

文章编号:1007-6735(2012)03-0267-05

一类具有变人口规模的含时滞 SIS 流行病模型的全局稳定性

翟院青, 原三领, 袁艳燕
(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 在文献[1]讨论的一类总人口变化且含有时滞的 SIS 流行病模型而得到的各类平衡点局部渐近和无病平衡点全局渐近稳定的结论基础上,进一步考虑疾病流行的持续性.利用构造 Liapunov 函数的方法,得到了地方平衡点全局渐近稳定的一个充分条件.

关键词: SIS 流行病模型; 地方病平衡点; 持续性; 全局渐近稳定

中图分类号: O 175.1; N 94 **文献标志码:** A

Global Stability of SIS Epidemiologic Model with Delay and Variable Population Size

ZHAI Yuan-qing, YUAN San-ling, YUAN Yan-yan
(College of Science, Shanghai University for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: An SIS epidemiologic model with delay and variable population size was studied in one of our previous paper, where the local stability of all kinds of equilibria and global stability of the disease-free equilibrium were discussed. On this basis, the persistence of the disease was further considered. By constructing Liapunov functions a sufficient condition of the global stability of endemic equilibrium was provided.

Key words: SIS epidemic model; endemic equilibrium; persistence; global stability

文献[1]讨论了具有变人口规模含积分时滞的 SIS 流行病模型

$$\left. \begin{aligned} I(t) &= I_0(t) + \int_0^t \beta [N(u) - I(u)] \cdot \\ &\quad I(u)P(t-u)e^{-(d+\epsilon)(t-u)} du \\ N'(t) &= A - dN - \epsilon I \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, $I(t)$ 、 $N(t)$ 分别为 t 时刻的染病者和总人

口. 模型中所有参数均为正常数: A 为人口的常数迁入, 并假设迁入的均为易感者; β 为传播系数; d 、 ϵ 分别为人口的自然死亡率和因病死亡率. $P(t)$ 为染病者患病 t 单位时间后仍为染病者的比例. 在模型(1)中, 若假设每个染病者个体的染病期为常数, 则模型(1)将成为一个与之等价的微分差分方程. 在文献[1]中, 确定了疾病传播的基本再生数, 得到了

收稿日期: 2010-10-30
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10871129); 上海市教委创新基金资助项目(09YZ208)
作者简介: 翟院青(1987-), 男, 硕士研究生. 研究方向: 生物数学. E-mail: zhaiyuanqing@163.com
原三领(联系人), 男, 教授. 研究方向: 生物数学. E-mail: math-ysling@163.com

无病平衡点全局渐近稳定以及地方病平衡点局部渐近稳定的条件. 此类含时滞流行病模型的地方病平衡点全局稳定性的证明对从事流行病建模和研究的工作者来说历来是一件非常棘手的事情, 现有的工作大多局限于通过构造 Liapunov 函数的方法来证明^[2-8]. 本文将在文献[1]的基础上进一步探讨疾病传播的持续性以及地方病平衡点全局渐近稳定的条件.

1 模型

假设每个染病个体的染病期为一常数 ω , 即 $P(t)$ 为一段函数

$$P(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, \omega] \\ 0 & t \in [\omega, \infty) \end{cases}$$

则模型(1)成为与之等价的微分差分方程

$$\left. \begin{aligned} I'(t) &= \beta[N(t) - I(t)]I(t) - \beta[N(t - \omega) - I(t - \omega)]I(t - \omega)e^{-(d+\epsilon)\omega} - (d + \epsilon)I(t) \\ N'(t) &= A - dN - \epsilon I \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

定义

$$\Omega = \{(I, N) | 0 \leq I \leq N, 0 < N\}$$

由文献[1]知, 疾病的基本再生数为

$$R_0 = \beta \left(\frac{A}{d} \right) \frac{1 - e^{-(d+\epsilon)\omega}}{d + \epsilon}$$

且模型(2)有下面的结论:

引理 1 对于模型(2)从 Ω 中出发的解, 下面结论成立:

a. 如果 $I_0(0) = 0$, 则对所有的 $t \geq 0$ 有 $I(t) \equiv 0, N(t) \rightarrow A/d (t \rightarrow \infty)$;

b. 如果 $N(0) \geq I_0(0) > 0$, 则对所有的 $t > 0$ 有 $N(t) > I(t) > 0$.

引理 2 模型(2)总存在无病平衡点 $(0, A/d)$. 如果 $R_0 \leq 1$, 则模型没有其它平衡点; 如果 $R_0 > 1$, 则模型还存在一个地方病平衡点

$$(I_e, N_e) = \left(\frac{A(R_0 - 1)}{(d + \epsilon)R_0}, \frac{1}{d + \epsilon} \left[1 + \frac{\epsilon}{dR_0} \right] A \right)$$

引理 3 如果 $R_0 < 1$, 无病平衡点 $(0, A/d)$ 在区域 Ω 内全局渐近稳定; 如果 $R_0 > 1$, 无病平衡点 $(0, A/d)$ 在区域 Ω 内不稳定.

引理 4 a. 如果 $R_0 \geq 2 + \epsilon/d$ 或 $1 < R_0 \leq 3$, 则地方平衡点 (I_e, N_e) 局部渐近稳定; b. 如果 $\epsilon/d \leq 1$, 则对于所有的 $R_0 > 1$, 地方平衡点 (I_e, N_e) 局部渐近稳定.

2 流行病的持续性

令 $M_1 = \frac{A}{d}, M_2 = \frac{A}{d + \epsilon}$. 注意到 $N(t) > I(t) \geq 0 (t > 0)$, 则

$$A - (d + \epsilon)N \leq N' < A - dN$$

故 $M_2 \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq M_1$.

令 $I_1 = M_2 - M_1/R_0$, 且假设 $I_1 > 0$. 取 η 满足 $0 < \eta \leq I_1$, 则有

$$R_0(M_2/M_1)(1 - (I_1 - \eta/2)/M_2) > 1$$

设 $(I(t), N(t))$ 为模型(2)初值满足 $I_0(0) > 0$ 的解, 则下面的结论:

引理 5 如果 $I_1 > 0$, 对于任意的 $t_0 > 0$, 不可能对所有的 $t > t_0$ 有 $I(t) < I_1 - \eta$.

证明 假设引理 5 的结论不成立, 则存在 $t_0 > 0$ 与 $t_1 (t_1 > t_0 + \omega)$, 对于 $t \geq t_1 - \omega$, 有

$$I(t) < I_1 - \eta \text{ 与 } N(t) - I(t) =$$

$$N(t) \left(1 - \frac{I(t)}{N(t)} \right) \geq M_2(1 - (I_1 - (\eta/2))/M_2)$$

将其代入积分方程(与模型(2)中第一个方程等价), 得

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_{t-\omega}^t \beta[N(u) - I(u)]I(u)e^{-(d+\epsilon)(t-u)} du \geq \\ &\beta \int_{t-\omega}^t M_2(1 - \frac{I_1 - (\eta/2)}{M_2})I(u)e^{-(d+\epsilon)(t-u)} du \end{aligned}$$

令 $I_e = \min_{t \in [t_1, t_1 + \omega]} I(t)$, 则对所有的 $t \geq t_1$, 有 $I(t) \geq I_e$. 否则, 存在 $t_2 (\geq t_1 + \omega)$, 使得 $I(t_2) = I_e$ 且对所有的 $t_1 \leq t \leq t_2$ 有 $I(t) \geq I(t_2)$. 故

$$I(t_2) \geq \beta M_2(1 - \frac{I_1 - (\eta/2)}{M_2})I(t_2).$$

$$\frac{1 - e^{-(d+\epsilon)\omega}}{d + \epsilon} = R_0 \frac{M_2}{M_1} (1 - \frac{I_1 - (\eta/2)}{M_2})I(t_2)$$

所以 $R_0 \frac{M_2}{M_1} (1 - (I_1 - \frac{\eta}{2})/M_2) \leq 1$, 与 $R_0 \frac{M_2}{M_1} (1 - (I_1 - \frac{\eta}{2})/M_2) > 1$ 矛盾.

取常数 R_1 满足 $1 < R_1 < R_0 \frac{M_2}{M_1} (1 - (I_1 - \frac{\eta}{2})/M_2)$, 则对于任意的 $t \geq t_1 + \omega$ 有 $I(t) > I_e$

R_1 . 注意到 $I(t_1 + \omega) \geq \beta M_2(1 - (I_1 - \frac{\eta}{2})/M_2) \int_{t_1}^{t_1 + \omega} I_e e^{-(d+\epsilon)(t_1 + \omega - u)} du \geq I_e R_1$. 如果上述结论不成立, 则存在 $t_3 \geq t_1 + \omega$, 使得 $I(t_3) = I_e R_1$ 且对所有的 t_1

$+ \omega \leq t \leq t_3$ 有 $I(t) \geq I_e R_1$. 另一方面在区间 $[t_1 + \omega, t_3]$ 上, 有

$$I(t) \geq \beta M_2 (1 - (I_1 - \frac{\eta}{2}) / M_2) \int_{t-\omega}^t I_e e^{-(d+\epsilon)(t-u)} du = \\ R_0 \frac{M_2}{M_1} I_e (1 - (I_1 - \frac{\eta}{2}) / M_2) > I_e R_1$$

与 $I(t_3) = I_e R_1$ 矛盾, 故上面结论成立. 由归纳法知在区间 $[t_1 + k\omega, \infty)$ 上有 $I(t) > I_e R_1$. 所以当 t 充分大时有 $I(t) \geq I_1 - \eta$, 这与 $I(t) < I_1 - \eta (t \geq t_1)$ 矛盾. 故引理 5 得证.

定理 1 假设 $R_0 > \max\{\frac{\epsilon}{d+1}, 1 + \frac{d}{\epsilon}\}$, 则存在一个正常数 p , 使得模型 (2) 的每个正解满足 $\liminf_{t \rightarrow \infty} I(t) > p$.

证明 注意到 $R_0 > 1 + \frac{d}{\epsilon}$ 意味着 $I_1 > 0$. 假设 $I(t^*) = I(t^* + q) = I_1 - \eta$, $I(t) \leq I_1 - \eta (t^* \leq t \leq t^* + q)$. 其中 t^* 足够大, 使得

$$N(t) - I(t) = N(t) (1 - \frac{I(t)}{N(t)}) \geq$$

$$M_2 (1 - I_1 - \frac{\eta}{2} / M_2), \quad t^* \leq t \leq t^* + q$$

因为模型 (2) 的解一致有界, 故 $I(t)$ 一致连续, 所以存在 $\tau (0 < \tau < \omega)$ (τ 与 t^* 无关), 使得 $I(t) \geq \frac{I_1 - \eta}{2} (t^* \leq t \leq t^* + \tau)$. 如果 $q \leq \tau$, 结论自然成立. 下面考虑 $\tau < q \leq \omega$ 的情况. 对于 $t^* + \tau \leq t \leq t^* + q$, 有

$$I(t) = \int_{t-\omega}^t \beta [N(u) - I(u)] I(u) e^{-(d+\epsilon)(t-u)} du \geq$$

$$\int_{t^*}^{t^* + \tau} \beta [N(u) - I(u)] I(u) e^{-(d+\epsilon)(t-u)} du >$$

$$\beta M_2 \left[1 - \frac{I_1 - \eta}{2} / M_2 \right] \frac{I_1 - \eta}{2} e^{-(d+\epsilon)\omega} \tau \equiv P_l$$

定义 $p = \min\left(\frac{I_1 - \eta}{2}, P_l\right)$, 易知 $I(t) \geq p (t^* \leq t \leq t^* + q)$. 如果 $q > \omega$, 类似引理 5 的证明可证 $I(t) \geq p (t^* \leq t \leq t^* + q)$. 由引理 5 可知, 对于模型 (2) 的正解 $(I(t), N(t))$ 需要考虑两种情况: a. t 充分大时有 $I(t) \geq I_1 - \eta$; b. 当 t 充分大时, $I(t)$ 在 $I_1 - \eta$ 上下震荡. 对于第一种情况 $\liminf_{t \rightarrow \infty} I(t) > p$, 结论成立; 对于第二种情况, 对所有足够大的 t , $I(t)$ 的最小值比 p 大. 由于 p 与模型的正解无关, 故定理 1 得证.

3 地方平衡点的全局渐进稳定性

首先, 对传染者人数的最终下界给出估计. 令

$$I_2 = \left(\frac{\beta A}{(d + \epsilon)^2} - 1 \right) \frac{Ad}{d^2 + \beta A}$$

$$I_3 = \min(I_1, I_2)$$

$$I_4 = I_3 - \frac{\beta \alpha M_1^2 \omega}{4}$$

引理 6 假设 $R_0 > \frac{\epsilon}{d} + 1$ 且 $I_4 > 0$, 则对于任意的 $\eta > 0$, 当 t 充分大时, 都有 $I(t) \geq I_4 - \eta$.

证明 首先, 假设 $I_3 = I_1$. 由引理 5, 对于所有充分大的 t 不可能都有 $I(t) < I_3 - \eta$. 如果 $I(t) \geq I_3 - \eta (t$ 充分大), 结论显然成立. 如果 $I(t)$ 在 $I_3 - \eta$ 左右震荡 (t 充分大时), 则存在足够大的 t_4, t_5 , 使得

$$I(t_4) = I(t_5) = I_3 - \eta$$

$$\text{且 } I(t) = I_3 - \eta (t_4 < t < t_5)$$

下面考虑 $t_4 - t_5 \geq \omega$ 的情况. 如果 $I_l = \min_{t \in [t_4, t_4 + \omega]} I(t)$, 由引理 5 的证明过程, 可知

$$I(t) \geq I_l (t_4 < t < t_5)$$

首先对 I_l 的值进行估计. 为此, 考虑与模型 (2) 等价的模型

$$\left. \begin{aligned} S'(t) &= A - dS(t) - \beta S(t)I(t) + \\ &\quad \beta \alpha S(t - \omega)I(t - \omega) \\ I'(t) &= \beta S(t)I(t) - \beta \alpha S(t - \omega) \cdot \\ &\quad I(t - \omega) - (d + \epsilon)I(t) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中, $S(t)$ 为 t 时刻易感者的人数, 满足 $N(t) = S(t) + I(t)$, 这里 $\alpha = \exp(-(d + \epsilon)\omega)$, 因为 $S'(t) > A - dS(t) - \beta S(t)I(t) = A - dS(t) - \beta S(t)(N(t) - S(t)) > A - dS(t) - \beta S(t) \cdot$

$$N(t) > A - (d + \beta \frac{A}{d}) S(t)$$

故对充分大的 t , 有 $\frac{Ad}{d^2 + \beta A} \leq S(t) \leq \frac{A}{d}$. 由模型 (3)

的第二个方程, 得

$$I'(t) = \frac{I(t)}{N(t)} ((\beta N(t) - d - \epsilon) S(t) - \\ (d + \epsilon) I(t)) - \beta \alpha S(t - \omega) I(t - \omega) \geq \\ \frac{d}{A} \left[\left(\beta \frac{A}{d + \epsilon} - d - \epsilon \right) S(t) - (d + \epsilon) I(t) \right] \cdot \\ I(t) - \beta \alpha \frac{(S(t - \omega) + I(t - \omega))^2}{4} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{A} \left[\left(\beta \frac{A}{d+\epsilon} - d - \epsilon \right) S(t) - (d + \epsilon) I(t) \right] \cdot \\ & I(t) - \beta \alpha \frac{N(t-\omega)^2}{4} \geq \frac{d}{A} \cdot \\ & \left[\left(\beta \frac{A}{d+\epsilon} - d - \epsilon \right) \frac{Ad}{d^2 + \beta A} - (d + \epsilon) I(t) \right] \cdot \\ & I(t) - \beta \alpha \frac{A^2}{4d^2} \end{aligned}$$

对于 $t_4 < t < t_4 + \omega$, 据 $I(t) < I_3 < I_2$, 可得 $I'(t) \geq -\beta \alpha \frac{A^2}{4d^2}$, 因此, 有

$$I(t) \geq I_3 - \eta - \beta \alpha \frac{A^2}{4d^2} = I_4 - \eta, \\ (t_4 < t < t_4 + \omega)$$

故 $I_t \geq I_4 - \eta$. 即证当 $I_3 = I_1$ 时, 命题成立. 同理可证 $I_3 = I_2$ 时, 结论也成立, 引理 6 得证.

下面分析模型(2)地方平衡点的全局稳定性. 在下文中总假设 $R_0 > \frac{\epsilon}{d} + 1$. 模型(3)存在唯一的地方

平衡点为 (S_e, I_e) , 其中 $S_e = \frac{A}{dR_0}$, $I_e = \frac{A(R_0 - 1)}{(d + \epsilon)R_0}$.

模型(3)可以写成为

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta[S(t)(I(t) - I_e) + I_e(S(t) - S_e)] + \\ & \quad \beta \alpha [S(t - \omega)I(t - \omega) - I_e + \\ & \quad I_e(S(t - \omega) - S_e)] - d(S(t) - S_e) \\ I'(t) &= \beta[I(t)(S(t) - S_e) + S_e(I(t) - I_e)] - \\ & \quad \beta \alpha [I(t - \omega)(S(t - \omega) - S_e) + \\ & \quad S_e(I(t - \omega) - I_e)] - (d + \epsilon)(I(t) - I_e) \end{aligned} \quad (4)$$

令 $V_1 = S - S_e - S_e \ln(S/S_e) + I - I_e - I_e \ln(I/I_e)$.

则 V_1 沿着模型(4)解的全导数为

$$\begin{aligned} V_1' |_{(4)} &= - \left(\beta \frac{I_e}{S(t)} + \frac{d}{S(t)} \right) (S(t) - S_e)^2 - \\ & \quad \left(\frac{d + \epsilon}{I(t)} - \beta \frac{S_e}{I(t)} \right) (I(t) - I_e)^2 - \\ & \quad \beta \alpha \frac{I(t - \omega)}{I(t)} (I(t) - I_e)(S(t - \omega) - S_e) + \\ & \quad \beta \alpha \frac{S(t - \omega)}{S(t)} (S(t) - S_e)(I(t - \omega) - I_e) - \\ & \quad \beta \alpha \frac{S_e}{I(t)} (I(t) - I_e)(I(t - \omega) - I_e) + \\ & \quad \beta \alpha \frac{I_e}{S(t)} (S(t) - S_e)(S(t - \omega) - S_e) \leq \\ & \quad - \left(\beta \frac{I_e}{S(t)} + \frac{d}{S(t)} \right) (S(t) - S_e)^2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d + \epsilon}{I(t)} - \beta \frac{S_e}{I(t)} \right) (I(t) - I_e)^2 + \beta \alpha \frac{I_e}{2S(t)} \cdot \\ & (S(t) - S_e)^2 + \beta \alpha \frac{I_e}{2S(t)} (S(t - \omega) - S_e)^2 + \\ & \beta \alpha \frac{I(t - \omega)}{2I(t)} (I(t) - I_e)^2 + \beta \alpha \frac{I(t - \omega)}{2I(t)} \cdot \\ & (S(t - \omega) - S_e)^2 + \beta \alpha \frac{S_e}{2I(t)} (I(t) - I_e)^2 + \\ & \beta \alpha \frac{S_e}{2I(t)} (I(t - \omega) - I_e)^2 = \\ & - \frac{1}{S(t)} \left[\beta I_e + d - \frac{\beta \alpha (S(t - \omega) + I_e)}{2} \right] \cdot \\ & (S(t) - S_e)^2 - \frac{1}{I} \left[d + \epsilon - \right. \\ & \left. \beta S_e - \frac{\beta \alpha (I(t - \omega) + S_e)}{2} \right] \cdot \\ & (I(t) - I_e)^2 + \beta \alpha \frac{I_e}{2S} (S(t - \omega) - S_e)^2 + \\ & \beta \alpha \frac{I(t - \omega)}{2I} (S(t - \omega) - S_e)^2 + \\ & \beta \alpha \frac{S(t - \omega)}{2S} (I(t - \omega) - I_e)^2 + \beta \alpha \frac{S_e}{2I} \cdot \\ & (I(t - \omega) - I_e)^2 \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{d}{A} \left[\beta I_e + d - \frac{\beta \alpha (\frac{d}{A} + I_e)}{2} \right] (S(t) - S_e)^2 - \\ & \frac{d}{A} \left[d + \epsilon - \beta S_e - \frac{\beta \alpha (\frac{d}{A} + S_e)}{2} \right] (I(t) - I_e)^2 + \\ & \left[\beta \alpha \frac{I_e(d + \beta)}{2A} + \beta \alpha \frac{\frac{d}{A}}{2(I_1 - \eta)} \right] (S(t - \omega) - S_e)^2 + \\ & \left[\beta \alpha \frac{\frac{d}{A}(d + \beta)}{2A} + \beta \alpha \frac{S_e}{2(I_1 - \eta)} \right] (I(t - \omega) - I_e)^2 \end{aligned}$$

再令 $V = V_1 + V_2$, 其中

$$\begin{aligned} V_2 &= \left[\beta \alpha \frac{I_e(d + \beta)}{2A} + \beta \alpha \frac{\frac{d}{A}}{2(I_1 - \eta)} \right] \cdot \\ & \quad \int_{t-\omega}^t (S(u) - S_e)^2 du + \\ & \quad \left[\beta \alpha \frac{\frac{d}{A}(d + \beta)}{2A} + \beta \alpha \frac{S_e}{2(I_1 - \eta)} \right] \cdot \\ & \quad \int_{t-\omega}^t (I(u) - I_e)^2 du \end{aligned}$$

计算 V 沿着模型(4)解的全导数,得

$$V' \leq -\frac{A}{d} \left[\beta I_e + d - \frac{\beta \alpha \left(\frac{A}{d} + I_e \right)}{2} - \frac{\beta \alpha I_e (d + \beta)}{2A} - \frac{\beta \alpha \frac{A}{d}}{2(I_1 - \eta)} \right] (S(t) - S_e)^2 - \frac{A}{d} \left[d + \epsilon - \beta S_e - \frac{\beta \alpha \left(\frac{A}{d} + S_e \right)}{2} - \frac{\beta \alpha \frac{A}{d} (d + \beta)}{2A} - \frac{\beta \alpha S_e}{2(I_1 - \eta)} \right] (I(t) - I_e)^2 \quad (5)$$

$$\text{令 } m = \frac{A}{d} \left[\beta I_e + d - \frac{\beta \alpha \left(\frac{A}{d} + I_e \right)}{2} - \beta \alpha \frac{I_e (d^2 + \beta A)}{2d^2} - \frac{\beta \alpha A^2}{2d^2 I_4} \right]$$

$$n = d + \epsilon - \beta S_e - \frac{\beta \alpha \left(\frac{A}{d} + S_e \right)}{2} - \frac{\beta \alpha A (d^2 + \beta A)}{2d^3} - \frac{\beta \alpha S_e A}{2d I_4}$$

如果 $m > 0$ 且 $n > 0$, 在 $\eta > 0$ 足够小的情况下, 式(5)关于变量 $(S - S_e)$, $(I - I_e)$ 定负. 下面定理 2 是本文的主要结论.

定理 2 如果以下条件成立:

$$R_0 > 1, I_1 > 0, m > 0, n > 0$$

则模型(3)的地方病平衡点全局渐近稳定.

注: 易见当 α 足够小且 $d + \epsilon > \beta S_e$ 时, 定理 2 的条件显然满足.

5 结 论

在文献[1]所研究的 SIS 流行病模型的基础上

对疾病流行的持续性以及地方病平衡点全局稳定性做了进一步探讨. 研究结果表明: 当 $R_0 \geq 1 + (\epsilon/d)$ 时, 疾病会持续流行, 从而形成地方病. 通过构造恰当的 Liapunov 泛函, 得到了地方病平衡点是全局渐近稳定的一个充分条件. 对于所有的 $R_0 \geq 1$ 地方病平衡点也许都是全局渐近稳定的, 这有待下一步继续研究.

参考文献:

- [1] 袁艳燕, 原三领, 翟院青. 一类具有变人口规模的含时滞 SIS 流行病模型的稳定性分析[J]. 上海理工大学学报, 2012, 34(1): 27-31.
- [2] Wang W, Ma Z. Global dynamics of an epidemic model with time delay [J]. Nonlinear Analysis: Real World Application, 2002, 3(3): 365-373.
- [3] Wang W. Global behavior of an SEIRS epidemic model with time delays [J]. Applied Mathematics Letters, 2002, 4(15): 423-428.
- [4] Hethcote H W, Driessche P V. Two SIS epidemiologic models with delays [J]. J Math Biol, 2000, 40(1): 3-26.
- [5] Yuan S, Han L, Ma Z. Analysis of an SIS epidemiologic model with variable population size and a delay [J]. Appl Math J Chinese Univ Ser B, 2003, 18(1): 9-16.
- [6] Yuan S, Ma Z. Study on an SIS epidemiologic model with time variant delay [J]. System Science and Complexity, 2002, 15(3): 299-306.
- [7] 原三领, 马知恩, 韩茂安. 一类含时滞的 SIS 流行病模型的全局稳定性 [J]. 数学物理学报, 2005, 25(3): 349-356.
- [8] Yuan S, Ma Z. Global stability and Hopf bifurcation of an SIS epidemic model with time delays [J]. System Science and Complexity, 2001, 14(3): 327-336.