

文章编号:1007-6735(2012)03-0263-04

基于逆向思维的圣彼得堡悖论数量模型研究及应用

孙文浩, 姚 俭

(上海理工大学 管理学院, 上海 200093)

摘要: 运用逆向思维的方法建立圣彼得堡悖论数量模型,并讨论样本规模对它的影响.从而避免决策过程中,由于对基率和样本大小不敏感引起的决策失误.将这一模型运用到实际问题中,解决产品或服务定价问题、决策问题及其对通货膨胀的影响.

关键词: 圣彼得堡悖论; 样本规模; 决策

中图分类号: N 949 **文献标志码:** A

St. Petersburg Paradox Quantity Model and Its Application Based on Reverse Thinking

SUN Wen-hao, YAO Jian

(Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The reverse thinking method was adopted to set up St. Petersburg paradox quantity model, and the influence of sample size was discussed to avoid decision making mistakes by not sensitive to the base rate and the sample sizes in the decision-making process. The model was applied in practical problems to solve the questions of product or service pricing and related decision makings, and to discuss these effects on inflation.

Key words: St. Petersburg paradox; sample size; decision-making

从1987年Santa Fe研究所专门组织把经济当作一个演化的复杂系统^[1]进行研究以来,对经济复杂性的研究日趋活跃,涌现了非均衡经济学^[2]、复杂性经济学^[3]等新的经济学,不仅在思想和方法上给出更加宽阔的视野,还使人们更好地认识和把握了真实的经济系统.产品和服务定价不能仅仅依靠生产成本、社会必要劳动时间,还要考虑供求关系、社会习俗、社会经济环境.通货膨胀也不仅仅是供给、需求以及货币投入量三者之间的关系,还受城乡结构、国家政策、国

际环境的影响.它们都是受众多因素影响的复杂经济系统,不是简单的线性关系,需要用系统科学的思想,借助数学、经济学、心理学等众多学科与非线性方法进行研究.钱学森也提出了创建系统科学、人体科学和思维科学^[4-5]的构想,运用其它学科和不同的思维方法,不仅能使问题得到更好的解决,还能使得原有的学科体系更加完善和丰富.本文运用逆向思维的方法,借用圣彼得堡悖论,分析样本规模大小对这些复杂的经济系统和决策判断的影响.

收稿日期: 2012-01-04

作者简介: 孙文浩(1988-),男,硕士研究生.研究方向: 系统工程. E-mail: sunwenhao727@126.com

姚 俭(联系人),男,教授.研究方向: 智能控制、模糊系统理论、系统工程. E-mail: yaojian@usst.edu.cn

1 圣彼得堡悖论数量模型

1713年,瑞士籍教授尼古拉·伯努利提出假定有一个掷硬币的游戏,规则有二:

a. 当硬币掷得是正面,有权利再掷,直到出现反面为止;

b. 付给掷得反面者 2^n 元, n 为你掷硬币的次数.

即若第一次就出现反面,掷硬币者只能得到2元,第二次出现反面得4元,第三次出现得8元,依此类推.那么人们愿意付多少赌金参与这一游戏,结果多数人不愿意付太多的赌金,几乎不超过10元.若按预期货币值计算,参与该游戏的收入是无穷大的,其计算式为

$$EV = 2(1/2)^1 + 4(1/2)^2 + 8(1/2)^3 + \dots + 2^n(1/2)^n = 1 + 1 + 1 + \dots + \infty$$

对于一个获益无穷大的游戏,人们却只愿付很少的赌金去玩,这就是著名的圣彼得堡悖论^[6].

圣彼得堡悖论提出已有近300年了,针对其提出的抵御方法有边际效应递减论、风险厌恶论、效应上限论和结果有限论^[7].本文用逆向思维的方法,建立圣彼得堡悖论数量模型,并探讨样本容量对它的影响;最后将其运用到实际问题中,解决产品或服务定价,相关决策问题,并讨论它对通货膨胀的影响.

从逆向思维角度研究圣彼得堡悖论,建立圣彼得堡悖论数量模型(以下简称圣彼得堡模型),把目标由人们愿意花多少赌金玩这个游戏转变为游戏制造者为游戏订多少赌金才能自己不赔钱.

1.1 模型的假设

等可能发生概率(即掷 $2n$ 次硬币,有 n 次为正, n 次为反).模型假设的依据为,掷硬币随机试验服从等可能概型.表1所示的掷硬币实验结果表明,样本数越大,本假设置信度越高.

表1 科学家的掷硬币实验结果

Tab.1 Experimental results of the coin toss by scientists

实验者	实验总次数/次	正面朝上的次数/次	正面朝上的次数/实验总次数
布丰	4 040	2 048	0.506 9
得摩根	4 092	2 048	0.500 5
费勒	4 092	4 979	0.497 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

1.2 模型建立

样本空间 $2n$ (先以 2^{10} 即 1 024 人参与游戏为样本空间分析);每人支付赌金 m 元.游戏制造者的支付模型如图1所示.

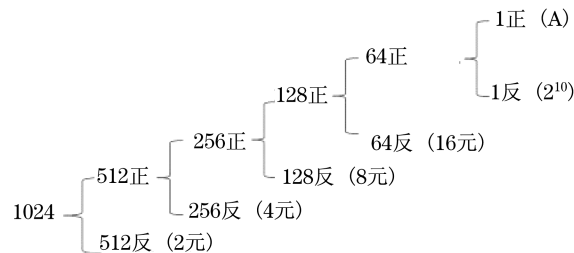


图1 圣彼得堡支付模型

Fig.1 Pay model of St. Petersburg

游戏参与者付出的赌金为 $1\,024m$, 游戏制造者为参与者支出的赌金为 $m = 512 \times 2 + 256 \times 4 + 128 \times 2^3 + 64 \times 2^4 + \dots + 1 \times 2^{10} + A$ (A 为不确定常数,且 $A \geq 2^{11}$) $= 10 \times 1\,024 + A = 10\,240 + A$. 游戏制造者不赔本等价于 $1\,024 \times m \geq 10\,240 + A$, 则 $m \geq 10 + A/2^{10} > 12$ (其中, $A/2^{10} > 2$).

当样本空间为 2^{11} 时 $m \geq 11 + A/2^{11} > 13$

当样本空间为 2^{12} 时 $m \geq 12 + A/2^{12} > 14$

.....

将样本空间扩展到 2^n , 再利用归纳与递推的方法,可推出游戏制造者不赔本的条件为 $m \geq n + A/2^n$, 其中, $A \geq 2^{n+1}$ ($A/2^n > 2$);其直角坐标如图2所示.

图2中, x 为参与游戏人数, $x = 2^n$; y 为价格, $y = n + A/2^n$, 则 $y = \log_2^x + A/x$.

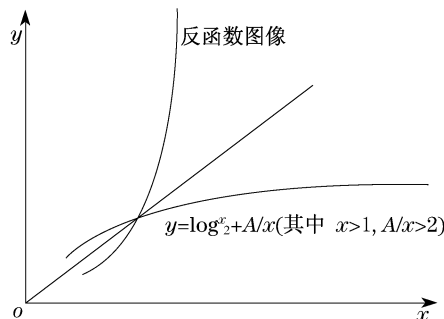


图2 $y = \log_2^x + A/x$ 曲线图

Fig.2 Graph $y = \log_2^x + A/x$

1.3 模型结论

a. 模型结果与模型的样本容量大小有关,即游戏制造者订的赌金多少,要取决于多少人参与游戏,赌金过高,没人会参与,赌金低(或者说参与游戏的人超过订赌金所参照的样本容量),则会赔本.

b. 受样本容量的限制,模型结果并不是无穷大的,当样本容量为 2^{33} (约等于 86 亿人) 已经超过全球人口总数了. 所以许多风险厌恶论的专家认为用 25 元的费用冒险参与游戏是不明智的,虽有得大奖的机会,但可能性太低.

c. 形如 $y = \log x$ 的曲线增长,当 x 增长两倍, y 值才能上升一格,随着样本容量的增大, y 值对 x 的变化越来越不敏感.

2 实例验证

现实生活中,通常人们都认识不到随着样本规模的扩大,随机变量的样本均值的方差减小得有多快. 但这对决策过程是非常重要的. 根据认知心理学的“小数定律”,人们通常会忽视样本大小的影响,认为小样本和大样本具有同样的期望值. 这一基本偏差是人总是倾向于运用小数法则,即认为小样本和大样本的经验均值具有相同的概率分布,其实这违反了概率论中的大数定律.

例如,在特维尔斯基和卡尼曼 1974 年的著名实验中,实验对象被给出这样一个问卷:一个城镇里有一家大医院和一家小医院. 大医院每天约有 45 个婴儿出生,小医院每天约有 15 个婴儿出生. 正如人们所知,所有婴儿中男孩约占 50%,但具体的百分比每天都会有差异. 有时高于 50%,有时低于 50%. 在一年内,两家医院都登记了超过 60% 的出生婴儿是男孩的天数. 被实验者被问及哪家医院这样的天数更多一些:a. 大医院. b. 小医院. c. 两家医院相同(即在 5% 的差异范围之内)^[8]. 大部分人都选了 c,即两家医院相当. 而简单统计告诉人们小医院比在大医院更可能见到 60% 的男性婴儿;抽样理论也证明小医院超过 60% 的婴儿是男孩的天数是大医院同类情况的 3 倍. 就像掷 10 次硬币,6 次是正面是很常见的,而掷 1 000 次硬币,出现 600 次正面却不是常见的.

3 圣彼得堡模型的应用

3.1 模型对产品或服务定价的启示

在实际生活中有些产品或服务符合圣彼得堡模型,例如电话,自从 1876 年亚历山大·贝尔获得电话的发明专利到如今,世界上约有 7.5 亿电话用户,其中还包括 1 070 万因特网用户分享着这个网络. 如果只有两个人安装电话,那么他们所能获得的服务效益(相当于圣彼得堡模型中可能获得的收益)将

很少,即只能两人之间通话. 然而随着样本规模的扩大(越来越多人安装电话),它的服务效益也不是无止境扩大. 随着信息技术的发展,移动通讯设备手机的问世,因手机具有上网、娱乐等功能,扩大了使用者的样本规模,使人们取得更多的服务效益,开始逐渐替代家庭固话.

随着中国人口老龄化的加剧,保险公司推出各种养老保险,每一家保险公司都承诺能在未来为投保人群提供可观的养老保障,那么这些保障能否实现,以及人们应该为这种服务投入多少资金是人们关心的问题. 保险公司只有在将其从受保群众那里募集的资金进行再投资过程中,再投资的回收率高于向群众承诺的回报率,这条资金链才能正常运行. 否则会导致两种结果:一是因资金链条断裂而破产,二是导致“庞氏骗局”,即用后来投资者的钱给前面的投资者以回报. 2009 年,我国 80 岁以上的老年人口 1 899 万,今后每年以 100 万增加;60 岁以上的人口 1.6 714 亿,比 2008 年净增 725 万,占总人口 12.5%. 而中国养老金账户投资的收益率不到 2%,面对高于收益率的 CPI(2.2%),再加之通货膨胀的影响,形成了福利的巨大损失. 这就给保险行业提供了警示,应该考虑各方面的变化,制定合理的养老保险回报率.

3.2 模型对心理决策的影响

决策过程中由于受到样本规模大小的影响,人们会因偶然性的原因做出错误决策. 例如“赌徒谬误”中赌徒不愿相信自己运气一直不好;体育迷对“手热”现象的偏好. 特维尔斯基和卡尼曼 1971 年研究也表明,心理学研究者也会成为“小额数量法则”的受害者,因为他们相信样本事件更能代表其总体,科学家过分相信初始样本的结论,经常粗略地高估实验结果的可重复性^[9].

现假设收到一份免费的投资者时事通讯,它预测接下来的 3 个月中股市将下跌,并建议卖掉股票,你没有理会这一建议,但股市真的下跌了. 3 个月后又收到一份这份免费的时事通讯,这次它预测接下来的 3 个月股票将上涨,你又没理会,但它又预测对了. 第三份免费的时事通讯建议在接下来的 3 个月买进股票并再一次预测对了. 经过这 9 个月,你收到一份来自时事通讯请求订阅该通讯的信函,指出过去的 9 个月他们一直提供大量免费的建议,如果想继续获得建议就必须支付一笔小数额的定购费. 很多人被它过去一贯的准确预测所打动,欣然订购. 另一个角度考虑这一问题:假定出版商出版 8 种金融时事通讯,每种由不同专家负责,第一期 4 种预测

股市会上涨,4种预测股市会下跌.预测下跌的是正确的,而预测上涨的失去了生意.余下的4种预测正确的通讯在第二期上2种预测上涨,2种预测下跌,经过第二期只剩下2种金融时事通讯,第三期一种预测上涨,另一种预测下降^[10].3种都预测正确的时事通讯与事实相符,似乎他们对金融市场有独到的见解.这样人们忽略了它的样本规模,却选则信任偶然因素导致的后果.

3.3 模型对通货膨胀的启示

市场价格存在管理学中的“蝴蝶效应”:某些产品受人为或市场调节原因,价格上涨,而互为替代品的商品因为替代性不强,或者受市场潜意识的影响也竞相提价,导致互为替代品对价格与供需量的调节完全丧失,这样容易引起一连串的连锁反应,造成全行业的物价上涨,从而使货币贬值,对通货膨胀也造成很大影响.由圣彼得堡模型曲线图 $y = \log^x + A/x$ 可看出,需求量 x 右移对价格 y 的影响很小.而由其反函数曲线则表明,价格的波动对需求量的影响很大.这就启示人们在发挥市场资源配置的自我调节作用时,需要制定合理的价格范围,尽量减少价格大幅波动对通货膨胀(紧缩)的危害.仅对通货膨胀来说,通过“限购”可以暂时将样本规模限制在一定份额内,既能限制 x (主要指人为故意囤货引起的需求量变动) 大幅增长,又能在价格 y 的值大幅上涨时,将需求量控制在一个比它本身小的样本规模内,既防止市场范围内大的损伤规避恶性循环,又为政府宏观调控延长了准备时间.2011年4月30日北京出台“国十条实施细则”:从5月1日起,北京家庭只能新购一套商品房.这是全国首次提出的家庭购房套数“限购令”,随后房产限购在全国范围内一二线城市展开,相信此举能阻止房地产泡沫膨胀趋势.

4 结 论

借助圣彼得堡悖论,用逆向思维的方法,建立了

圣彼得堡模型.通过样本规模对数增长的特性,讨论了样本规模对合理的产品或服务定价、相关决策问题的影响作用,旨在为一些经济现象提供理论依据,为社会问题提供参照的解决方案.本模型在理论依据方面借助特维尔斯基和卡尼曼的著名实验与理论,以及规避“代表性启发方式”的方法.模型显示决策过程中要充分考虑到样本规模,既要借助样本容量大小规避风险,又要通过样本容量变不利趋势为有利趋势,不要落入决策陷阱.

参考文献:

- [1] Anderson P, Arrow K, Pines D. The economy as an evolving complex system [M]. Redwood: Addison Wesley, 1988.
- [2] Arthur W, Durlauf S, Lane D. The economy as an evolving complex system II [M]. Redwood: Addison Wesley, 1997.
- [3] Arthur W. Complexity and the economy[J]. Science, 1999, 284(5411): 107 - 109.
- [4] 钱学森. 系统科学、思维科学和人体科学[J]. 自然杂志, 1981, 4(1): 3 - 9.
- [5] 钱学森. 关于思维科学[M]. 上海: 上海人民出版社, 1986.
- [6] Bernoullie M. Papers of the imperial academy of science in Petersburg[J]. The Economics, 1738, 22(3): 175 - 192.
- [7] 张铁声. 从悖论到新奇的真理论消解悖论的一般方法[J]. 晋阳学刊, 2000, 32(3): 32 - 35.
- [8] Tversky A, Kahneman D. Judgment under uncertainty: heuristics and biases[J]. Science, 1974, 185: 1124 - 1131.
- [9] Tversky A, Kahneman D. The belief in the “law of numbers” [J]. Psychological Bulletin, 1971, 76: 105 - 110.
- [10] Bazerman D. Judgment in managerial decision making [M]. 6nd ed. Beijing: Post & Telecom Press, 2007: 15 - 28.