

文章编号:1007-6735(2012)03-0272-05

弱拟充足半群

高振林, 邢晓丹

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 引进弱拟充足半群的概念, 这是介于富足半群类与充足半群类之间的一类半群. 讨论无零元且有乘充足断面的弱拟充足半群的性质, 得到有乘充足断面的富足半群是弱拟充足半群的等价条件.

关键词: 富足半群; 完全单半群; 弱拟充足半群; (乘)充足断面

中图分类号: 20M15 **文献标志码:** A

Weakly Quasi-adequate Semigroups

GAO Zhen-lin, XING Xiao-dan

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The concept of weakly quasi-adequate semigroups was introduced. It is a kind of semigroup intervening between abundant semigroup and adequate semigroup. The properties and structure of such a semigroup without zero with a multiplicative adequate transversal were investigated. It is concluded that the condition of equivalence is that the abundant semigroup with a multiplicative adequate transversal is the weakly quasi-adequate semigroups.

Key words: abundant semigroup; complete simple semigroup; weakly quasi-adequate semigroups; multiplicative adequate transversal

1 乘充足断面的定义

半群 S 上的格林 $*$ -关系 L^* 和 R^* 定义为:

a. $L^* b$ 当且仅当 $\forall x, y \in S, ax = ay \Leftrightarrow bx = by$;

b. $R^* b$ 当且仅当 $\forall x, y \in S, xa = ya \Leftrightarrow xb = yb$.

易知, $L \subseteq L^*, R \subseteq R^*$ 且 $L^* \upharpoonright_{\text{Reg}(S)} = L, R^* \upharpoonright_{\text{Reg}(S)} = R^{[1]}$.

在半群 S 中, 每个 L^* -类和每个 R^* -类至少含

有一个幂等元, 则称 S 是富足的; 若富足半群 S 中的幂等元集 $E(S)$ 形成半格, 则称 S 是充足的, 这时对 $\forall a \in S, \exists a^+ \in E(S)$, 有 $a^+ \in L_a^*$, 且 $\exists a^* \in E(S)$, 使得 $a^* \in R_a^*$; 若富足半群 S 的每个 $\mathcal{H}^*$ -类有且仅有一个幂等元, 则称 S 是超富足的, 这里 $\mathcal{H}^* = L^* \wedge R^*$; 若富足半群 S 的幂等元集形成子带, 则称 S 是拟充足的.

设 S 是富足半群, 它的幂等元集为 $E(S)$, T 是 S 的富足子半群. 若对 T 中所有的 $a, \exists e \in T \cap E(S)$, 使得 $aL^*e(aR^*e)$, 则称 T 为 S 的左(右) $*$ -子半群. 如果 T 既是左 $*$ -子半群, 又是右 $*$ -子

收稿日期: 2010-05-13

作者简介: 高振林(1949-), 男, 教授. 研究方向: 半群理论. E-mail: zlgao@sina.com

半群,那么,称 T 为 S 的 $*$ -子半群.

富足半群 S 的充足 $*$ -子半群 S^0 称为充足断面,若对于 $\forall x \in S, \exists \mid x^0 \in S^0, e, f \in E(S)$, 使得 $x = ex^0f$, 其中, $eL^*x^{0+}, fR^*x^{0*} (x^{0+}, x^{0*} \in E(S))$. 则满足条件的幂等元 e, f 是由 x 和 eR^*xL^*f 唯一确定^[1]. 用 e_x 表示 e , 用 f_x 表示 f , 如果对 $\forall x, y \in S, f_x e_y \in E(S^0), (f_x e_y)^0 \in E(S^0)$, 则称充足断面 S^0 为乘的(弱乘的).

由文献[2]可知,充足半群不一定是它自身的充足断面. 假如充足半群 T 是它自身的充足断面,那么, T 称为断面充足半群.

许多学者关注一个重要的广义正则半群类——富足半群类,并且也研究出带有不同充足断面的富足半群.

本文引进弱拟充足半群类,给出其基本概念,讨论其基本性质. 同时证明出无零元且有乘充足断面的富足半群是弱拟充足的充分必要条件,以此来研究无零元且有乘充足断面的弱拟充足半群.

2 有充足断面的富足半群的性质

本文明确必要的记号,给出需要的结论. 详见文献[1-5]

设 S 为富足半群, S^0 是 S 的一个充足断面,定义集合

$$I = \{e_x \mid x \in S\}, \quad \Lambda = \{f_x \mid x \in S\}$$

显然, I 和 Λ 的定义是对偶的. 因此,对于 I 的任何结论,都有 Λ 的相应结论. 现只讨论集合 I . 由文献[1-3,5]知引理1.

引理1 设 S 为有充足断面 S^0 的富足半群,则

a. $I = \{e \in E(S) \mid e = ee^0\}$;

b. $\forall x \in S, x = x^{00}, e_x^0 = f_x^0 = x^{0*}, f_x^0 = e_x^0 = x^{0+}$;

c. $\forall x, y \in S, (x^0 y^{0+})^+ = (x^0 y^0)^+, (x^{0*} y^0)^* = (x^0 y^0)^*$;

d. 如果 S^0 是乘的,有

(a) $\forall e \in E(S)$, 有 $e^0 \in E(S^0)$ 且 I 是有乘逆断面 $E(S^0)$ 的左正规带;

(b) $\forall x, y \in S$, 有 $(xy)^0 = x^0 f_x e_y y^0, e_{xy} = e_x (xy)^{0+}, f_{xy} = (xy)^{0*} f_y$;

(c) $\forall x, y \in S$, 有 $(xy)^0 = x^0 y^0$ 当且仅当 S 是拟充足;

(d) 若 S 是正则的,那么, S^0 是 S 的乘逆

断面;

(e) S 满足正则条件;

(f) S 同构于 W, S^0 同构于 T, W, T 定义为

$$W = \{(e, a, f) \in I \times S^0 \times \Lambda \mid e\varphi = a^+, f\psi = a^*\} \quad (1)$$

$$(e, a, f)(g, b, h) = (e(a(f * g)b)^+, a(f * g)b, (a(f * g)b)^* h) \quad (2)$$

其中, $x = a(f * g)b \in S^0, T = \{(a^+, a, a^*) \mid \forall a \in S^0\}$, 定义映射 $\varphi, \psi, *$

$$\varphi: I \rightarrow E(S^0), \quad \varphi|_{E(S^0)} = id_{E(S^0)}$$

$$\psi: \Lambda \rightarrow E(S^0), \quad \psi|_{E(S^0)} = id_{E(S^0)}$$

$$*: \Lambda \times I \rightarrow E(S^0), \quad f^0 * e = f * e^0 = f^0 e^0$$

$$\forall a, b \in E(S^0), a(f * e)b = (af) * (eb)$$

3 弱拟充足半群

由文献[6]知,半群同态映射 $\varphi: S \rightarrow T$ 称为 $*$ -同态映射,若对于

$$\forall a, b \in S, aL^*(S)b \Leftrightarrow a\varphi L^*(T)b\varphi, \text{ 且}$$

$$aR^*(S)b \Leftrightarrow a\varphi R^*(T)b\varphi$$

定义1 没有零元的富足半群 S 称为弱拟充足半群,如果存在断面充足半群 T 和一个满 $*$ -同态映射 $\varphi: S \rightarrow T$,使得对 $\forall \lambda \in E(T), \lambda\varphi^{-1}$ 是 S 的完全单子半群.

在上述定义中,若 S 是正则的,那么, S 称为拟纯正的;如果 T 满足条件

$$\forall \alpha, \beta \in T, \text{ 若 } e_\alpha = e_\beta, f_\alpha = f_\beta, \text{ 则 } \alpha = \beta$$

那么, S 称为自然富足半群;如果 T 是半格,那么, S 称为完全富足半群.

如果 S 有零元,那么,定义1中的完全单概念则意味着完全0-单.

若 S 为拟充足(或拟纯正)半群,则由文献[7]中的命题1.7和1.8可知,存在自然 $*$ -同态映射: $\varphi: S \rightarrow T = S/\sigma$, 其中, T 是断面充足半群,使得对 $\lambda \in E(T), S_\lambda = \lambda\varphi^{-1}$ 是 S 的完全(0-)单子半群. 由定义1可知, S 是弱拟充足半群. 这表明,弱拟充足半群概念是拟充足半群概念的推广.

现假设半群 S 是无零元且有充足断面 S^0 的富足半群.

引理2 **a.** $\forall x, y \in S$, 有 $(x^0 y^0)^+ = x^{0+} y^{0+}, (x^0 y^0)^* = x^{0*} y^{0*}$.

b. 如果 S 是弱拟充足的,那么,定义1中的 φ 是幂等可分的,即

$\forall e, f \in E(S)$, 有 $e\varphi = f\varphi \Rightarrow e = f$

证明 a. 对 $x, y \in S$, 由引理 1 中的 c 得, $(x^0 y^0)^+ = (x^0 y^{0+})^+$. 因为 $x^0 L^* x^{0+}, L^*$ 是 S 上的右同余, 故 $x^0 y^{0+} L^* x^{0+} y^{0+}, x^{0+} y^{0+} \in E(S^0)$. 由 L^* -类 $L_{(x^0 y^{0+})}^*$ 幂等元的唯一性可知, $(x^0 y^0)^+ = (x^0 y^{0+})^+ = x^{0+} y^{0+}$.

b. 设 $e, f \in E(S)$, $e\varphi = f\varphi$. 因 φ 是 $*$ -同态映射, 故由 $e\varphi L^* f\varphi, e\varphi R^* f\varphi$ 推得 $eL^* f, eR^* f$. 因为 $L^* \upharpoonright_{\text{Reg}(S)} = L, R^* \upharpoonright_{\text{Reg}(S)} = R$, 从而 eL_f, eR_f 并推得 $e\mathcal{H}_f$, 由 $\mathcal{H}$ -类中若有幂等元, 则唯一知, $e = f$.

引理 3 若 S^0 是乘的, 那么, S 是完全单半群当且仅当 S^0 是群.

证明 假设 S^0 是群, 则由引理 1 的 a 和 d 知

$$I = \{e \in E(S) \mid e^0 = 1, e1 = e\}$$

$$\Lambda = \{f \in E(S) \mid f^0 = 1, 1f = f\}$$

且 $W = I \times S^0 \times \Lambda$. 其中, 1 是群 S^0 的单位元. 若 $e, g \in I$, 有

$$eg = e1g1 = eg^0gg^0 = eg^0 = e1 = e$$

故 I 是左零半群. 同理, Λ 是右零半群, $W = I \times S^0 \times \Lambda$ 的乘法运算为

$$(e, x, f)(g, y, h) = (e, x(f * g)y, h)$$

由上可知, W 是 S^0 上关于正则矩阵 $P = (f * g)_{\Lambda \times I}$ 的 Rees 矩阵半群, 即 $W = M(S^0, I, \Lambda, P)$, 因此, S 是完全单半群.

反之, 假设 S 是完全单半群, 则知 S 是 Rees 矩阵半群 $M(G; \bar{I}, \bar{\Lambda}, P)^{[6]}$, 因 S^0 是 S 的乘充足断面, 由引理 1 中的 d 得 S^0 是逆半群, 它至少有一个幂等元. 若 $(i, p_{\lambda i}^{-1}, \lambda), (j, p_{\mu j}^{-1}, \mu) \in E(S^0)$, 则它们均是 $(\lambda, p_{\lambda i}^{-1}, i)$ 的正则逆元. 因 S^0 是 S 的逆断面, 所以, $(i, p_{\lambda i}^{-1}, \lambda) = (j, p_{\mu j}^{-1}, \mu)$, 即 S^0 只有一个幂等元, 因而 S^0 是群.

引理 4 若对 $x, y \in S$, 有 $(xy)^{0+} = x^{0+} y^{0+}$, $(xy)^{0*} = x^{0*} y^{0*}$. 令

$$\mu = \{(a, b) \in S \times S \mid (\forall e \in E(S^0)) a^{0+} e a^{0*} = b^{0+} e b^{0*}\} \quad (3)$$

则

a. μ 是 S 上的同余;

b. $\mu \cap (S^0 \times S^0)$ 是 S^0 上的幂等可分同余.

证明 a. 显然, μ 是等价关系. 设 $(a, b) \in \mu, c \in S$, 由条件等式知, $a^{0+} e a^{0*} = b^{0+} e b^{0*}$. 于是, 对 $e \in E(S^0)$, 有

$$\begin{aligned} (ac)^{0+} e (ac)^{0*} &= \\ a^{0+} c^{0+} e a^{0*} c^{0*} &= c^{0+} (a^{0+} e a^{0*}) c^{0*} = \end{aligned}$$

$$(c^{0+} b^{0+}) e (b^{0*} c^{0*}) = (bc)^{0+} e (bc)^{0*}$$

故 $(ac, bc) \in \mu$. 同理, $(ca, cb) \in \mu$, 进而 μ 是 S 上的同余.

b. 显然, $\mu \cap (S^0 \times S^0)$ 是 S^0 上的同余. 如果 $(e, f) \in \mu \cap (E(S^0) \times E(S^0))$, 则 $e^{0+} = e = e^{0*}$, $f^{0+} = f = f^{0*}$ 且对 $\lambda \in E(S^0)$, $e\lambda e = e\lambda = f\lambda f = f\lambda$. 特别取 $\lambda = e$ 代入, 有 $e = ee = fe$, 同样, 取 $\lambda = f$ 代入, 有 $f = ff = ef$. 因为, $E(S^0)$ 是半格, 有 $ef = fe$, 故 $e = f$.

半群 S 上的同余 ρ 称为充足半群同余, 如果 S/ρ 是充足半群.

现证 S 为弱拟充足半群的充分必要条件.

定理 1 设 S^0 是乘的, 则下列条件是等价的:

a. S 是弱拟充足半群.

b. $\forall x, y \in S$, 有 $(xy)^{0+} = (x^0 y^0)^+$, $(xy)^{0*} = (x^0 y^0)^*$.

c. 引理 4 中的关系 μ 满足条件,

(a) μ 是 S^0 上的幂等可分同余;

(b) μ 是 S 上的充足半群同余.

证明 a $\Rightarrow$ b. 假设 S 是弱拟充足半群, 则存在断面充足半群 T 和满 $*$ -同态映射 $\varphi: S \rightarrow T$, 使得对 $\forall \alpha \in E(T)$, $\alpha\varphi^{-1}$ 是 S 的完全单半群. 对 $\lambda \in T$, 用 S_λ 表示 $\lambda\varphi^{-1}$. 设 $\alpha \in E(T)$, $x = e_x x^0 f_x \in S_\alpha$, 则 $x\varphi = (e_x x^0 f_x)\varphi = (e_x \varphi)(x^0 \varphi)(f_x \varphi)$. 因 φ 是满 $*$ -同态映射, 由 $x\varphi = \alpha, e_x \varphi = e_\alpha = \alpha\alpha^{-1} = \alpha$, $f_x \varphi = f_\alpha = \alpha\alpha^{-1} = \alpha$, 得

$$\alpha = x\varphi = (e_x \varphi)(x^0 \varphi)(f_x \varphi) = \alpha(x^0 \varphi)\alpha$$

即 $x^0 \varphi \in V(\alpha)$.

于是, $x^0 \varphi = \alpha^{-1} = \alpha$ 且 $x^0 \in S_\alpha$, 即对于 $\forall \alpha \in E(T)$, S_α 都包含 S^0 的一个幂等元. 这表明 $S_\alpha \cap S^0$ 是 S_α 的乘充足断面. 由引理 3 知, 对 $\forall \alpha \in E(T)$, S_α 是群.

如果 $\lambda \in T, e_x x^0 f_x = x \in S_\lambda$, 因 φ 是满 $*$ -同态映射, 故

$$\begin{aligned} \lambda &= x\varphi = (e_x x^0 f_x)\varphi = \\ (e_x \varphi)(x^0 \varphi)(f_x \varphi) &= \lambda^+ (x^0 \varphi) \lambda^* \end{aligned}$$

因 T 是断面充足半群, 故对 $\lambda \in T, \exists \lambda^+ \in T$, 使得 $\lambda = \lambda^+ \lambda \lambda^*$. 所以 $x^0 \varphi = x\varphi = \lambda$. 即对 $\forall \lambda \in T$, 有 $x^0 \in S_\lambda$. 令 $x^0 \in S_\lambda, y \in S_t (\lambda, t \in T)$, 由引理 1 中的 d 知

$$\begin{aligned} f_x \varphi &= \lambda^*, e_y \varphi = t^+ \\ (xy)^0 &= x^0 f_x e_y y^0 \in S_{\lambda\lambda^* t^+ t} \end{aligned}$$

因 $\lambda = \lambda\lambda^*, t = t^+ t$, 且 φ 是满 $*$ -同态映射, 故

$(xy)^0 \in S_{\lambda t}, (xy)^{0+} = e_{(xy)^0} \in S_{e\lambda t} = S_{(\lambda t)^+}$. 另外, 由 $(x^0 y^0)\varphi = (x^0\varphi)(y^0\varphi) = \lambda t$ 知, $x^0 y^0 \in S_{\lambda t}$. 故 $(x^0 y^0)^+ = e_{x^0 y^0} \in S_{e\lambda t} = S_{(\lambda t)^+}$. 因 $S_{(\lambda t)^+} \cap S^0$ 是群, 故 $(xy)^{0+} = (x^0 y^0)^+$. 由引理 2 中的 a 知, $(xy)^{0+} = x^{0+} y^{0+}$ 成立.

同理, 对 $\forall x, y \in S, (xy)^{0*} = (x^0 y^0)^* = x^{0*} y^{0*}$ 成立.

b $\Rightarrow$ c. 假设对 $\forall x, y \in S, (xy)^{0+} = x^{0+} y^{0+}$, $(xy)^{0*} = x^{0*} y^{0*}$ 成立, 由引理 4 知, μ 是 S 上的同余, 且 $\mu \cap (S^0 \times S^0)$ 是 S^0 上的幂等可分同余. 可知 S/μ 是富足半群^[5]. 于是, 对 $x \in S$, 若 $f = x^{0+} x^{0*} \in E(S^0)$, 则有 $f^{0+} = f^+ = f = f^* = f^{0*}$, 并对 $\forall e \in E(S^0)$, 有 $f^+ ef^+ = x^{0+} ex^{0*}$. 于是, 对 $\forall x \in S$, 包含 x 的 μ -类有一个幂等元 $f \in E(S^0)$. 如果 $x\mu, y\mu$ 是 S/μ 的幂等元, 则 $\exists e, f \in E(S^0)$, 使得, 事实上, $x\mu = e\mu, y\mu = f\mu, e = x^{0+}, f = y^{0+}$, 于是

$$(x\mu)(y\mu) = (e\mu)(f\mu) = (ef)\mu = (fe)\mu = (f\mu)(e\mu) = (y\mu)(x\mu)$$

由此可知, S/μ 是富足半群. 即关系 μ 是 S 上的富足半群同余, 因此, μ 满足条件(a)和(b).

c $\Rightarrow$ a. 假设 μ 满足条件(a)和(b), 对于 $\forall x \in S$, 用 S_x 表示包含 x 的 μ -类. 显然, 对于 $\forall x \in S, x^0 \in S_x \cap S^0$ 且 S_x 是富足的, 故 $S_x \cap S^0$ 是 S_x 的富足断面. 又 S^0 是 S 的乘富足断面, 故 $S_x \cap S^0$ 也是 S_x 的乘富足断面. 由引理 4 知, $S_x \cap S^0$ 上有幂等可分同余 $\mu \cap ((S_x \cap S^0) \times (S_x \cap S^0))$. 所以, 对 $\forall x\mu \in E(S/\mu), S_x \cap S^0$ 有且只有一个幂等元 $x^{0+} x^{0*}$, 因此, 它是群. 由引理 3 知, 对 $\forall x\mu \in E(S/\mu), S_x$ 是完全单半群. 于是, 由定义 1 得, S 是弱拟充足半群.

现说明弱拟充足半群类真包含拟充足半群类和拟纯正半群类作为子类, 它也说明了有乘富足断面的弱拟充足半群的存在性.

例 1 在文献[8]中, $T = M^0(G; I, \Lambda, P)$ 是正则幂等生成半群, 它带有零元, 且含有一个乘半格断面 $T^0 = \{a, e\}$, 但 T 不是纯正的, 它的 Cayley 表为

T	a	b	c	d	e
a	a	b	a	b	e
b	a	b	e	e	e
c	c	d	c	d	e
d	c	d	e	e	e
e	e	e	e	e	e

T 中元的分解式

$$\begin{aligned} a &= a \cdot a \cdot a, b = a \cdot a \cdot b \\ c &= c \cdot a \cdot a, d = c \cdot a \cdot b \end{aligned}$$

$$e = e \cdot e \cdot e$$

考虑 T 上的 Rees 矩阵半群 $S = M(T, I, \Lambda, P)$, 其中, 矩阵 $P = \begin{pmatrix} b & e \\ b & a \end{pmatrix}$.

$$I = \Lambda = \{1, 2\}, \quad P = (p_{i\lambda})_{\Lambda \times I}, \quad p_{i\lambda} = q_i r_\lambda$$

$$q_i = \begin{cases} b & i = 1 \\ a & i = 2 \end{cases}, \quad r_\lambda = \begin{cases} b & \lambda = 1 \\ c & \lambda = 2 \end{cases}$$

S 的乘法运算

$$\begin{aligned} \forall (x)_{i\lambda}, (y)_{j\mu} \in S \\ (x)_{i\lambda}(y)_{j\mu} = (xp_{\lambda j}y)_{i\mu} \end{aligned} \quad (4)$$

通过计算, 有:

a. S 是有幂等元集 $E(S)$ 的半群, 其中

$$\begin{aligned} E(S) &= \{(e), (a)_{11}, (b)_{11}, (c)_{11}, \\ &\quad (x_{22}) \mid i \in \Lambda, x \in T, x \neq e\} \end{aligned}$$

$(e) = (e)_{i\lambda}$ 是零元 ($\forall i \in I, \lambda \in \Lambda$). 因

$$(c)_{12}, (b)_{22} \in E(S), (c)_{12}(b)_{22} = (d)_{12} \notin E(S)$$

故 $E(S)$ 不是带, 且元 $(d)_{11}, (d)_{12}, (d)_{21}$ 不是正则的. 因此, S 既不是正则的, 也不是拟充足的.

b. S 是富足的. 对 $\forall (x)_{i\lambda}, (y)_{j\mu} \in S$, 有

$$\begin{aligned} (x)_{i\lambda} L^* (y)_{j\mu} \Leftrightarrow \lambda = \mu \\ (x)_{i\lambda} R^* (y)_{j\mu} \Leftrightarrow i = j \end{aligned} \quad (5)$$

因此, S 的 L^* -类和 R^* -类可表为

$$(a)_{11} \in L_1^* \cap E(S), \text{ 有}$$

$$L_1^* = \{(x)_{i1} \mid x \in T, x \neq e, i \in I\}$$

$$(d)_{22} \in L_2^* \cap E(S), \text{ 有}$$

$$L_2^* = \{(x)_{i2} \mid x \in T, x \neq e, i \in I\}$$

$$(a)_{1\lambda} \in R_1^* \cap E(S), \text{ 有}$$

$$R_1^* = \{(x)_{1\lambda} \mid x \in T, x \neq e, \lambda \in \Lambda\}$$

$$(b)_{22} \in R_2^* \cap E(S), \text{ 有}$$

$$R_2^* = \{(x)_{2\lambda} \mid x \in T, x \neq e, \lambda \in \Lambda\}$$

由上可知, S 是富足的.

c. S 是弱拟充足的. 因对于 $(\lambda \in I, j \in \Lambda)$, 有 $p_{\lambda j} = q_\lambda r_j$, 存在 $S \rightarrow T$ 的映射 φ

$$\forall (x)_{i\lambda} \in S, \text{ 有 } (x)_{i\lambda}\varphi = \begin{cases} r_i x q_\lambda & x \neq e \\ e & x = e \end{cases} \quad (6)$$

由 $(a)_{12}\varphi = a, (b)_{11}\varphi = b, (c)_{22}\varphi = c, (d)_{21}\varphi = d, (e)\varphi = e$ 知, φ 是 $S \rightarrow T$ 的满射. 对 $(x)_{i\lambda}, (y)_{j\mu} \in S$, 有

$$[(x)_{i\lambda}(y)_{j\mu}]\varphi =$$

$$(xp_{\lambda j}y)_{i\mu}\varphi = r_i(xp_{\lambda j}y)q_\mu =$$

$$(r_i x q_\lambda)(r_j y q_\mu) = (x)_{i\lambda}\varphi \cdot (y)_{j\mu}\varphi$$

故 φ 是 $S \rightarrow T$ 的满同态映射. 由式(5)知, $(x)_{i\lambda} L^* (y)$

$\Leftrightarrow \lambda = \mu$, 所以

$$(x)_{i\lambda} L^*(b)_{11} L^*(y)_{j\lambda} \Leftrightarrow \lambda = 1$$

$$(x)_{i\lambda} L^*(c)_{22} L^*(y)_{j\lambda} \Leftrightarrow \lambda = 2$$

当 $\lambda = 1$ 时,

$$(x)_{i1} \varphi = \begin{cases} bxb & i = 1 \\ cxb & i = 2 \end{cases}$$

$$(y)_{j1} \varphi = \begin{cases} byb & j = 1 \\ cyb & j = 2 \end{cases}$$

$(b)_{11} \varphi = b$, 故

$$cxbL^*bxbL^*bL^*cybL^*byb$$

即 $(x)_{i1} \varphi L^*(y)_{j1} \varphi \Leftrightarrow (x)_{i1} L^*(y)_{j1}$. 剩余部分同样可经计算核准. 因此, φ 是满 $*$ -同态映射. 若 $x \in E(T^0) = T^0$, 则 $S_x = x\varphi^{-1}$ 如下:

$$S_e = \{(e), (c)_{11}, (c)_{12}, (d)_{11}, (d)_{12}\},$$

$$(S_e^2 = \{(e)\})$$

$$S_a = \{(a)_{12}, (b)_{12}\}, (S_a^2 = S_a)$$

又 $S_e^2 = \{(e)\}$ 和 $S_a^2 = S_a$, 故 S_e, S_a 是完全 0-单的. 由定义 1 知, S 是有零元的弱拟充足半群.

d. $S^0 = \{(e), (a)_{12}\} \cong T^0$, S^0 是 S 的乘充足断面.

由前面可知, $\varphi|_{S^0}$ 是 $S^0 \rightarrow T^0$ 的同构映射. 现只需证明对 S 中的任何一个元都可以唯一地写成以下符合要求的形式.

$$(e) = (e)(e)(e), \quad (e)^+ = (e) = (e)^*$$

$$(a)_{i\lambda} = (a)_{i2}(a)_{12}(a)_{1\lambda}$$

$$e_{(a)_{i\lambda}} = (a)_{i2}, \quad f_{(a)_{i\lambda}} = (a)_{1\lambda}$$

$$(b)_{i\lambda} = (a)_{i2}(a)_{12}(b)_{1\lambda}$$

$$e_{(b)_{i\lambda}} = (a)_{i2}, \quad f_{(b)_{i\lambda}} = (b)_{1\lambda}$$

$$(c)_{i\lambda} = (c)_{i2}(a)_{12}(a)_{1\lambda}$$

$$e_{(c)_{i\lambda}} = (c)_{i2}, \quad f_{(c)_{i\lambda}} = (a)_{1\lambda}$$

$$(d)_{i\lambda} = (c)_{i2}(a)_{12}(b)_{1\lambda}$$

$$e_{(d)_{i\lambda}} = (c)_{i2}, \quad f_{(d)_{i\lambda}} = (b)_{1\lambda}$$

因此, 对于 $(x)_{i\lambda}, (y)_{j\lambda} \in S$, 有 $f_{(x)_{i\lambda}} e_{(y)_{j\lambda}} \in E(S^0)$.

e. T 是定义 1 意义下的拟纯正半群.

设 $S_T = \{(e), (a)_{12}, (b)_{11}, (c)_{22}, (d)_{21}\}$, 显然, φ 是 $S_T \rightarrow T$ 的同构映射, S_T 是弱拟充足的 (因对 $S_T, S_e = \{(e)\}, S_a = \{(a)_{12}\}$), 故 T 也是弱拟充足的. 又 T 是正则的, 所以, T 是拟纯正的.

参考文献:

- [1] El-Qallali A. On the construction of a class of abundant semigroup [J]. Acta Math Hung, 1990, 56 (1/2): 77-91.
- [2] 高振林, 田丽. 一种广义富足半群[J]. 上海理工大学学报, 2011, 33(2): 198-204.
- [3] El-Qallali A. Abundant semigroup with a multiplicative type A transversal[J]. Semigroup Forum, 1993, 47 (1/2): 327-340.
- [4] El-Qallali A, Fountain J B. Quasi-adequate semigroups [J]. Proc Roy Soc Edinburgh, 1981, 91(A): 79-99.
- [5] Guo Xiaojang. Abundant Semigroups with a multiplicative adequate transversal[J]. Acta Math Sinica (English Series), 2002, 18(2): 229-244.
- [6] Howie M. An Introduction to Semigroup Theory[M]. London: Academic Press, 1976.
- [7] El-Qallali A. Quasi-Adequate semigroups[J]. Semigroup Forum, 1992, 44(3/4): 273-282.
- [8] Blyth T S, McFadden R. Regular semigroups with multiplicative inverse transversals[J]. Proc Roy Soc Edinburgh, 1982, 92(A): 253-270.