)可通过起始设 $C_v^{[0]} = D_v^{[0]} = 0$ 来迭代求解.

1.4 中介算子和非么正相似关系

子动力学最重要的发现是中介算子

$$\left. \begin{aligned} \Theta_v &= P_v L P_v + P_v L C_v \\ \tilde{\Theta}_v &= P_v L P_v + D_v L P_v \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

同一般线性算子的非么正相似关系, 在算子不显含时的情况下, 中介算子同待求线性算子满足的非么正相似关系为

$$L(P_v + C_v) = (P_v + C_v) \Theta_v \quad (40)$$

$$(P_v + D_v) L = \tilde{\Theta}_v (P_v + D_v) \quad (41)$$

利用这两个非么正相似关系, 求解线性算子 $\Theta = \sum_v \Theta_v$ 或 $\tilde{\Theta} = \sum_v \tilde{\Theta}_v$ 的本征值问题. 而在许多情

况下, 中介算子的本征值问题可能比待求算子的本征值问题容易些. 式(40)和式(41)是可以证明的. 这里要说明的一点是, 待求算子可以是一般线性算子, 并不一定要求是 Hamiltonian 或 Liouvillian. 这一特征可以应用于求解随机微分方程和偏微分方程, 例如, Fokker-Planck 类型的方程、Smoluchowski 类型的方程, 等等, 只要方程所对应的微分算子是线性的.

1.5 本征谱的分解

非么正相似关系式(40)和式(41)是用子动力学构造待求算符 L 本征谱分解的出发点. 算符 L 同 Θ 和 $\tilde{\Theta}$ 具有相同的谱结构. 由中介算子 Θ 及 $\tilde{\Theta}$ 的本征谱的分解, 及通过相似算子 $\Omega, \tilde{\Omega}$, 就可以确定算子 L 的本征谱的结构. 一般来说, 算子 Θ 及 $\tilde{\Theta}$ 可以是非自厄米算子.

构造算子 L 的本征谱的分解需以下步骤, 这些步骤不仅非常实用, 而且对任意线性算子都有效成立. 步骤如下:

a. 选取任意适当的系 $(|\varphi_v\rangle, \langle\tilde{\varphi}_v|)$, 将算子 L 展为对角部分 L_0 和非对角部分 L_1 .

b. 从方程(36)和方程(37)计算产生关联算子 C_v 和消灭关联算子 D_v 关于 $(|\varphi_v\rangle, \langle\tilde{\varphi}_v|)$ 的矩阵元.

c. 选择 Θ 和 $\tilde{\Theta}$ 为中介算子, 在每一 P_v 子空间中求解其本征值问题, 构造 Θ 及 $\tilde{\Theta}$ 的谱的分解.

d. 通过相似算子 Ω 或 $\tilde{\Omega}$ 从 Θ 或 $\tilde{\Theta}$ 算子谱的分解表达式求得 L 的本征谱的分解表达式.

这一方法的重要性是将求解 L 本征值的问题转化为求解 P_v 可分解中介算子 Θ 或 $\tilde{\Theta}$ 的本征值问题, 而在许多情况下, 因为投影降低了维数, 中介算子本征值问题的求解要比 L 本征值问题的直接求解容易些.

通常中介算子的谱结构可分为如下两种:

a. Θ 具有简单或简并本征谱, Θ 为对角化算子, 即

$$\Theta = \sum_{\nu\alpha} Z_{\nu\alpha} |u_{\nu\alpha}\rangle \langle \tilde{u}_{\nu\alpha}| \quad (42)$$

如果 Θ 具有简单本征谱 (即本征值同本征矢一一对应), $Z_{\nu\alpha} \neq Z_{\nu\beta}$, $\alpha \neq \beta$, 那么, 其左、右本征矢在 P_v 子空间 (注意 ν 标记子空间) 形成了一个完备的双正交归一系, 即

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\alpha} |u_{\nu\alpha}\rangle \langle \tilde{u}_{\nu\alpha}| &= P_v \\ \langle \tilde{u}_{\nu\alpha} | u_{\nu\alpha} \rangle &= \delta_{\alpha\beta} \delta_{\nu\mu} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

那么,由非么正相似变换关系, L 的本征谱的分解可表达为

$$L = \Omega \Theta \Omega^{-1} = \left(\sum_{\nu} \Omega_{\nu} \right) \left(\sum_{\nu \alpha} Z_{\nu \alpha} |u_{\nu \alpha}\rangle \langle \tilde{u}_{\nu \alpha}| \right) \cdot \left(\sum_{\nu} \Omega_{\nu}^{-1} \right) = \sum_{\nu \alpha} Z_{\nu \alpha} \Omega_{\nu} |u_{\nu \alpha}\rangle \langle \tilde{u}_{\nu \alpha}| \Omega_{\nu}^{-1} = \sum_{\nu \alpha} Z_{\nu \alpha} (P_{\nu} + C_{\nu}) |u_{\nu \alpha}\rangle \langle \tilde{u}_{\nu \alpha}| (P_{\nu} + D_{\nu} C_{\nu})^{-1} \cdot (P_{\nu} + D_{\nu}) = \sum_{\nu \alpha} Z_{\nu \alpha} |f_{\nu \alpha}\rangle \langle \tilde{f}_{\nu \alpha}| \quad (44)$$

这里,右本征矢为

$$|f_{\nu \alpha}\rangle = \Omega_{\nu} |u_{\nu \alpha}\rangle = (P_{\nu} + C_{\nu}) |u_{\nu \alpha}\rangle \quad (45)$$

左本征矢为

$$\langle \tilde{f}_{\nu \alpha}| = \langle \tilde{u}_{\nu \alpha}| \Omega_{\nu}^{-1} = \langle \tilde{u}_{\nu \alpha}| (P_{\nu} + D_{\nu} C_{\nu})^{-1} (P_{\nu} + D_{\nu}) \quad (46)$$

右、左本征矢的集合 $(|f_{\nu \alpha}\rangle, \langle \tilde{f}_{\nu \alpha}|)$ 形成一个完备的双正交归一系.

证明 完备性

$$\sum_{\nu \alpha} |f_{\nu \alpha}\rangle \langle \tilde{f}_{\nu \alpha}| = \sum_{\nu} (P_{\nu} + C_{\nu}) \sum_{\alpha} |u_{\nu \alpha}\rangle \langle \tilde{u}_{\nu \alpha}| \cdot (P_{\nu} + D_{\nu} C_{\nu})^{-1} (P_{\nu} + D_{\nu}) = \sum_{\nu} (P_{\nu} + C_{\nu}) P_{\nu} (P_{\nu} + D_{\nu} C_{\nu})^{-1} \cdot (P_{\nu} + D_{\nu}) = \sum_{\nu} \Pi_{\nu} = I \quad (47)$$

正交归一性

$$\langle \tilde{f}_{\nu \alpha} | f_{\mu \beta} \rangle = \langle \tilde{u}_{\nu \alpha} | (P_{\nu} + D_{\nu} C_{\nu})^{-1} (P_{\nu} + D_{\nu}) \cdot (P_{\mu} + C_{\mu}) |u_{\mu \beta}\rangle = \delta_{\nu \mu} \langle \tilde{u}_{\nu \alpha} | P_{\nu} |u_{\mu \beta}\rangle = \delta_{\alpha \beta} \delta_{\nu \mu} \quad (48)$$

这里,注意有关系

$$(P_{\nu} + D_{\nu})(P_{\mu} + C_{\mu}) = \delta_{\nu \mu} (P_{\nu} + D_{\nu} C_{\nu}) \quad (49)$$

b. 中介算子不可对角化,则有 Jordan 分解为

$$\Theta = \sum_{\nu} (\Theta_{\nu}^{\text{Diag}} + \Theta_{\nu}^{\text{Ws}}) = \sum_{\nu \alpha} \left\{ \sum_{j=1}^{m_{\nu \alpha}} Z_{\nu \alpha} |u_{\nu \alpha j}\rangle \langle \tilde{u}_{\nu \alpha j}| + \sum_{j=1}^{m_{\nu \alpha}-1} w_{\nu \alpha j} |u_{\nu \alpha(j+1)}\rangle \langle \tilde{u}_{\nu \alpha j}| \right\} \quad (50)$$

这里, $|u_{\nu \alpha j}\rangle$ 和 $\langle \tilde{u}_{\nu \alpha j}|$ 分别是右、左主矢量. $j = 1, 2, \dots, m_{\nu \alpha}$ 表示每一 Jordan 块的结构. 本征值 $Z_{\nu \alpha}$ 的简并度(即一个本征值对应多个本征矢,本征矢的个数称为简并度)可以是有限的或无限的. 复数 $Z_{\nu \alpha}$ 和 $w_{\nu \alpha j}$ 分别表示每一 Jordan 块 $[\nu \alpha]$ 的本征值和权重.

主矢量形成 P_{ν} 子空间的一个完备双正交归一系,即

$$\sum_{\alpha} \sum_{j=1}^{m_{\nu \alpha}} |u_{\nu \alpha j}\rangle \langle \tilde{u}_{\nu \alpha j}| = P_{\nu} \quad (51)$$

$$\langle \tilde{u}_{\nu \alpha j} | u_{\nu' \alpha' j'} \rangle = \delta_{\nu \nu'} \delta_{\alpha \alpha'} \delta_{jj'} \quad (52)$$

而 Θ 的矩阵表达式由以下 Jordan 块组成:

$$\begin{matrix} * & & * \\ & & * \\ & & * \end{matrix} \begin{matrix} Z_{\nu \alpha} & 0 & 0 \\ w_{\nu \alpha 1} & Z_{\nu \alpha} & 0 \\ 0 & w_{\nu \alpha 2} & Z_{\nu \alpha} \end{matrix} \begin{matrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{matrix} \quad (53)$$

如果

$$\Theta = \sum_{\nu \alpha} \left\{ \sum_{j=1}^{m_{\nu \alpha}} Z_{\nu \alpha} |u_{\nu \alpha j}\rangle \langle \tilde{u}_{\nu \alpha j}| + \sum_{j=1}^{m_{\nu \alpha}-1} w_{\nu \alpha j} |u_{\nu \alpha(j+1)}\rangle \langle \tilde{u}_{\nu \alpha(j+1)}| \right\} \quad (54)$$

则 Θ 的矩阵表达式由上 Jordan 块组成.

最后, L 谱分解的表达由相似算符 Ω 给出

$$L = \sum_{\nu \alpha} \left\{ \sum_{j=1}^{m_{\nu \alpha}} Z_{\nu \alpha} |f_{\nu \alpha j}\rangle \langle \tilde{f}_{\nu \alpha j}| + \sum_{j=1}^{m_{\nu \alpha}-1} w_{\nu \alpha j} |f_{\nu \alpha(j+1)}\rangle \langle \tilde{f}_{\nu \alpha j}| \right\} \quad (55)$$

这里

$$|f_{\nu \alpha j}\rangle = \Omega_{\nu} |u_{\nu \alpha j}\rangle = (P_{\nu} + C_{\nu}) |u_{\nu \alpha j}\rangle \quad (56)$$

$$\langle \tilde{f}_{\nu \alpha j}| = \langle \tilde{u}_{\nu \alpha j}| \Omega_{\nu}^{-1} = \langle \tilde{u}_{\nu \alpha j}| (P_{\nu} + D_{\nu} C_{\nu})^{-1} (P_{\nu} + D_{\nu}) \quad (57)$$

其中, $|f_{\nu \alpha j}\rangle$ 和 $\langle \tilde{f}_{\nu \alpha j}|$ 分别是 L 对本征值 $Z_{\nu \alpha}$ 的右、左主矢量,并且 $(|f_{\nu \alpha j}\rangle, \langle \tilde{f}_{\nu \alpha j}|)$ 形成了一个完备的双正交归一系.

1.6 三角算子

如果通过选择合适的双正交归一系 $(|\varphi_{\nu}\rangle, \langle \tilde{\varphi}_{\nu}|)$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$, 可以得到上三角矩阵为

$$\langle \tilde{\varphi}_{\nu} | L | \varphi_{\nu'} \rangle = \begin{cases} 0, & \nu > \nu' \\ L_{\nu \nu'}, & \nu \leq \nu' \end{cases} \quad (58)$$

那么,有下列结论:

a. 产生关联和消灭关联算子 C_{ν} 和 D_{ν} 也是上三角矩阵,并且没有对角部分.

b. 非线性基本算子方程(24)和方程(25)变为线性的,并具有 Lippmann-Schwinger 方程的形式

$$P_{\mu} C_{\nu} = \frac{1}{l_{\nu} - l_{\mu}} \lambda P_{\mu} L_1 (P_{\nu} + C_{\nu}) \quad (59)$$

$$D_{\nu} P_{\mu} = \frac{1}{l_{\nu} - l_{\mu}} \lambda (P_{\nu} + D_{\nu}) L_1 P_{\mu} \quad (60)$$

这里

$$P_\nu L_1 (P_\nu + C_\nu) = (P_\nu + D_\nu) L_1 P_\nu = 0 \quad (61)$$

c. 中介算子 Θ 及 $\tilde{\Theta}$ 等价于对角部分 L_0 , 即

$$\Theta = \tilde{\Theta} = L_0 = \sum_\nu l_\nu P_\nu \quad (62)$$

相似算子 Ω 和 $\tilde{\Omega}$ 应满足

$$\Omega = \sum_\nu (P_\nu + C_\nu) = \tilde{\Omega}^{-1} \quad (63)$$

$$\Omega^{-1} = \sum_\nu (P_\nu + D_\nu) = \tilde{\Omega} \quad (64)$$

这里注意

$$D_\nu C_\nu = 0$$

$$(P_\nu + D_\nu C_\nu) = (P_\nu + D_\nu C_\nu)^{-1} = P_\nu$$

d. 如果 L 是下三角算子, a—c 仍然成立.

以上 4 条性质可以证明如下:

a. 根据方程(20), 有

$$P_\mu C_\nu^{[1]} = -\frac{1}{l_\mu - l_\nu} \lambda P_\mu L_1 P_\nu$$

它是上三角的, 没有对角部分. 再设 $P_\mu C_\nu^{[k]}$, $k \geq 1$, 是上三角没有对角部分, 那么

$$P_\mu C_\nu^{[k+1]} = \frac{1}{l_\mu - l_\nu} \lambda (P_\mu C_\nu^{[k]} - P_\mu) \cdot L_1 (P_\nu + C_\nu^{[k]}) \quad (65)$$

是 3 个上三角且没有对角部分算子的乘积, 所以, $P_\mu C_\nu^{[k+1]}$ 也是上三角的, 且没有对角部分. 同理, 可证 D_ν 也是一个上三角且无对角部分的算子.

b. 因为

$$P_\nu L_1 (P_\nu + C_\nu) = P_\nu L_1 P_\nu + P_\nu L_1 C_\nu = 0 + \sum_{\nu'} P_\nu L_1 P_{\nu'} C_\nu = 0 \quad (66)$$

这里注意

$$P_\nu L_1 P_{\nu'} = 0, \nu \geq \nu' \text{ 和 } P_{\nu'} C_\nu = 0, \nu' \geq \nu$$

同理, 可证 $(P_\nu + D_\nu) L_1 P_\nu = 0$. 所以, 式(59)和式(21)成立, 这里注意 $\mu \neq \nu$.

c. 由中介算子定义式, 考虑式(66), 即可发现中介算子已对角化. 另外

$$D_\nu C_\nu = \sum_{\nu'} P_\nu D_\nu P_{\nu'} P_{\nu'} C_\nu P_\nu = 0$$

这里

$$P_\nu D_\nu P_{\nu'} = 0, \nu \geq \nu' \\ P_{\nu'} C_\nu P_\nu = 0, \nu' \geq \nu$$

所以, 式(63)和式(64)成立.

当我们即将结束对一般动力系统子动力学的讨论时, 不禁问自己一个深刻的问题, 我们引入的子动力学投影算子 Π_ν 和定义的产生和消灭关联算符 C_ν

和 D_ν 彼此间是协调的吗? 也就是说, 我们放心地使用 Π_ν 的表达式

$$\Pi_\nu = (P_\nu + C_\nu)(P_\nu + D_\nu C_\nu)^{-1}(P_\nu + D_\nu)$$

能保证 Π_ν 的性质式(5)~(9)成立吗? 回答是可以证明. 实际上, 从定义式(10)和式(11)出发, 考虑算子的基本方程(31)和方程(32), 是能够证明 Π_ν 满足性质式(5)~(9)的. 这里为了适应于大多数读者, 过度数学化的证明就省略从简了.

如前面所述, 无论是经典动力系统还是量子动力系统, 如果仅仅将演化算子谱的分解局限在 Hilbert 空间中是没有理由的, 也难以解释非线性动力系统可能出现的演化不可逆性. 基于这一原因, 子动力学往往将演化算符的作用空间扩张到 Hilbert 空间之外, 即所谓的 Rigged Hilbert 空间^[8-9]. 在 Rigged Hilbert 空间, 哪怕自轭算子也可能有复本征值, 对应的动力系统的演化是不可逆的. 什么是 Rigged Hilbert 空间, 又如何构造 Rigged Hilbert 空间, 下面引进定义和介绍方法.

2 扩张空间上的复谱意义

2.1 Rigged Hilbert 空间

Rigged Hilbert 空间是一个三连套的空间结构, 即 Hilbert 空间在中间, 左边是中间 Hilbert 空间的一个致密子空间, 右边是致密子空间的共轭空间.

$$\Phi \subset L^2 \subset \Phi^\times \quad (67)$$

构造 Rigged Hilbert 空间 L^2 的基本思想是通过选择一个合适的实验空间 Φ , 让连续的线性泛函 f 作用在实验空间的实验矢 ϕ 上, 以致

$$\Phi \subset L^2 \subset \Phi^\times$$

将算子 L 扩张到 Φ 的拓扑对偶空间 $\Phi^\times$ 上, 是通过

$$\langle L^\times f | \phi \rangle = \langle f | L \phi \rangle, \forall \phi \in \Phi, f \in \Phi^\times$$

完成的. 为保证这种扩张的存在性, 要求合适的实验空间 Φ 是封闭的.

$$L\Phi \subset \Phi$$

即实验空间 Φ 是稳定的. 这里使用了 Dirac 的记法, $|g\rangle$ (Kets) 记为实验空间 Φ 上的线性泛函, 而 $\langle g|$ (Bras) 记为 Φ 上逆线性泛函.

$$\langle g | c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 \rangle = c_1 \langle g | \phi_1 \rangle + c_2 \langle g | \phi_2 \rangle \quad (68)$$

$$\langle c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 | g \rangle = c_1 \langle \phi_1 | g \rangle + c_2^* \langle \phi_2 | g \rangle \quad (69)$$

这里, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $\phi_1, \phi_2 \in \Phi$. 泛函 $\langle g|$ 对于实验矢 $\phi \in \Phi$ 的值记为

$$\langle g | \phi \rangle = \langle \phi | g \rangle^*$$

Rigged Hilbert 空间算子 L 的本征值称为广义

本征值,算子 L 的本征矢称为广义本征矢. 算子 L 的谱分解称为广义谱分解. 对应于 L 广义本征值 z 的广义本征矢 f 定义为

$$L^\times |f\rangle = z|f\rangle \quad (70)$$

或

$$\langle L^\times f| = \langle zf| \quad (71)$$

或

$$\begin{aligned} \langle L^\times f | \phi \rangle &= \langle f | L \phi \rangle = z^* \langle f | \phi \rangle, \\ \forall \phi \in \Phi, f \in \Phi^\times \end{aligned} \quad (72)$$

算子 $L^\times$ 可能具有左本征矢, 对应本征值为 z , 而定义为 $L^\times$ 的对偶 L 的右本征矢对应于本征值 z 的共轭值 z^* , 即

$$\langle \tilde{f} | L^\times = z \langle \tilde{f} |$$

$$\langle L \tilde{f} | = \langle z^* \tilde{f} |$$

$$\langle \tilde{f} | L^\times \phi \rangle = z \langle \tilde{f} | \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \Phi$$

注意

$$L \neq L^\times$$

以上本征矢是很重要的, 这不仅是因为处理非自轭密算子的本征值的问题, 而且还因为自轭密算子在 Rigged Hilbert 空间允许复本征值及非平凡的左本征矢(即分布函数)存在.

选择合适的实验空间是构造 Rigged Hilbert 空间的关键之一. 为了保证本征矢集在有意义的物理空间中的完备性, 实验空间必须满足^[5-9]:

- a. Φ 必须是 Hilbert 空间 L^2 的致密子空间;
- b. Φ 必须对较强的拓扑是完备的;
- c. Φ 必须对 L 的作用是稳定的.

现通过在量子力学具体问题中构造一具体 Rigged Hilbert 空间来显示一般构造技术要素有哪些.

2.2 状态空间的代数结构

从处理最简单的物理模型, 一维谐振子开始. 设 H 为 Hamilton 算符, P 为动量算符, Q 为位置算符, 则有

$$H = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{m\omega^2}{2}Q^2$$

这里, $\langle A\phi | \psi \rangle = \langle \phi | A\psi \rangle^*$, $A = P, Q$ 或 H ; $\phi, \psi \in \Phi$, Φ 为线性空间.

定义

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}Q + \frac{i}{\sqrt{m\omega\hbar}}P \quad (73)$$

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}Q - \frac{i}{\sqrt{m\omega\hbar}}P$$

$$N = a^+ a = \frac{1}{\omega\hbar}H - \frac{1}{2}I$$

这些算子满足

$$\langle \phi | a\psi \rangle = \langle a^+ \phi | \psi \rangle, \quad \forall \phi, \psi \in \Phi \quad (74)$$

和

$$\langle \phi | N\psi \rangle = \langle N\phi | \psi \rangle, \quad \forall \phi, \psi \in \Phi \quad (75)$$

及

$$aa^+ - a^+a = I \quad (76)$$

设 N 的本征值问题为

$$N\phi_\lambda = \lambda \phi_\lambda \quad (77)$$

则

$$\begin{aligned} N(a\phi_\lambda) &= a^+ aa\phi_\lambda = (aa^+ - I)a\phi_\lambda = \\ &= a(aa^+ - I)\phi_\lambda = a(N - I)\phi_\lambda = \\ &= a(\lambda - 1)\phi_\lambda = (\lambda - 1)a\phi_\lambda \end{aligned} \quad (78)$$

即 $a\phi_\lambda$ 是 N 的本征矢, 对应的本征值为 $(\lambda - 1)$. 进一步, 由式(8)得

$$\begin{aligned} \|a^+ \phi_\lambda\|^2 &= \langle \phi_\lambda | a^+ a\phi_\lambda \rangle + \langle \phi_\lambda | I\phi_\lambda \rangle = \\ &= \|a\phi_\lambda\|^2 + \|\phi_\lambda\|^2 \neq 0, \text{ 如果 } \phi_\lambda \neq 0 \end{aligned} \quad (79)$$

因此

$$a^+ \phi_\lambda \neq 0 \quad (80)$$

再由式(76), 有

$$\begin{aligned} N(a^+ \phi_\lambda) &= a^+ a(a^+ \phi_\lambda) = \\ &= a^+ (I + a^+ a)\phi_\lambda = a^+ (I + N)\phi_\lambda = \\ &= a^+ (1 + \lambda)\phi_\lambda = (1 + \lambda)a^+ \phi_\lambda \end{aligned} \quad (81)$$

即 $a^+ \phi_\lambda$ 是 N 的本征矢, 其本征值为 $(\lambda + 1)$.

所以, $\phi_{\lambda-m} = a^m \phi_\lambda$, $m = 0, 1, 2, \dots$, 具有本征值 $(\lambda - m)$, 即

$$N\phi_{\lambda-m} = (\lambda - m)\phi_{\lambda-m} \quad (82)$$

且经过有限步骤后, 存在着一个 $\phi_{\lambda-m}$, 以致

$$a^m \phi_\lambda = 0 \quad (83)$$

证明 因为

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\lambda-m} | N\phi_{\lambda-m} \rangle &= \langle \phi_{\lambda-m} | (\lambda - m)\phi_{\lambda-m} \rangle = \\ &= \langle \phi_{\lambda-m} | a^+ a\phi_{\lambda-m} \rangle = \|a\phi_{\lambda-m}\|^2 \end{aligned} \quad (84)$$

所以

$$(\lambda - m) = \frac{\|a\phi_{\lambda-m}\|^2}{\|\phi_{\lambda-m}\|^2} \geq 0 \quad (85)$$

则存在一个 $\phi_{\lambda-m}$, $\lambda - m = 0$, 有

$$a\phi_{\lambda-m} = 0 \quad (86)$$

从而, $\phi_{\lambda-m} = 0$.

由此定义

$$\phi_0^0 = \frac{\phi_0}{\|\phi_0\|}, \quad \phi_0^0 = 0 \quad (87)$$

并根据以上所推结果, 构造下列正交归一本征矢 $\{\phi_n\}$ 的集合(为了简便, ϕ_0^0 仍记为 ϕ_0).

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 \\ \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1!}} a^+ \varphi_0 \\ \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2!}} (a^+)^2 \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n \varphi_0 \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

并满足性质

$$\text{a. } \|\varphi_n\| = 1; \quad (89)$$

$$\text{b. } N\varphi_n = n\varphi_n; \quad (90)$$

$$\text{c. } \langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{nm}; \quad (91)$$

d. $\forall \varphi_n, \exists \varphi_{n+1} \neq 0$, 有线性空间 Ψ 被 $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ 所张开

$$\Psi = \sum_{n=0}^N \alpha^{(n)} \varphi_n \quad (92)$$

这里, $\alpha^{(n)} \in C$, 定义由 φ_i 张开的子空间 R_i 为

$$R_i = \{\alpha \varphi_i | \alpha \in C\}$$

则

$$\Psi = \bigoplus_i^N R_i$$

这里, $\forall \varphi, \psi \in \Psi$, 有

$$\varphi + \psi = (\varphi_0 + \psi_0, \varphi_1 + \psi_1, \dots) \quad (93)$$

$$\alpha \psi = (\alpha \psi_0, \alpha \psi_1, \dots) \quad (94)$$

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \sum_{i=0}^N \langle \varphi_i | \psi_i \rangle \quad (95)$$

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{i=0}^N \langle \varphi_i | \varphi_i \rangle, \quad \varphi_i, \psi_i \in R_i \quad (96)$$

其中, Ψ 是一个无任何拓扑结构的线性空间. 下面在 Ψ 上构造其拓扑结构.

2.3 线性拓扑空间

为了在线性空间上构造合适的拓扑, 定义:

集合 Φ 是一线性拓扑空间, 如果 $\forall \varphi \in \Phi, \alpha \in C$, 则有

- a. 如果 $\varphi_n \rightarrow \varphi$, 那么 $\alpha \varphi_n \rightarrow \alpha \varphi$;
- b. 如果 $\alpha_n \rightarrow \alpha$, 则有 $\alpha_n \varphi \rightarrow \alpha \varphi$;
- c. $\forall \varphi, \psi \in \Phi$, 如果 $\varphi_n \rightarrow \varphi, \psi_n \rightarrow \psi$, 则有 $\varphi_n + \psi_n \rightarrow \varphi + \psi, \quad n = 1, 2, \dots$

由于线性空间收敛方式的不同可以导致不同的线性拓扑空间, 所有的拓扑性质, 像连续性、致密性、边界性、闭包性及完备性等都取决于收敛性的定义. 作为比较, 在 Ψ 上引入两类拓扑.

a. Hilbert 空间 τ_H 拓扑, 其定义为

$$\varphi_r \rightarrow \varphi, \quad \forall r \rightarrow \infty \Leftrightarrow \|\varphi_r - \varphi\| \rightarrow 0, \quad \forall r \rightarrow \infty \quad (97)$$

根据以上定义容易看出, Ψ 不是 τ_H 完备的. 这是因为它的柯西 (Cauchy) 序列不收敛. 为了弄清这一点, 考虑无穷序列 $h = (h_1, h_2, \dots, h_n, \dots), h_i \in R_i, h_i \neq 0, \forall i = 0, 1, \dots$, 并且

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|h_i\|^2 < \infty \quad (98)$$

则

$$\|h_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \|h_i\|^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (99)$$

可以断言, 这是无穷序列, h 不是 Ψ 中的元素.

事实上, 考虑序列

$$S_1, S_2, \dots, S_i \in \Psi$$

这里

$$S_n = (h_1, h_2, \dots, h_n, 0, 0, \dots)$$

因为

$$S_n - S_m = (0, 0, \dots, 0, h_{n+1}, h_{n+2}, \dots, h_m, 0, 0)$$

所以, 有

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\| &= \|h_{n+1} + h_{n+2} + \\ &\dots + h_m\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (100)$$

即 $\{S_n\}$ 是 Cauchy 序列.

又因为

$$\|S_n - h\| = \sum_{i=n+1}^{\infty} \|h_i\|^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

所以, S_n 的 τ_H 极限是 h , 但 $h \notin \Psi$. 但是, 如果取

$$\Psi \cup \{\text{所有 } \Psi \text{ 的极限点}\}$$

那么, 所并成的空间就是 Hilbert 空间 L^2 . 这样的 Hilbert 空间 L^2 是关于拓扑 τ_H 完备的, 即 $\forall h = (h_0, h_1, \dots), h_i \in R_i$

$$L^2 = \bigoplus_{i=0}^{\infty} R_i \quad (101)$$

b. 引入另一拓扑, 称为可数标量积拓扑 τ_Φ , 要对其定义则需首先定义标积

$$\langle \varphi | \psi \rangle_p = \langle \varphi | (N+1)^p \psi \rangle, \quad p=0, 1, 2, \dots \quad (102)$$

$$\|\varphi\|_p = \langle \varphi | \varphi \rangle_p$$

$$\|\varphi\|_0 \leq \|\varphi\|_1 \leq \|\varphi\|_2 \leq \dots$$

然后, 再定义拓扑 τ_Φ 为

$$\varphi_r \rightarrow \varphi \text{ 关于 } \tau_\Phi \Leftrightarrow \|\varphi_r - \varphi\|_p \rightarrow 0, \quad \forall p \quad (103)$$

十分明显, 从 $\varphi_r \rightarrow 0$ 关于 τ_Φ , 可推出 $\varphi_r \rightarrow 0$ 关于 τ_H , 但其逆不真, 所以, τ_Φ 的拓扑比 τ_H 的强些.

事实上, 由定义: 序列 $\{x_r\}$ 称为 τ_Φ 序列, 如果对于任意 p 和 $\epsilon > 0$, 存在一个 $N = N(\epsilon, p)$, 以致

$$\|x_r - x_\mu\|_p < \epsilon, \quad \text{对于任何 } \mu, r > N \quad (104)$$

可以看出, 由于 τ_Φ -Cauchy 序列仅当 $p=0$ 就可满足, 所以, τ_H 的极限点比 τ_Φ 的极限点多. 如果取

$\Psi \cup$ (所有关于 τ_Φ -Cauchy 序列的极限点)

为一完备空间,并记为 Φ , 则 $\Phi = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ (关于 τ_Φ 拓扑), 那么, $\Psi \subset \Phi$, Ψ 是 Φ 的 τ_Φ -致密子空间. Φ 称为可数 Hilbert 空间. 又因为 τ_H -Cauchy 序列比 τ_Φ -Cauchy 序列强些, 所以, 必有

$$\Psi \subset \Phi \subset L^2 \quad (105)$$

这样 Ψ 是 Φ 的 τ_Φ -致密子空间, Ψ 又是 L^2 的 τ_H -致密子空间, 因而 Φ 是 L^2 的 τ_H -致密子空间.

2.4 Φ 的对偶空间

根据定义式(68)和式(69), 作用在空间 Φ 上的逆线性泛函 F 为

$$F(\varphi) = \langle \varphi | F \rangle, \quad \varphi \in \Phi \quad (106)$$

并满足

$$\begin{aligned} F(\alpha\varphi + \beta\psi) &= \alpha^* F(\varphi) + \beta^* F(\psi) = \\ \langle \alpha\varphi + \beta\psi | F \rangle &= \alpha^* \langle \varphi | F \rangle + \beta^* \langle \psi | F \rangle, \\ \varphi &\in \Phi, \beta \in C \end{aligned} \quad (107)$$

泛函 F 称为 τ_Φ -连续的, 如果 $\varphi_r \rightarrow \varphi$, 关于 τ_Φ , 有

$$F(\varphi_r) \rightarrow F(\varphi), F(\varphi) \in C \text{ 或 } R \quad (108)$$

则可以证明 F 是 τ_Φ -连续的. 事实上, 因为, $\exists \zeta > 0, \zeta \in N$, 有

$$|F(\varphi)| < \zeta \|\varphi\|_p, \quad \forall \varphi \in \Phi \quad (109)$$

由式(107)当然有

$$(\alpha F_1 + \beta F_2)(\varphi) = \alpha F_1(\varphi) + \beta F_2(\varphi) \quad (110)$$

或

$$\langle \varphi | \alpha F_1 + \beta F_2 \rangle = \alpha \langle \varphi | F_1 \rangle + \beta \langle \varphi | F_2 \rangle \quad (111)$$

由式(111)可以看出, 线性空间 Φ 的逆线性泛函的集合仍是一个线性空间, 记由 τ_Φ -连续的线性泛函组成的集合为 $\Phi^\times$.

另一方面, 如果 $f \in L^2$, f 可定义为一个 Φ 上的逆线性泛函为

$$\langle \varphi | f \rangle \equiv \langle \varphi | F \rangle, \quad \varphi \in \Phi \quad (112)$$

由于 $\Phi \in L^2$, 若关于 τ_Φ 拓扑, $\varphi_r \rightarrow \varphi$, 则隐含着关于 τ_H 拓扑, $\varphi_r \rightarrow \varphi$. 又因为在 Hilbert 空间每一收敛序列也是弱收敛, 即 $\langle \varphi_r | f \rangle \rightarrow \langle \varphi | f \rangle$, $f \in L^2$, 所以, 如 F 定义为式(112), 则 $\langle \varphi_r | F \rangle \rightarrow \langle \varphi | F \rangle$, $F \in \Phi^\times$. 所以, 空间上的标量乘积对每一 Φ 中的态矢 φ 定义了一个 τ_Φ -连续的线性泛函, 并有

$$f \in L^2, \quad F \in \Phi^\times \quad (113)$$

$$f \in L^2 \subset \Phi^\times \quad (114)$$

这样就构造了一个 Rigged Hilbert 空间或 Gelfand 三连套结构

$$\Phi \subset L^2 \subset \Phi^\times \quad (115)$$

从而可以在 $\Phi \subset L^2 \subset \Phi^\times$ 上构造出粒子数算符

$N^\times = a^+ a$ 的广义本征谱的分解

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n |\varphi_n\rangle \langle \tilde{\varphi}_n| \quad (116)$$

这里

$$|\varphi_n\rangle \in \Phi, \quad \langle \tilde{\varphi}_n| \in \Phi^\times$$

并满足正交归一性条件

$$\langle \tilde{\varphi}_m | \varphi_n \rangle = \delta_{mn}$$

2.5 原子核谱定理

为了要深入地了解广义谱分解的意义及构造合适的 Rigged Hilbert 空间, 在此介绍 Gelfand-Maurin 的原子核谱定理^[8-9].

设 $\Phi \subset L^2 \subset \Phi^\times$ 是 Rigged Hilbert 空间, A 是一循环的实质自伴算子(cyclic e.s.a), 那么, 存在一个广义矢量的集合, 满足

$$|F_\lambda\rangle = |\lambda\rangle \quad (117)$$

$$A^\times |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle, \quad \lambda \in \sigma(A) \subset L^2 \quad (118)$$

$$\langle A\varphi | F_\lambda \rangle = \langle \varphi | A^\times F_\lambda \rangle =$$

$$\lambda \langle \varphi | F_\lambda \rangle, \quad \forall \varphi \in \Phi \quad (119)$$

以致 $\forall \varphi \in \Phi$, 存在唯一正测度 $\mu \in \sigma(A)$, 有

$$\begin{aligned} \langle \psi | \varphi \rangle &= \int_{\sigma(A)} d\mu(\lambda) \langle \varphi | F_\lambda \rangle \langle F_\lambda | \varphi \rangle = \\ &\int_{\sigma(A)} d\mu(\lambda) \langle \varphi | \lambda \rangle \langle \lambda | \varphi \rangle \end{aligned} \quad (120)$$

其中

$$\langle F_\lambda | \varphi \rangle = \langle \varphi | F_\lambda \rangle^* = \langle \lambda | \varphi \rangle, \quad \varphi \in \Phi$$

则有:

a. 态矢 $|\varphi\rangle \in \Phi$ 被 A 的广义本征矢集 $(|\lambda\rangle, \langle\lambda|)$ 的形式展开为

$$|\varphi\rangle = \int_{\sigma(A)} d\mu(\lambda) |\lambda\rangle \langle\lambda| \varphi \rangle \quad (121)$$

b. 如果 $f(\lambda)$ 是定义在 $\sigma(A)$ 上的好函数, 则

$$\langle \psi | f(A) \varphi \rangle = \int_{\sigma(A)} d\mu(\lambda) \langle \varphi | \lambda \rangle \langle \lambda | \varphi \rangle f(\lambda) \quad (122)$$

这里

$$f(A) = \int_{\sigma(A)} d\mu(\lambda) |\lambda\rangle \langle\lambda| f(\lambda) \quad (123)$$

c. 如果 $f(\lambda) = 1$, 则

$$I = \int_{\sigma(A)} |\lambda\rangle \langle\lambda| d\mu(\lambda) = f(A) \quad (124)$$

如果 $f(\lambda) = \lambda$, $f(A) = A$, 则

$$A = \int_{\sigma(A)} \lambda |\lambda\rangle \langle\lambda| d\mu(\lambda) \quad (125)$$

例如, 原子核谱定理保证量子力学的位置算符 Q 和动量算符 P 的完备广义本征矢集的存在, 即存在着广义本征矢 $|x\rangle, |P\rangle$, 满足

$$Q^\times |x\rangle = x |x\rangle, \quad P^\times |P\rangle = P |P\rangle$$

$$|\varphi\rangle = \int_R d\mu(x) |x\rangle \langle x|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx |x\rangle \langle x|\varphi\rangle$$

或

$$|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dP |P\rangle \langle P|\varphi\rangle$$

在这两种情况里 P 和 Q 的本征谱是实线. 值得注意的是, 广义本征谱的分解并不是唯一的, 所以, P 和 Q 的广义本征谱在另外的分解中可能是复平面.

对于更一般的线性算子代数的情况, 设 $\{A_k\}$, $k=1, 2, \dots, N$ 是在 Rigged Hilbert 空间 $\Phi \subset L^2 \subset \Phi^\times$ 中的对易、e. s. a 和 τ_Φ -连续算子完备系, 则存在一个广义本征矢的集合, 满足 $\forall |\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\rangle \in \Phi^\times$, 有

$$(A_k)^\times |\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\rangle = \lambda_k |\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\rangle, \quad \lambda_k \in \sigma(A_k) \quad (126)$$

以致 $\forall \varphi, \psi \in \Phi$, 可在 $\sigma(A) = \sigma(A_1) \times \sigma(A_2) \times \dots \times \sigma(A_N)$ 上定义唯一的测度 μ , 并有

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int_{\sigma(A)} d\mu(\lambda) \langle \psi | \lambda_1, \dots, \lambda_N \rangle \langle \lambda_1, \dots, \lambda_N | \varphi \rangle \quad (127)$$

或

$$|\varphi\rangle = \int_{\sigma(A)} d\mu(\lambda) |\lambda_1, \dots, \lambda_N\rangle \langle \lambda_1, \dots, \lambda_N | \varphi \rangle \quad (128)$$

2.6 复谱分析理论说明

以上建立在 Rigged Hilbert 空间(RHS)、Rigged Liouville 空间(RLS)或广义函数空间上的复谱分析理论是子动力学理论的一大成果, 它有两个基本特点: a. 表征时间破缺对称性的本征值都是复数; b. 引进了刘维尔算符的可约化的及不可约化的表示形式. 复谱分析理论的第一个特点表明, 对称破缺发生在刘维尔方程的本征函数的层次上, 也发生在概率分布(或密度分布算子) ρ 的层次上. 由此导出一个同等重要的结论: 统计性比通常量子理论中的统计性更强(这是量子统计比量子力学多了一道概率的缘故). 因而吉布斯和爱因斯坦系综过去主要作为一种实用工具, 现在则变为一个基本概念及研究方法. 令人感兴趣的是, 这样引入的系综将导致在经典力学或量子力学两种情形中都可出现混沌. 这个结论是相当一般的. 普利高津学派曾经应用以上的理论研究了本来就存在混沌的动力学系统, 诸如伯努利位移等, 结果表明, 就在 P-F 算符或 Koopman 算符的分布函数的层次上确实存在一个复谱表示, 因而他们很自然地采用在概率分布的层次上的复谱来定义“混沌”. 这种定义令人耳目一新. 人们长期曾试图采用许多不同的方式定义“量子混沌”, 但一直未能达到经典和量子两者一致的定义. 经典系统是从

对初条件的敏感性来定义的, 但是, 如何将它拓广于量子情形就不清楚了. 这里可以指出: 两者的类似性在普利高津学派的复谱新理论下达到了共识, 重要的结论是, 大庞加莱(Poincare)系统一般兼有混沌和耗散两种性质, 它们都是动力学不稳定性的结果. 复谱分析理论的第二个特点, 正好阐明了在轨迹层次上与在波函数层次上用复谱表示的大庞加莱系统之间的区别, 以及所要求的统计方法. 从物理意义上, 刘维尔算符 L 的可约化表示导致从概率分布表示 ρ 回到轨迹或波函数的描述上去. 虽然这种统计描述对应用是有益的, 但它不是一种基本描述. 相反地, 当获得 L 的不可约化表示时, 概率分布描述则变成基本描述, 这时就不能退化到轨迹或波函数的描述上去; 并且只有刘维尔算符 L 的谱表示为不可约化形式时, 才能说“混沌”. 满足这样表示的系统必须存在持久的相互作用. 复谱表示有一个优点: 可以把各种可观测量, 如寿命、散射截面等吸收到 ρ 的时间演化中. 其中, 零本征值的本征函数起到特殊作用, 即为“平衡模式”. 当所有其它的模式被衰减时, $\rho(t)$ 渐近地趋于(当 $t \rightarrow \infty$)一种“平衡模式”的和, 这里的求和遍及所有的平衡模式. 在平衡时只有零本征值平衡模式保留下来. 因此, 平衡分布扮演了吸引子的角色. 为了描述趋向平衡就得采用刘维尔空间. 根本不存在在轨迹或波函数层次上趋向平衡. 这里提出一个问题: 薛定谔方程是线性的, 相应于每个初始条件 $\varphi(0)$ 的波函数为 $\varphi(t)$, 这怎么能同趋向分布函数 ρ 的平衡相一致呢? 普利高津学派证明了: 这个明显的矛盾恰好与不稳定性及混沌相关, 且复本征值导致各种时间标度. 这再次通过各种模式叠加对应于出现非马尔科夫行为. 正是分布函数的初始条件激发起各种契机, 决定了短时间和长时间的 $\rho(t)$ 的行为. 由于他们建立了 ρ 层次上的不可约化形式, 所以, 在其理论框架下可以自然地阐明轨迹或波函数的时间演化破缺对称性等重要问题. 实际上, 经典混沌必然导致经典轨迹的破裂. 但是, 在量子力学中量子混沌仍然是一个病态的概念, 它需要比经典混沌更强的条件, 因为, 所有有限的量子系统(具有离散谱)都是可积的, 它们无庞加莱发散. 这是普朗克常数 h 的结果. 与经典力学比较, h 的引进就像加上了相干性. 相干性则是量子力学中物质波动性方面的根源. 因此, 与经典混沌对应的量子力学的类似物一般不可能是混沌的. 但是, 对导致刘维尔空间中不可约化表示的大庞加莱系统来说, 则并非如此, 即对于大庞加莱系统, 不论经典系统还是量

子系统,均可出现混沌.按照通常量子理论通过求解薛定谔方程,波函数从 $t=0$ 时的 $\varphi(0)$ 出发变成 $\varphi(t) = e^{-iHt}\varphi(0)$. 这个结果如何与复谱理论所得到的 ρ 导致平衡结果相一致呢? 普利高津进一步指出:平衡意味着存在多重波函数(相应于微正则系综的相同能量). 究竟如何能把一个波函数变成多重波函数呢? 这与量子理论是否矛盾呢? 从某种意义上说,该思想类似于经典混沌系统中轨迹概念变成病态定义的情形. 由于不稳定性同样导致 $t \rightarrow \infty$ 时波函数 $\varphi(t)$ 也变成病态定义,例如,二体散射中出现含时因子 $\sin \omega t/\omega$, 对于短时间该量有很好定义(对于 $t \ll \omega$, $\sin \omega t/\omega$ 简直就是 t), 但是,对于 $t \rightarrow \infty$, 它则在 $-1/\omega$ 和 $1/\omega$ 之间越来越快地振荡,故类似地, $\rho = \varphi\varphi^*$ 也变成病态定义,就如它变成正比于 $\sin^2 \omega/\omega^2$ 一样. 那么如何排除这个困难呢? 这个不难,须知 ρ 的最初目的就是计算平均值,在平均值意义上困难便迎刃而解. 关于趋向平衡问题,只要限于光滑的可观测情形就行. 从面包师变换中可知,不断重复面包师变换,就会不断地得到越来越细致的条形. 更精确地说,这样变换的结果将不产生均匀的分布. 但当计算光滑的可观测量的平均值时,则可略去振荡,于是, ρ 将是均匀分布. 这恰好是量子理论也不得不做的事情. 如上述例子,当 $\rho \propto \sin^2 \omega/\omega^2$ 时,必须考虑 $\int f(\omega) \sin^2 \omega/\omega^2 d\omega$, $f(\omega)$ 为 ω 的光滑函数,称为“试验函数”. 教科书中早就证明:对于 $t \rightarrow \infty$, 该积分可写成 $\int f(\omega) t \delta(\omega) d\omega$, 这里 $\delta[\omega]$ 是狄拉克分布. 这时试验函数中 ρ 变成 $t \delta(\omega)$, 且是很好定义的,并且能考虑积分 $\int f(\omega) \delta(\omega) d\omega$, 使得“被规则化的” ρ 正比于 $t \delta(\omega)$, 而被规则化的波函数正比于 $\delta(\omega)$. 显然,被规则化的 ρ 不是被规则化的波函数的平方. 这表明作为量子力学的波函数的“破裂”现在必须在分布函数的层次上给予公式化. 与建立在波函数基础上的量子理论相比,普利高津的新理论中增加了统计元素. 他们正是针对导致波函数的病态定义这个事实,提出了关于密度矩阵的量子理论,必须精确地将该理论理解为研究与试验函数有关的密度 ρ 的理论. 值得注意的是,被规则化的 ρ 满足刘维尔方程,这成为新量子理论中的基本“扩张”方程,取代了通常的薛定谔方程. 新理论中将 ρ 表达成来自不同模式的各个贡献求和,这是高度非凡的基本结果,可视为量子力学的扩张形式. 现在来看看新量子力学形式的物理图像. 考虑经典

相空间,用 h 元胞划分相空间考虑海森堡不确定关系. 早期的玻尔量子理论中每个元胞对应于一个量子态(一个 φ). 在稳定量子系统中,按时地从一个量子态进入另一个量子态. 相反地,对于大庞加莱系统,则产生多重量子态. 于是,就像云雾弥散了整个相空间,可以从一个态进入多个态,反之则不然. 因此,尽管在量子力学中不能通过定义“对初始条件的敏感性”来表征混沌,但是,显然上述图像与经典混沌的相似性是多么令人吃惊. 这里发现了波函数的破裂现象是基本主要的混沌表现形式,且标志着量子力学的极限. 不过,波函数的破裂恰好唯一地标志着更深刻的困难所在. 因为在大庞加莱系统中波函数连续不断地分支出来,使基于永久单波函数的薛定谔方程根本不适用. 而应以刘维尔方程取而代之,于是,新量子力学形式脱颖而出. 新理论的特色和优点在于: a. 从基本的微观层次上考虑了耗散因素和时间方向,这恰恰是老理论的两个致命弱点; b. 导出具有时间破缺对称的解,从而能从微观层次上引进不可逆性; c. 能将许多可观测物理量包括在理论之中; d. 导致发展了一种构造性微扰理论及广义复谱分解方法.

上面简介了子动力学的两大要素:基本形式和空间背景. 现探讨该理论基本形式和空间背景在网络科学中的应用. 网络研究者众所周知,网络科学,特别是复杂网络,自从其标志性两项开创性发现(小世界(small world)和无标度(scale-free))以来获得了日新月异的发展^[10-11],从而引发了人们对现实世界复杂网络的研究热潮,吸引了许多不同学科领域(如物理学、社会学、生物学、计算机及数学等)的学者进入研究行列中. 但是,在对 12 年前发现的最初新奇之后,网络科学揭示的网络世界越来越复杂,“庐山真面目”远未揭开,发现在两大发现之外的创新仍然是遥远的路标. 为此下面抛砖引玉提出两个例子,希望同潮流有所不同.

3 自相似结构的网络

每一个信息密度就是网络中的一个节点,两个节点信息密度之间的信息传递或相互作用就是两个节点间的边或连线. 然后节点信息密度又可投影为第二层类似的网络,继续下去,第三层,第四层,……. 可以用子动力学来表述这一具有全息特征的模型. 设原来网络系统由刘维尔(或薛定谔)动力学方程描述,这就意味着每一个基本的动力学方程

可以构造其投影过程中的子动力学方程(SKE),无一不是同相似变换交织在一起,可以用下面的形式表达,其中,第一个下标是指一阶的SKE,对应的是第一层自相似网络,第二个下标是指二阶的SKE,对应的是第二层自相似网络,直到第 n 层自相似网络.

$$\text{Schrödinger (Liouville) Eqs.} \left\{ \begin{array}{l} \text{SKE}_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{SKE}_{11} \cdots \\ \text{SKE}_{12} \cdots \\ \vdots \end{array} \right. \\ \text{SKE}_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{SKE}_{21} \cdots \\ \text{SKE}_{22} \cdots \\ \vdots \end{array} \right. \\ \vdots \\ \text{SKE}_n \left\{ \begin{array}{l} \text{SKE}_{n1} \cdots \\ \text{SKE}_{n2} \cdots \\ \vdots \end{array} \right. \\ \vdots \end{array} \right.$$

这一自相似结构的网络模型可以用于自然、社会和经济领域众多的具有自相似结构的“网络的网络”中去.例如,宇宙大时空动力学结构、大脑网络模型.实际上,在某种意义上说,上面揭示的图景表明宇宙的动力学方程结构是自相似的,可以用来表现宇宙大规模结构可能具有全息性质.另外,对一类“网络的网络”来说,例如,大脑网络^[12],可以将其看作为二层自相似结构的网络,甚至多层自相似结构的网络,即第一层次神经元连接的网络,第二层次神经元本身的网络等,这里每一个神经元可以看作是一个信息密度节点.

首先,有趣的是对于刘维尔方程来说,分布函数或密度算子可以转化为信息密度仍然保持成立,这对子动力学方程也是没有问题的,且无论对经典系统或量子系统都适用.因此,刘维尔方程和动力学方程可以成为描述网络信息或信息网络的基本方程.其次,重要的是自相似条件,即投影条件,是直接来源于子动力学理论,即投影部分的网络系统的分布函数(这里可以看作信息密度分布)是其总分布函数的“动力学部分”的“真空部分”,这样的条件保证投影的自相似结构包含着原来结构的主要动力学特征或信息.这是子动力学的重要思想.事实上,子动力学理论可以证明,对可以趋向平衡态的任何非平衡系统,其分布函数(或信息密度)可以划分为动力学部分和非动力学部分之和,动力学部分在系统演化的过程中起主要或实质性的作用,而非动力学部分则随着时间的演化趋于零,对过程最终没有什么

贡献,这是第一点.另外,动力学部分还可分为真空部分、关联部分、真空-关联和关联-真空等部分;接着子动力学理论揭示动力学部分的关联部分或真空-关联部分或关联-真空部分随着系统过程的演化都趋于零,惟有动力学部分的真空部分才有意义,是过程的实质参与者.这在Balescu的书中有详细的讨论^[7].所以,在子动力学的投影条件下原网络的次层自相似结构的网络包含着上层网络的主要和实质性的信息,整个多层自相似结构的网络是动力学全息的,数学上表现为次层自相似结构的网络可以通过子动力学的相似变换返回到原来网络.

这一自相似结构的网络的全息特征可能对“网络的网络”,即大脑网络来说有重要意义.可能说明如果把大脑网络看成二层自相似结构的网络的话,那么,第二层次神经元本身的网络就可能浓缩了第一层次大脑网络的一些主要信息,它们之间可以通过相似变换建立联系.因此,大脑的记忆本质就是大脑网络的一些主要信息通过相似变换储存到第二层次神经元本身的网络之中.大脑网络在信息处理或推理中要反复通过这类相似变换取出储存信息来进行工作.这种过程是可以用于子动力学的理论来定量分析的.

更为惊异的是这种具有自相似结构的子动力学投影方程可以编成程序来求解原网络系统的本征值问题.例如,设原网络的哈密顿量(Hamiltonian)为 H ,如果定义投影算子

$$P_{kj} = |\varphi_{kj}\rangle\langle\varphi_{kj}|$$

为 H_0 的本征投影算子,那么,由SKE, H 的本征矢可以求得为

$$\langle f_{kj} | = \langle \varphi_{kj} | (P_{kj} + C_{kj}) \quad (129)$$

对应的本征值为

$$E_{kj} = \langle \varphi_{kj} | H_0 | \varphi_{kj} \rangle + \sum_{kj} \frac{1}{E_{kj} - E_{kj}'} \cdot \langle \varphi_{kj} | H_{\text{int}} Q_{kj} | \varphi_{kj}' \rangle \langle \varphi_{kj}' | Q_{kj} H_{\text{int}} | \varphi_{kj} \rangle \quad (130)$$

这里引入 $Q_{kj} H Q_{kj}$ 为 H_q ,如果 $\frac{1}{E_{kj} - H_q}$ 的谱分解给出,那么,本征值 E_{kj} 能够由SKE再给出.继续这一程序直到最后得到 $Q_{kj}' H Q_{kj}'$ 仅存在一个投影算子,那么,可以求出本征矢和本征值.再把最后的结果代入前面的递推公式求得 H 的本征值和本征矢.

4 反量子信息密钥传输的方案

随着量子密码隐性传输技术在量子通讯网络上

越来越接近实用,各种关于量子密码隐性传输不可破解性、能瞬间传送量子信息而不被破坏或拦截的议论逐渐响不绝耳.确实通过这项保密力度极强的科技的应用,能大幅度提高信息传输的保密性,说不定是未来开发大规模量子保密系统的基础.但是,世界上的事情是对立统一的,有“盾”必有“矛”.在此提出一种基于 Rigged Hilbert 空间的两种混合态下的反量子密码术的算法方案,这种方案是不同于一般的基于 Hilbert 空间和 Neumann 量子机制上的量子密码术算法,可以称为“Rigged Hilbert 空间反量子密码术方案”.作者发现,在特殊条件下,这个“反量子密码术”也可以变成在 Hilbert 或广义泛函空间中运行的一种量子密码术.进一步,窃听者还可以利用广义泛函空间的延拓技术来对安全通道进行窃听,从而逃避检查.在广义泛函空间中,非么正的算子是可以构建的,这种算子可以作用于非正交混合态,不具备等距性(isometry);在这种情况下,两个非正交态的非克隆(cloning)定理不再有效,因而,在广义泛函空间,这种方案还可以提供一种有效的方法诠释反量子密码术.

4.1 信息密钥和 RHS

量子密码术认为窃听者总是不可避免地会引入一些传输错误,因此,可以被原系统所侦测到^[13].第一种量子密码术的理论是利用单光子沿着各个方向激化的4个态,这是由 Bennett 和 Brassard 提出来的^[14].许多学者也提出了其它的量子密码术方案.众所周知,一个窃听者会采用一切允许的物理条件,包括噪音、信道的相干性来获得有关量子密钥方面的信息,这里需要指出的是窃听者可能还会利用扩展希尔伯特空间的技术来窃听量子密码,因此,各种保守量子密钥的规则也许不得不考虑扩展希尔伯特空间中量子密钥态的非么正变换的可能性^[15-18].这种扩展的希尔伯特空间方法可能被窃听者利用,尽管整个系统表面上仍可以被一个传统的形式化希尔伯特空间所描述.事实上,所有希尔伯特空间内的工作都建于冯·诺依曼量子力学框架之上,其中隐含着时间演化可逆性.使用这种方法,假设系统是一个可逆系统,在这个系统中的量子态不会受到传输信息通道中量子噪音的影响.但是,如果系统是开放和非理想的,量子噪音会耗散般地干扰系统里的稳定态,正像前文(也包括许多文献)所说的,这种情况不足以被希尔伯特空间的框架所描述.因此,在真实系统中要想消相干效应不被忽略,重要的是找一个合适的量子密码术方案,使其工作在一个合适的扩

展希尔伯特泛函空间上,而不是仅仅限于传统的 Hilbert 空间.所以,在此利用两个混合态,提出一种新型的量子密码术方案,使其工作在 Rigged Hilbert 空间中.在本文的方法里面,自厄米算符和么正变换演化群不是在本质上必须统治量子密码术的操作和演化的.量子密码术可以在更广泛的泛函空间中工作,这种空间允许不可逆性,比如 Rigged Hilbert 空间(RHS)或者 Rigged Liouville 空间(RLS),而不仅仅是希尔伯特空间或者 Liouville 空间.这种 RHS 有三重态空间结构,比如说致密子空间和它的拓扑对偶空间架在希尔伯特空间两边,即 $\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi^\times$,而 RLS 就是稠密子空间和它的拓扑对偶空间架在刘维尔空间两边,即 $\Phi \otimes \Phi \subset \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \subset \Phi \otimes \Phi^\times$.在物理学里引入这些广义的泛函空间是为了提供对奇点发散的广义分布函数,比如像狄拉克 δ 函数和量子力学基础有一个正确的数学描述,从而能够对不可逆过程、不可积系统和复杂网络系统的描述进行深度的数学物理刻画,后者包括曾经用来构造 Friedrichs 模型的 Liouville 算子的复本征值和广义特征向量^[19]、与混沌映射有关的广义谱分解^[20].这种方法也能运用到合适的开放量子系统上去,发现有意义的广义泛函空间,构造非么正变换来描述系统的不可逆性^[21-22].

4.2 RHS 规则

考虑一个两部分量子模式执行在希尔伯特空间里, $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$, 这里 $\mathcal{H}_A$ 和 $\mathcal{H}_B$ 对应于两个区域,其中,一个区域是爱丽丝(Alice)区域,另一个是柏布(Bob)区域; $\mathcal{H}_E$ 是相关环境,它包括窃听者区域.在空间 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 上的混合态 $\tilde{\rho}$ 是一个约简的同环境 $\mathcal{H}_E$ 的纠缠态.因为,密度算子 $\tilde{\rho}$ 描述的是开放体系 $\mathcal{H}$,所以,其么正演化算符可以不受希尔伯特空间时间可逆系统的影响而扩展希尔伯特空间,从而建立一个在 RHS 中的混合态密码术.这是本文想法的出发点^[5-9].建立在 RHS 中两个混合态的一种量子密码术机制可以源于其在 Hilbert 空间中有效和存在,但是,扩展后系统的投影算子是非厄米的,因而 RHS 混合态量子密码术更安全,更适合来应对窃听者.

为了说明这点,假设 RHS 对角式中 $\tilde{\rho}^{(k)}$ ($k=0,1$)代表位0和1,即

$$\tilde{\rho}^{(k)} = \sum_{j=1}^{n^{(k)}} \tilde{p}^{(k)} |\varphi_j^{(k)}\rangle \langle \tilde{\varphi}_j^{(k)}| \text{ 和 } \langle \tilde{\varphi}_i^{(k)} | \varphi_j^{(k)} \rangle = \delta_{ij}$$

这里演化算子 U 和其扩展对偶算子 $U^\times$ 满足等距性

(isometry), 即有 $\langle U^\times \tilde{\varphi}_i^{(k)} | U \varphi_j^{(k)} \rangle = \langle \tilde{\varphi}_i^{(k)} | \varphi_j^{(k)} \rangle$, 这里 $\varphi_j^{(k)} \in \Phi$, $\tilde{\varphi}_j^{(k)} \in \Phi^\times$, Φ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的一个致密子空间, 并且有下面的空间三连套 (RHS) 成立:

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi^\times$$

现在假设 Alice 随即选择了两个量 0 和 1, 并且发送给 Bob 的两个相关态, $\tilde{\rho}^{(0)}$ 或者 $\tilde{\rho}^{(1)}$, 那么, 理想的情况是 Bob 能够确定测试条件是否成功, 而任何窃听都会导致错误的出现. 实际上, 可以操作量子密码术通过下面投影算子 $\tilde{Q}^{(k)}$ ($k=0,1$)

$$\tilde{Q}^{(k)} = 1 - \tilde{p}^{(k)} = 1 - \sum_{j=1}^{n^{(k)}} |\varphi_j^{(k)}\rangle\langle\tilde{\varphi}_j^{(k)}| \quad (131)$$

其中, $\tilde{p}^{(k)} = \sum_{j=1}^{n^{(k)}} |\varphi_j^{(k)}\rangle\langle\tilde{\varphi}_j^{(k)}|$, 作用在 RHS, $\tilde{\mathcal{H}}^{(k)}$ 中. 在这种情况下柏布会随机地接受到两种状态中的一种, 如果柏布收到 $\tilde{Q}^{(k)}$, 那么

$$\tilde{Q}^{(k)} \tilde{\rho}^{(k)} = \tilde{\rho}^{(k)} - \sum_{j=1}^{n^{(k)}} \tilde{p}^{(k)} |\varphi_j^{(k)}\rangle\langle\tilde{\varphi}_j^{(k)}| = 0 \quad (132)$$

但是

$$\tilde{Q}^{(k)} \tilde{\rho}^{(j)} \neq 0, \quad k \neq j \quad (133)$$

有概率

$$p^{(j)} = \text{Tr}\{\tilde{Q}^{(k)} \rho^{(j)}\} \neq 0 \quad (134)$$

以下 4 个条件仍是保证传输的安全性所需满足的^[23]:

$$\tilde{\mathcal{H}}^{(0)} \cap \tilde{\mathcal{H}}^{(1)} = \{0\} \quad (135)$$

$$\tilde{\mathcal{H}}^{(0)} \cap \tilde{\mathcal{H}}^{(1)} = \{0\} \quad (136)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda \quad (137)$$

$$\langle \tilde{\varphi}_i^{(0)} | \tilde{\rho}^{(0)} | \phi_j^{(0)} \rangle = \langle \tilde{\varphi}_i^{(1)} | \tilde{\rho}^{(1)} | \phi_j^{(1)} \rangle \quad (138)$$

式中, i, j 为整数; λ_j 为变换 $T^{(0)} \equiv \tilde{p}^{(0)} \tilde{p}^{(1)}$ 的第 j 个特征值; $|\phi_j^{(0)}\rangle$ 为 $T^{(0)}$ 和 $|\phi_j^{(1)}\rangle \equiv \frac{p^{(1)} |\tilde{\phi}_j^{(0)}\rangle}{\sqrt{\lambda_j}}$ 的第 j 个特征向量.

以上 4 个条件可以推广到 RHS 空间中的量子密码术方案中去. 实际上, 由 Alice 准备的在 RHS 中的一个起始测量仪器态 $|u\rangle\langle\tilde{u}|$ 加上由 Alice 发出的态 $\tilde{\rho}^{(k)}$ 的工作空间可以是 $\tilde{\mathcal{H}} \otimes \tilde{\mathcal{H}}_E$. 利用么正算符 U 和它的扩展对耦算符 $U^\times$ 来作用这一空间, 作用后的结果状态可以为

$$\tilde{\rho}^{(k)} = U[\tilde{\rho}^{(k)} | u\rangle\langle\tilde{u}|] U^\times$$

为了避免传输错误, $\tilde{\rho}^{(k)}$ 求迹是在空间 $\tilde{\mathcal{H}}_E$ 中

且必须在子空间 $\tilde{\mathcal{H}}^{(k)}$ 中存在, 因此, 有

$$U(|\varphi_i^{(k)}\rangle \otimes |u\rangle) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_{il}^{(k)}} |\varphi_l^{(k)}\rangle \otimes |u_{il}^{(k)}\rangle \quad (139)$$

式中, $|u_{il}^{(k)}\rangle$ 为 $\tilde{\mathcal{H}}_E$ 中的状态向量; $\alpha_{il}^{(k)}$ 为引进的正参数以使 $\langle \tilde{u}_{il}^{(k)} | u_{il}^{(k)} \rangle = 1$.

因此, Alice 得到的状态 $\tilde{\rho}_E^{(k)}$ 是通过 $\tilde{\rho}^{(k)}$ 求迹于 $\tilde{\mathcal{H}}$ 而得到的, 即

$$\tilde{\rho}_E^{(k)} = \sum_{i,j,l} \langle \tilde{\varphi}_i^{(k)} | \tilde{\rho}^{(k)} | \phi_i^{(k)} \rangle \cdot \sqrt{\alpha_{il}^{(k)} \alpha_{jl}^{(k)}} |u_{il}^{(k)}\rangle\langle\tilde{u}_{jm}^{(k)}| \quad (140)$$

这样可以获得 $\tilde{\rho}_E^{(0)} = \tilde{\rho}_E^{(1)}$, 等等.

4.3 方案机制的特征

RHS 中的量子密码术方案有些不同于其在希尔伯特空间中的特点, 为了说清这一点, 假设 Alice 随机地选择纠缠态 $|\psi^{(k)}\rangle$ ($k=0,1$) 代表希尔伯特空间中的 0 和 1, 如

$$|\psi^{(k)}\rangle = \sum_{j=1}^{n^{(k)}} p_j^{(k)} |\phi_j^{(k)}\rangle \quad (141)$$

并且发送给 Bob 相关状态 $|\psi^{(0)}\rangle$ 或 $|\psi^{(1)}\rangle$, 然后 Bob 随机地收到两种状态中的一种, 假如 Bob 选择希尔伯特空间中的态为

$$Q^{(k)} = 1 - p^{(k)} = 1 - \sum_{j=1}^{n^{(k)}} |\phi_j^{(k)}\rangle\langle\phi_j^{(k)}| \quad (142)$$

即他以概率

$$p^{(j)} = \text{Tr}\{Q^{(k)} \rho^{(j)}\} \neq 0 \text{ 接收到}$$

$$Q^{(k)} |\psi^{(j)}\rangle = \begin{cases} 0, & k = j \\ \neq 0, & k \neq j \end{cases} \quad (143)$$

但是, Bob 仍然无法确定当输出是 0 的时候是不是测量错误, 相反, 他也不敢确定当输出为 1 的时候是不是正确的值. 这是因为通过使用扩展希尔伯特空间的技术, 窃听者 Eve 能够拦截所谓安全传输的通道而不留下任何踪迹, 现描述一个这样的程序方案.

从原理上讲, Eve 可以通过扩展的希尔伯特空间来构造一个 RHS, 这样可以使 $Q^{(k)}$ 扩展到 $\tilde{Q}^{(k)}$, 然后 Eve 可以像 Bob 一样得到相同的结果而不会引进错误, 即

$$\tilde{Q}^{(k)} |\psi^{(j)}\rangle = Q^{(k)} |\psi^{(j)}\rangle = \begin{cases} 0, & k = j \\ \neq 0, & k \neq j \end{cases} \quad (144)$$

并且

$$p^{(j)} = \text{Tr}\{\tilde{Q}^{(k)} \rho^{(j)}\} = \text{Tr}\{Q^{(k)} \rho^{(j)}\} \neq 0 \quad (145)$$

例如, 假设 $p^{(j)}$ 是谐振子量子信息编码中的哈

密顿量的本征投影子

$$p^{(j)} = |\psi^{(j)}(x)\rangle\langle\psi^{(j)}(x)| \quad (146)$$

其中,本征矢 $\psi^{(j)}(x)$ 定义为

$$\psi^{(j)}(x) \equiv \left(\frac{mw}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^j j!}} H_j(\sqrt{mw}x) e^{-(mw/2)x^2} \quad (147)$$

$H_j(\sqrt{mw}x)$ 为 Hermitian 多项式

$$H_n(mwx) = (-1)^n e^{mw x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-mw x^2}$$

$$\langle F_j(x) | \xi_a x^a \rangle \equiv \begin{cases} \int \left[\frac{(-1)^j}{2^j j!} \delta^{(j)}(x) \xi_a x^a - \delta_{ja} x^{-a} \xi_a x^a \right] dx, & j = a < n \\ \int \left[\frac{(-1)^j}{2^j j!} \delta^{(j)}(x) \xi_a x^a \right] dx, & \text{其它} \\ 0, & j = a < n \\ \int \left[\frac{(-1)^j}{2^j j!} \delta^{(j)}(x) \xi_a x^a \right] dx, & \text{其它} \end{cases} \quad (148)$$

这导致

$$\langle \psi^{(k)}(x) | \psi^{(j)}(x) \rangle = \langle \tilde{\psi}^{(k)}(x) | \psi^{(j)}(x) \rangle = \int \frac{(-1)^k}{2^k k!} \delta^{(k)}(x) \delta_{kj} H_j(x) dx = \frac{(-1)^k}{2^k k!} \left(\frac{d^k}{dx^k} 2^j x^j \right) \Big|_{x=0} = \delta_{kj} \quad (149)$$

其中, Hermitian 多项式 $H_n(x) \in \Phi \subset \mathcal{H} = \mathcal{H}^+$, 而且 $(d^k/dx^k) \delta(x) (\equiv \delta^{(k)}(x)) \in \Phi^\times$, 且 $\Phi \subset \mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \subset \Phi^\times$, 因而无法判别 Alice 和 Bob 所执行的操作.

$$T_r\{Q^{(k)}\rho^{(j)}\} = T_r\left\{Q^{(k)} \sum_{j=1}^{n^{(j)}} p_j |\psi^{(j)}(x)\rangle\langle\psi^{(j)}(x)|\right\} = \sum_{j=1}^{n^{(j)}} p_j \left\langle \left(\frac{mw}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^j j!}} H_j(x) e^{-x^2/2} \right| \left(\frac{mw}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^j j!}} H_j(x) e^{-x^2/2} \right\rangle^2 = \sum_{j=1}^{n^{(j)}} p_j \quad (150)$$

同由 Eve 操作所提供的信息的区别是

$$T_r\{Q^{(k)}\rho^{(j)}\} \delta = T_r\left\{Q^{(k)} \sum_{j=1}^{n^{(j)}} p_j |\psi^{(j)}(x)\rangle\langle\tilde{\psi}^{(j)}(x)|\right\} = \sum_{j=1}^{n^{(j)}} p_j \langle F_j(x) e^{x^2/2} | H_j(x) e^{-x^2/2} \rangle \times \left\langle \left(\frac{mw}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^j j!}} H_j(x) e^{-x^2/2} \right| \left(\frac{mw}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^j j!}} H_j(x) e^{-x^2/2} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n^{(j)}} p_j \quad (151)$$

因为他们最后所得到的结果竟然都是一样的,

那么,扩展态为

$$\tilde{p}^{(j)} = |\tilde{\psi}^{(j)}(x)\rangle\langle\psi^{(j)}(x)|$$

$$\tilde{\psi}^{(j)}(x) = e^{mw x^2} \left(\frac{mw}{\pi}\right)^{-1/4} \sqrt{2^j j!} F_j(x)$$

这里,对任何有限的多项式 $f_n = \sum_{a=0}^n \xi_a x^a$, 泛函 $F_j(x)$ 定义为

这就是说,当 Alice 和 Bob 执行密码通讯操作时,窃听者可能会出现而不会被发现. 这里

$$\rho^{(j)} \equiv \sum_{j=1}^{n^{(j)}} p_j |\psi^{(j)}(x)\rangle\langle\psi^{(j)}(x)|$$

进一步说,因为希尔伯特扩展空间不是唯一的,窃听者有可能用多种方式构造扩展的希尔伯特空间来窃听. 原理上消除这种窃听等价于选择一种投影子作为刘维尔空间或者 Rigged 刘维尔空间(RLS)中的状态参量,这就是说, Alice 和 Bob 选择 $\sum_{j=1}^{n^{(k)}} p_j |\phi_j^{(k)}\rangle\langle\phi_j^{(k)}|$ 或者 $\sum_{j=1}^{n^{(k)}} p_j |\phi_j^{(k)}\rangle\langle\tilde{\phi}_j^{(k)}|$ 作为他们传送或接收的刘维尔空间或 RLS 中的态,而不是

希尔伯特空间中的 $\sum_{j=1}^{n^{(k)}} p_j |\phi_j^{(k)}\rangle$. 刘维尔空间或 RLS 空间中的方程表述比希尔伯特空间中方程表述多一些有利的方面,因为,在第一种情况下,

$|\phi_j^{(k)}\rangle\langle\phi_j^{(k)}|$ 或 $|\tilde{\phi}_j^{(k)}\rangle\langle\phi_j^{(k)}|$ 已经固定, Eve 即使利用构造扩展的希尔伯特空间技术也不可能拦截安全传输通道而不留下传输错误. 但是,应当注意的是,在 RLS 中能够用扩展空间技术构造一个合适的扩展对偶密度算符工作在对应的扩展对偶空间,这样可能导致如果按上面的过程执行操作规程则会出现失败. 即使确定了希尔伯特空间中的一对状态, $|\phi_j^{(k)}\rangle\langle\phi_j^{(k)}|$ 或 RHS 中的 $|\phi_j^{(k)}\rangle\langle\tilde{\phi}_j^{(k)}|$, Eve 仍可以采用与刘维尔空间或者 RLS 空间相关的扩展空间技术来构造一个扩展态 $|\tilde{\phi}_j^{(k)}\rangle\langle\phi_j^{(k)}|$ 或者 $|\tilde{\phi}_j^{(k)}\rangle\langle\tilde{\phi}_j^{(k)}|$, 来企图成功战胜量子密码机制. 所

以,本文认为,如果采用空间扩展技术,通常的量子密码术方案可能并不是完全安全的.没有完全安全的量子密码机制,安全依赖于能够在固定空间中引进一个机制,如通过希尔伯特空间或 RHS 空间中一对固定的双态,在这种情况下,刘维尔空间量子密码术方案比希尔伯特空间的进步,现对希尔伯特空间量子密码术和 RHS 中量子密码术的特点进行了比较.

a. 它们具有不同空间的对偶结构:在希尔伯特空间, $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+$; 在 RHS 中, $\Phi \subset \mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \subset \Phi^\times$

b. 窃听者可以通过扩展 RHS 来攻击希尔伯特空间:为了保护量子密码安全, Bob 和 Alice 不得不采用合适的 RHS 量子密码方案,所用的 RHS 必须比 Eve 采用的 RHS 更大,或者起码相等.

c. 扩展的希尔伯特空间不是唯一的,比如,可以获得不同的扩展空间从而得到模型: $\Phi_1 \subset \mathcal{H} \subset \Phi_1^\times, \Phi_2 \subset \mathcal{H} \subset \Phi_2^\times, \dots, \subset \Phi_2 \subset \Phi_1$, 且 $\Phi_1^\times \subset \Phi_2^\times \subset \dots$, RHS 序列可以写成 $\dots \subset \Phi_2 \subset \Phi_1 \subset \mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \subset \Phi_1^\times \subset \Phi_2^\times \subset \dots$, 大的 RHS 空间中的量子密码术方案只能防止小的 RHS 空间或希尔伯特空间,如 $\Phi_2 \subset \mathcal{H} \subset \Phi_2^\times$ 能够防止用 $\Phi_1 \subset \mathcal{H} \subset \Phi_1^\times$ 来窃听,但是, $\Phi_1 \subset \mathcal{H} \subset \Phi_1^\times$ 不能防止用 $\Phi_2 \subset \mathcal{H} \subset \Phi_2^\times$ 来窃听,这样的话,希尔伯特空间不能防止 RHS 空间的窃听者,只能用较大的 RHS 空间防止较小的 RHS 空间的窃听.

4.4 低效率的不可克隆的定理

很清楚,量子密码术在希尔伯特空间中的 1-4 条性质在 RHS 空间中仍是不变的,这是由于双正交归一性和等距性(isometry)的性质存在, isometry 关系对于条件 2(式(136))的应用是非常重要的,这是因为两个正交态中的广义克隆定理可以成立,条件 2 才成立.问题的关键是在没有 isometry 性的条件下,两个非正交态的不可克隆是无效的情况下,能不能构造一个非么正操作算符作用在 RHS 中非正交归一化混合态上,答案是可以的.一个可以克隆的例子就是复制两个非正交态^[24].

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle \otimes |\Sigma\rangle &\xrightarrow{U+M} |\psi_0\rangle |\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle \otimes \\ |\Sigma\rangle &\xrightarrow{U+M} |\psi_1\rangle |\psi_1\rangle \end{aligned}$$

这里, $|\psi_0\rangle$ 和 $|\psi_1\rangle$ 为量子体系 A 中的非正交态; $|\Sigma\rangle$ 为量子体系 B 的输出态; U 为么正演化算符; M 为非么正测量算符(这个非么正性质可以由扩展希尔伯特空间到一个 RHS 空间中获得并具有复本征值,可以描述不可逆的测量过程), $U+M$ 可以产生一个从 $|\psi_k\rangle \otimes |\Sigma\rangle$ 态到 $|\psi_k\rangle \otimes |\psi_k\rangle$ 的演化态,说

明 $U+M$ 也是一个非么正和非 isometry 的算符,即

$$\begin{aligned} (U+M)^+ \tilde{\psi}_k \otimes \tilde{\Sigma} | (U+M) | \psi_k \otimes \Sigma \rangle = \\ \langle \tilde{\psi}_k \otimes \tilde{\Sigma} | \psi_k \otimes \Sigma \rangle \neq \langle \tilde{\psi}_k \otimes \tilde{\Sigma} | \psi_k \otimes \Sigma \rangle \end{aligned} \quad (152)$$

其中, $|\psi_k \otimes \Sigma\rangle \in \Phi_A \otimes \Phi_B$, 且 $|\tilde{\psi}_k \otimes \tilde{\Sigma}\rangle \in \Phi_A^\times \otimes \Phi_B^\times$, 各自来说, $\Phi_A \otimes \Phi_B$ 和 $\Phi_A^\times \otimes \Phi_B^\times$ 是系统 A 和系统 B 中的一对对偶子空间.

另一个例子是通过非么正算符 $\tilde{U}$ 来克隆双光子相干态,即

$$\begin{aligned} \tilde{U} | \alpha_1 \rangle \otimes | \alpha_2 \rangle = \tilde{U} e^{a b^\dagger - a^\dagger b} | 0 \rangle = \\ e^{a a_1^\dagger - a^\dagger a_1} e^{a a_1^\dagger - a^\dagger a_1} = | \alpha_1 \rangle \otimes | \alpha_1 \rangle \end{aligned} \quad (153)$$

这里如果构造

$$\tilde{U} e^{a b^\dagger - a^\dagger b} = e^{a(a_1^\dagger - a_1) - a^\dagger(a_1 - a_1^\dagger)} \quad (154)$$

那么,可以构造系统 1 和系统 2 中的两个广义非正交态 a_1, a_2 , 并利用非么正和非 isometry 算符 $\tilde{U}$ 来克隆 RHS 空间中两个态,即通过构造非么正算符 $\tilde{U}$ 使其具有

$$\begin{aligned} \langle \tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_2 | \tilde{U} + \tilde{U} | a_1 \otimes a_2 \rangle = \\ \langle \tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_1 | \tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_1 a_1 \otimes a_1 a_1 \otimes a_1 \rangle \neq \\ \langle \tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_2 | \tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_2 a_1 \otimes a_2 a_1 \otimes a_2 \rangle \end{aligned} \quad (155)$$

并且没有等距性(isometry)

$$\begin{aligned} \langle \tilde{U} \tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_2 | \tilde{U} a_1 \otimes a_2 \rangle = \langle \tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_1 | a_1 \otimes a_1 \rangle \neq \\ \langle \tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_2 | a_1 \otimes a_2 \rangle \end{aligned} \quad (156)$$

由此给出

$$\begin{aligned} \tilde{U} (| a_1 \otimes a_2 \rangle \langle \tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_2 |) \tilde{U}^\dagger = \\ | a_1 \otimes a_1 \rangle \langle \tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_1 | \end{aligned} \quad (157)$$

这样可以得到

$$\begin{aligned} | a_1 \otimes a_2 \rangle \langle \tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_2 | \xrightarrow{\tilde{U} \otimes \tilde{U}^\dagger} \\ | a_1 \otimes a_1 \rangle \langle \tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_1 | \end{aligned} \quad (158)$$

与希尔伯特空间相比较,这里,本文想强调的采用 RHS 空间的好处:它允许自厄米算符可以有复数本征谱和广义本征向量,如扩展希尔伯特空间中的分布函数,它提供了一种自然地描述不可逆动力学过程的框架.

4.5 广义态例子

为了使上述介绍的广义空间的方法可行,有必要构造一个具体的 RHS 空间来引进量子密码术.现提供 2 个例子来说明怎样构造 RHS 中的广义态或

者密度算符.不同的 RHS 可以通过引进 Hardy 空间来实现.

首先,当波函数 $|\phi_j^{(k)}\rangle \in H$ 是谐振子的一个本征函数,可以构造所有的 $\phi^{(k)}$

$$|\phi^{(k)}\rangle = \sum_{j=1}^{n^{(k)}} \alpha_j |\phi_j^{(k)}\rangle \quad (159)$$

其中

$$\sum_{j=1}^{n^{(k)}} |\alpha_j|^2 (1+j)^p < \infty, \quad p = 0, 1, \dots \quad (160)$$

在原 Hilbert 空间的致密子空间 Φ 中, $\Phi \subset \mathcal{H}$, 其对偶子空间中的波函数为

$$\langle \phi^{(k)} | = \sum_{j=1}^{n^{(k)}} \alpha_j \langle \phi_j^{(k)} | \quad (161)$$

满足 RHS 结构: $\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi^\times$

另一个实现 RHS 量子密码术的例子是利用光子晶体中的纠缠态.考虑光子晶体中 N 个二能级原子与一个单模相互作用的哈密顿量

$$H = \sum_{j \neq k}^N J_{jk} \sigma_j^+ \sigma_k^- + \frac{\delta}{2} \sum_j^N \sigma_j^2 + g \sum_j (\sigma_j^+ a + a^+ \sigma_j^-) \quad (162)$$

式中, $\sigma_j^+ (\sigma_k^-)$ 表示第 $j(k)$ 个原子的原子激发; σ_j^z 表示第 j 个原子倒转; a, a^+ 为光子的产生和湮灭算符.

并且有关系 $\sigma_j^z \equiv |a_j\rangle \langle a_j| - |b_j\rangle \langle b_j|$, $\sigma_j^+ \equiv |a_j\rangle \langle b_j|$ 和 $\sigma_j^- \equiv |b_j\rangle \langle a_j|$ 满足自旋为 1/2 泡利矩阵代数, $|a_j\rangle$ 和 $|b_j\rangle$ 分别代表第 j 个高能级和低能级, 则哈密顿量的谱分解可写为

$$H = \sum_{j,k=1}^N \sum_n 2\sqrt{\frac{\delta^2}{4} + g^2} \cdot (|\Psi_{jkn}^+\rangle \langle \tilde{\Psi}_{jkn}^+| - |\Psi_{jkn}^-\rangle \langle \tilde{\Psi}_{jkn}^-|) \quad (163)$$

和

$$|\Psi_{jkn}^\pm\rangle \langle \tilde{\Psi}_{jkn}^\pm| \equiv \frac{1}{4} (|F_{jkn}^{ab\pm}\rangle + |F_{jkn}^{ba\pm}\rangle + |F_{jkn}^{aa\pm}\rangle + |F_{jkn}^{bb\pm}\rangle) (\langle \tilde{F}_{jkn}^{ab\pm}| + \langle \tilde{F}_{jkn}^{ba\pm}| + \langle \tilde{F}_{jkn}^{aa\pm}| + \langle \tilde{F}_{jkn}^{bb\pm}|) \quad (164)$$

其中, $\langle \Psi_{jkn}^\pm | \in (\Phi^\times \oplus \Phi)$ 和 $\langle \tilde{\Psi}_{jkn}^\pm | \in (\Phi \oplus \Phi^\times)$, $\Phi \subset L^2 \subset \Phi^\times$, ${}^\times \Phi \supset \Phi$, Φ 是希尔伯特空间 L^2 中的致密子空间, $F_{jkn}^{ab\pm}$ 为左右本征向量, 其已被规范化, $\langle \tilde{F}_{jkn}^{a\beta} | \tilde{F}_{jkn}^{a'\beta'} F_{jkn}^{a'\beta'} F_{jkn}^{a\beta} \rangle = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'}$, 对于 $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, 记为

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} (|\Psi_{jkn}^{ab-}\rangle + |\Psi_{jkn}^{ba-}\rangle + |\Psi_{jkn}^{aa-}\rangle + |\Psi_{jkn}^{bb-}\rangle) &= |0\rangle \\ \frac{1}{2} (|\Psi_{jkn}^{ab+}\rangle + |\Psi_{jkn}^{ba+}\rangle + |\Psi_{jkn}^{aa+}\rangle + |\Psi_{jkn}^{bb+}\rangle) &= |1\rangle \\ \frac{1}{2} (\langle \tilde{F}_{jkn}^{ab-}| + \langle \tilde{F}_{jkn}^{ba-}| + \langle \tilde{F}_{jkn}^{aa-}| + \langle \tilde{F}_{jkn}^{bb-}|) &= \langle \tilde{0}| \\ \frac{1}{2} (\langle \tilde{F}_{jkn}^{ab+}| + \langle \tilde{F}_{jkn}^{ba+}| + \langle \tilde{F}_{jkn}^{aa+}| + \langle \tilde{F}_{jkn}^{bb+}|) &= \langle \tilde{1}| \end{aligned} \right\} \quad (165)$$

且

$$\left. \begin{aligned} |\Psi_{jkn}^{(0)}\rangle &= |0\rangle \\ |\Psi_{jkn}^{(1)}\rangle &= |1\rangle \\ \langle \tilde{\Psi}_{jkn}^{(0)}| &= \langle \tilde{0}| \\ \langle \tilde{\Psi}_{jkn}^{(1)}| &= \langle \tilde{1}| \end{aligned} \right\} \quad (166)$$

所以, 有 $\langle \tilde{\Psi}_{jkn}^{(l)} | \Psi_{jkn}^{(m)} \rangle = \delta_{lm}$, $l, m = 0, 1$. 基于 $|\Psi_{jkn}^\pm\rangle \langle \tilde{\Psi}_{jkn}^\pm|$, 在广义函数空间可以构造两个非正交态 $\tilde{\rho}^{(\pm)}$ 以便在光子晶体带隙中操作量子密码术

$$\tilde{\rho}^{(\pm)} = \alpha^\pm |\Psi_{jkn}^\pm\rangle \langle \tilde{\Psi}_{jkn}^\pm| + \beta^\pm |\Psi_{jkn}^\mp\rangle \langle \tilde{\Psi}_{jkn}^\mp| \quad (167)$$

其中, $\alpha^+ \alpha^- + \beta^+ \beta^- = 0$, 满足关系式(134)~(137).

4.6 实现 Hardy 空间下的 RHS

不同的 RHS 可以通过限制 Hardy 空间的范围 $\mathcal{H}_\pm$ 来实现, 所有这些可能的 RHS 提供了丰富的资源来实现 RHS 中的量子密码术. 现举例说明. 假设 $H = H_0 + V$ 是描述相互作用粒子体系的哈密顿量, H_0 是描述自由的部分, V 是描述相互作用的部分, 然后, 一个 RHS 可以描述成 $\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi^\times$, 其中, $\mathcal{H}_0$ 定义为零动量态所在的希尔伯特空间. 具有以下的性质:

- $H_0 \Phi \subset \Phi$;
- H_0 在 Φ 实质自厄米的;
- H_0 在 Φ 上是连续算符.

为了找到实验空间 Φ , 可以通过么正算符 U

构造一个算符 $\hat{E} = UH_0U^{-1}$, 既然 U 是么正的, 假设 $\hat{E}$ 作用在一个空间 D 上同 Hamilton 算子 H 作用在实验空间 Φ 上性质相同, 则通过 Hardy 空间 $\mathcal{H}_\pm$, 空间 D 可以分成由 $D_\pm$ 构成:

- 任何 $\phi(E) \in D_+$ 被限制在 $\mathcal{H}_+$ 中一个函数的实线 R^+ 的正的部分上;
- 如果 $\phi(E) \in D_+$, 那么, $E^n \phi(E) \in D_+$, $n = 0, 1, \dots$;
- D_+ 是 $L^2(R^+)$ 中致密的子集, 等等, 所以

$$D_\pm \subset L^2(R^\pm) \subset (D_\pm)^\times$$

这样就提供了一个所期望的实验空间: $\Phi_- = U^{-1}D_+$ 和 $\Phi_+ = U^{-1}D_-$, 使我们能够有 1 个三联套的结构: $\Phi_{\pm} \subset H_0 \subset (\Phi_{\pm})^{\times}$,

这就说明存在 1 个完备的广义固有特征向量 $H_0, |E_{\pm}\rangle \in (\Phi_{\pm})^{\times}$, 所以

$$(H_0)^{\times} |E_{\pm}\rangle = E |E_{\pm}\rangle, \forall E \in R^+ \quad (168)$$

$$\langle \phi_{\pm} | \psi_{\pm} \rangle =$$

$$\int_0^{\infty} \langle \phi_{\pm} | E_{\pm} \rangle \langle E_{\pm} | \psi_{\pm} \rangle dE, \forall \phi_{\pm}, \psi_{\pm} \in \Phi_{\pm} \quad (169)$$

$$\langle \psi_{\pm} | E_{\pm} \rangle^* = \langle E_{\pm} | \psi_{\pm} \rangle \equiv \psi_{\mp}(E) \in D_{\mp} \quad (170)$$

因此, 获得 2 个完备的广义本征向量集合, 其对应的哈密顿量为 H_0 , 所在的扩展空间 $(\Phi_{\pm})^{\times}$ 的范围分别为上下复平面区域.

而且, 如果系统是共振的散射系统, 利用波算符 $\Omega^{\pm}$ 可以获得另外一个完备的广义本征态矢集合所

对应的哈密顿算子 H_1 , 这个算子通过空间 $(\Omega^{\pm})^{\times}$ 相似, 即 $H_1 = \Omega^{\pm} H_0 \Omega^{\pm} \in (\Omega^{\pm})^{\times}$, 则有

$$|E^{\pm}\rangle = (\Omega^{\pm})^{\times} |E_{\pm}\rangle, |E^{\pm}\rangle \in (\Omega^{\pm})^{\times} \quad (171)$$

$$(H_1)^{\times} |E^{\pm}\rangle = E |E^{\pm}\rangle \quad (172)$$

相关的 RHS 是

$$\Phi^{\pm} \subset \mathcal{H}_{ac} \subset (\Phi^{\pm})^{\times} \quad (173)$$

这里, $\mathcal{H}_{ac} \equiv \Omega^{\pm} \mathcal{H}_0$, 进一步, 通过定义

$$S_R \cap \mathcal{H}_{\mp} = \Delta_{\mp} \equiv F[S(R^{\pm})] \quad (174)$$

其中, $S(R^{\pm}) = \{R^{\mp} \text{ 中 } S \text{ 零向量的函数的集合}\}$, F 为傅立叶变换式. 如果这个映射被定义为 θ , 可以写为

$$\theta[\Delta_{\mp}] = D_{\mp} \quad (175)$$

和

$$\Delta_{\mp} \subset \mathcal{H}_{\mp} \subset (\Delta_{\mp})^{\times} \quad (176)$$

简而言之, 从 Hardy 空间 $\mathcal{H}_{\mp}$ 中构造的 RHS 结构可以由表 1 得出 (I. Antoniou, notice 1993).

表 1 Hardy 空间中构造的 RHS 结构

Tab.1 RHS structure constructed in the Hardy space

作用算子	泛函空间	性质
$H_1 = \Omega^{\pm} H_0 (\Omega^{\pm})^{-1}$	$\Phi^{\pm} \subset \mathcal{H}_{ac} \subset (\Phi^{\pm})^{\times} \Omega^{\pm} \uparrow \downarrow (\Omega^{\pm})^{-1}$	$(\Omega^{\pm})^+ = (\Phi^{\pm})^{-1}$
H_0	$U^{-1}(D_{\mp}) = \Phi_{\pm} \subset \mathcal{H}_0 \subset (\Phi_{\pm})^* U^{-1} \uparrow \downarrow U$	$U^+ = U - 1$
$\hat{E} = UH_0 U^{-1}$	$D_{\mp} \subset L^2(R^+) \subset (D_{\mp})^{\times} \theta \uparrow \downarrow \theta^{-1}$	$\theta^+ \neq \theta^{-1}$
$\theta^{-1} \hat{E} \theta$	$S_R \cap \mathcal{H}_{\mp} = \Delta_{\mp} \subset \mathcal{H}_{\mp} \subset (\Delta_{\mp})^{\times}$	

作为一种特殊的情形, 如果向量 $|Z_R^{\pm}\rangle$ 和 $|Z_R^{*\pm}\rangle$ 是联系共振极点 $Z_R = E_R - i\Gamma/2$ 和 $Z_R^* = E_R + i\Gamma/2$ 和自厄米哈密顿量 H 的广义本征向量, 且分别具有复本征值 Z_R 和 Z_R^* , 即

$$H^{\times} |Z_R^{\pm}\rangle = H^{\times} \left| E_R - i \frac{\Gamma}{2} \right\rangle_{\text{out}} = \left(E_R - i \frac{\Gamma}{2} \right) \left| E_R - i \frac{\Gamma}{2} \right\rangle_{\text{out}} \quad (177)$$

$$H^{\times} |Z_R^{*\pm}\rangle = H^{\times} \left| E_R + i \frac{\Gamma}{2} \right\rangle_{\text{in}} = \left(E_R + i \frac{\Gamma}{2} \right) \left| E_R + i \frac{\Gamma}{2} \right\rangle_{\text{in}} \quad (178)$$

那么, Γ 和 E_R 代表宽度和共振能量值, 相对应地, $|E_R - i\Gamma/2\rangle_{\text{out}}$ 是衰变 Gamow 向量, $|E_R + i\Gamma/2\rangle_{\text{out}}$ 是递增 Gamow 向量.

以上描述了希尔伯特空间两个混合态理论基础上的扩展到 RHS 中的量子密码术, 也提供运行这个理论, 使这个理论在 RHS 中有效的、充分的、必要的相关条件, 还讨论用扩展空间这个方法所带来的新规范

的特征, 并揭示没有扩展的定域中的量子密码术不具备绝对的安全性. 作者发现, 通过基于两个混合态构造的 RHS 量子密码术包含希尔伯特空间中量子密码术相同的性质. 但是, Eve 能够通过使用广义函数空间扩展技术来窃听希尔伯特空间中的量子密码信道而不会被监测到. 在广义函数空间, 一个非正交、非等距混合态中的非么正演化算符是可以构造的, 在这种情况下两个非正交态下的非克隆定理是无效的, 比如说, 复制两个非正交态的克隆机制是可以存在的. 这说明如果想成功实现量子密码术, 必须要考虑函数空间背景, 这是非常重要的, 物理学并没有内在的限制说, 量子力学一定要工作在希尔伯特空间中才是正确的, 对希尔伯特空间外的广义函数空间的研究是件非常有趣而重要的事情. 在本文中, 一种在 RHS 算式中构成的窃听策略的例子是利用一种谐振子; 另外 2 个例子是在 RHS 或者 RLS 中构造广义态或者密度算符, 对用 RHS 或者 RLS 算式构造出成功的窃听策略的物理意义还有待进一步研究.

5 结束语

总之,“统计物理子动力,其中真意有谁知? 投影算子多玄妙,复谱演绎现历史. 非么变换搭桥梁,空间扩张创新世. 相似网络呈全息,量子密钥反意持. 普氏 30 年磨一剑,发展还靠华夏支.”从某种意义上说,激励于不可逆悖论的子动力学曾经是一种有力的进展,在今天,正如广义相对论和量子力学的矛盾引起超弦理论和圈引力理论一样,那么,这个量子力学和热力学的矛盾还能引发什么,寄希望于网络科学的发展.

参考文献:

- [1] Eu B C. Nonequilibrium statistical mechanics [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [2] Thom R. Stabilité structurelle et morphogenèses: essai d'une théorie générale des modèles[M]. New York: Benjamin, 1972.
- [3] Glansdorff P, Prigogine I. Thermodynamics theory of structure, stability and fluctuations [M]. London: Wiley-Interscience, 1971.
- [4] Nicolis G, Prigogine I. Self-organization in nonequilibrium systems: from dissipative structures to order through fluctuations[M]. New York: John Wiley & Sons, 1977.
- [5] Antoniou I, Tasaki S. Generalized spectral decomposition of mixing dynamical systems[J]. Quan Chem, 1993, 46(3): 425 - 474.
- [6] 裘少明. 非平衡统计力学[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1989.
- [7] Balescu R. Equilibrium and nonequilibrium statistical mechanics [M]. New York: John Wiley and Sons Inc, 1975.
- [8] Bohm A. Quantum mechanics, foundations and applications[M]. 3rd ed. Berlin: Springer, 1994.
- [9] Bohm A, Gadella M, Kets D. Gamov vectors and gelfand triplets, lecture notes on physics [M]. Berlin: Springer, 1989.
- [10] Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of 'small-world' networks[J]. Nature, 1998, 393 (6684): 440 - 442.
- [11] Barabási A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks[J]. Science, 1999, 286 (5439): 509 - 512.
- [12] 毕桥, 方锦清. 网络科学和统计物理方法[M]. 北京: 北京大学出版社, 2011.
- [13] Bennett C H, Brassard G, Crepeau C, et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels[J]. Phys Rev Lett, 1993, 70(13): 1895 - 1899.
- [14] Gisin N, Ribordy G, Tittel W, et al. Quantum cryptography[J]. Rev Mod Phys, 2002, 74(1): 145 - 195.
- [15] Bi Q, Ruda H E, Zeng X H, et al. Extended space for quantum cryptography using mixed states[J]. Physica A, 2003, 320(1): 357 - 370.
- [16] Lo H K, Chau H F. Unconditional security of quantum key distribution over arbitrarily long distances [J]. Science, 1999, 283(5410): 2050 - 2056.
- [17] Shor P W, Preskill J. Simple proof of security of the BB84 quantum key distribution protocol[J]. Phys Rev Lett, 2000, 85(2): 441 - 444.
- [18] Biham E, Mor T. Security of quantum cryptography against collective attacks[J]. Phys Rev Lett, 1997, 78(11): 2256 - 2259.
- [19] Karpov K, Prigogine I, Petrosky T, et al. Friedrichs model with virtual transitions, exact solution and indirect spectroscopy[J]. Math Phys, 2000, 41(1): 118 - 131.
- [20] Antoniou I, Tasaki S. Generalized spectral decomposition of the β -adic baker's transformation and intrinsic irreversibility[J]. Phys A, 1992, 190(3/4): 303 - 329.
- [21] Alicki R, Lendi K. Quantum dynamical semigroups and applications[M]. Berlin: Springer, 1987.
- [22] Lidar D A, Bihary Z, Whaley K B. From completely positive maps to the quantum Markovian semigroup master equation[J]. Chem Phys, 2001, 268(1/2/3): 35 - 53.
- [23] Koashi M, Aimoto N. Quantum cryptography based on two mixed states[J]. Phys Rev Lett, 1996, 77(10): 2137 - 2140.
- [24] Duan L M, Guo G C. A probabilistic cloning machine for replicating two non-orthogonal states[J]. Phys Lett A, 1998, 243(5/6): 261 - 264.