

文章编号:1007-6735(2012)03-0281-03

广义 Γ -环上模的 Morita 结构及其应用

俞淑萍

(上海医疗器械高等专科学校 基础部, 上海 200093)

摘要: 引进广义 Γ -环上模的 Morita 结构概念, 建立模的 Morita 结构理论及其构造 M , 应用它们给出左、右 Artin 单广义 Γ -环结构定理的证明.

关键词: 广义 Γ -环; 投射模; Morita 结构; 构造 M

中图分类号: O 153.3 **文献标志码:** A

Morita-structure of Generalized Γ -rings and Its Applications

YU Shu-ping

(Basic College, Shanghai Medical Instrumentation College, Shanghai 200093, China)

Abstract: The concept of Morita-structure of module on generalized Γ -rings was introduced and its theory and structure M were constructed. On this basis, a new proof of the structure theorem which is on left or right Artin simple generalized Γ -rings was provided.

Key words: generalized Γ -rings; project module; Morita-structure; structure M

文献[1]引进广义 Γ -环, 本文研究这种环上模的 Morita 结构及其应用. 该问题迄今尚未有人讨论过. 本文中出现的广义 Γ -环 R 均有 α -单位元, $\forall \alpha \in \Gamma$. 设 M 为 R -右模, N 为 R -左模, $\text{Hom}(M, N)$ 表示 M 到 N 的模同态集, $\text{End}(M)$ 表示模 M 自同态集. 本文中出现的不加定义的概念和符号见文献[1-2].

1 广义 Γ -环上模的 Morita 结构定义

根据结合环上模的 Morita 理论, 可以定义广义 Γ -环 R 上的模、 α -自由投射模、投射生成模及 α -张量积等概念. 本文省略这些概念的定义过程, 直接利用这些概念, 并不加证明地给出广义 Γ -环 R 上

模的相应结果.

定理 1 设 P 为 R -模, 则下列条件等价:

- P 为投射模;
- 任一短正合列 $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ 是点分裂的;
- P 为 α -自由模的直和因子, 即存在 α -自由模 F 与 R 模 P' 使 $P \oplus P' \sim F$.

定理 2 R -模 P 为投射模的充分必要条件是存在集

$$\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subseteq P$$

$$\{x_\lambda^* \mid \lambda \in \Lambda\} \subseteq P^* = \text{Hom}(P_R, R_R)$$

使得对任意 $x \in P$, 几乎有 $x_\lambda^*(x) = 0$, 且 $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda \alpha x_\lambda^*(x)$, 从而为有限和.

收稿日期: 2011-03-10

作者简介: 俞淑萍(1961-), 女, 讲师. 研究方向: 序半群. E-mail: yusp@smic.edu.cn

定理1和定理2可由广义 Γ -环上模的运算特性,仿照文献[3-4]中结合环相应结果的证明即可证得.本文省略它们的证明.

定义1 设 R', R 为广义 Γ -环, $M = R'M_R$, $M' = RM'_R$,若有 R - R -同态 τ 和 $R'-R'$ -同态 μ 为

$$\tau: M' \otimes_R M \rightarrow R, \quad m' \otimes_R m \mapsto (m, m')$$

$$\mu: M \otimes_{R'} M' \rightarrow R', \quad m \otimes_{R'} m' \mapsto [m, m']$$

它们满足:任意 $x, y \in M, x', y' \in M'$,

$$\text{a. } [x, y'] \alpha y = x \alpha (y', y);$$

$$\text{b. } x' \alpha (x, y') = (x', x) \alpha y'.$$

即下面的两个同态映射图1(a)和图1(b)可交换,则称 $(R, R', M, M', \tau, \mu)$ 为一个Morita结构.

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_R^a M \otimes_R^a M & \xrightarrow{1_M \otimes^a \tau} & M \otimes_R^a M \\ \mu \otimes_R^a 1_M \downarrow & & \downarrow \text{标准同构} \\ R \otimes_R^a M & \xrightarrow{\text{标准同构}} & M \end{array}$$

(a) 与条件a对应的同态映射交换图

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_R^a M \otimes_R^a M' & \xrightarrow{1_M \otimes^a \mu} & R \otimes_R^a M' \\ \tau \otimes_R^a 1_M \downarrow & & \downarrow \text{标准同构} \\ R \otimes_R^a M' & \xrightarrow{\text{标准同构}} & M' \end{array}$$

(b) 与条件b对应的同态映射交换图

图1 同态映射交换图

Fig.1 Homomorphic figure

2 构造 M

定理3 设 $M = M_R$ 为广义 Γ -环 R 上的(右)模,从 M 出发构造它的一个Morita结构,并称之为构造 M .

证明 令 $M^* = \text{Hom}(M_R, R_R)$, $R' = \text{End}(M_R)$,分别规定以下情形:

情形1 $\forall \alpha \in \Gamma, 1_\alpha \in C^1(R)$,设 $r'_1, r'_2 \in R', \beta \in \Gamma, m \in M$,规定

$$\begin{aligned} (r'_1 \beta r'_2) m &\triangleq r'_1 (r'_2 \beta 1_\alpha) = \\ (r'_1 r'_2 m) \beta 1_\alpha, 1'_\alpha: m &\mapsto m(1_\alpha) \end{aligned} \quad (1)$$

则对任意 $\nu \in \Gamma, x \in R$

$$\begin{aligned} (r'_1 \beta r'_2)(m \beta x) &= (r'_1 r'_2 m) \nu x \beta 1_\alpha = \\ (r'_1 r'_2 m) \alpha (1_\alpha \nu x) \beta 1_\alpha &= (r'_1 r'_2 m) \alpha 1_\alpha \beta 1_\alpha \nu x = \\ [(r'_1 r'_2 m) \beta 1_\alpha] \nu x &= [(r'_1 \beta r'_2) m] \nu x \end{aligned}$$

显然 $r'_1 \beta r'_2 \in \text{End}(M)$,故 $r'_1 \beta r'_2 \in$

$\text{End}(M_R)$.易验证 R' 关于这个结构构成广义 Γ -环. $1'_\alpha$ 为 R' 的 α -单位元,且 $1'_\alpha \in C(R')$.为区别于环 $\text{End}(M_R)$,将这个广义 Γ -环 R' 记为 $\text{End}_\Gamma(M_R)$,即 $R' = \text{End}_\Gamma(M_R)$.特别地,若仅对 α -而言,即 $\Gamma = \{\alpha\}$,就得到广义 α -环 $R'_\alpha \triangleq \text{End}_\Gamma(M_R)$.

情形2 若 $1_\alpha \in C(R), \exists \alpha \in \Gamma$,设 $r'_1, r'_2 \in R', \beta \in \Gamma, m \in M$,规定

$$(r'_1 \beta r'_2 m) \triangleq (r'_1 r'_2) m \beta, 1'_\alpha: m \mapsto m \quad (2)$$

则 R' 也为广义 Γ -环.

情形3 在情形1中,当 $r' \in R', m \in M, \beta \in \Gamma$ 时,规定

$$r' \beta m \triangleq r' (m \beta 1_\alpha) \quad (3)$$

则 M_R 为左 R' -模,即 $M = {}_{R'} M_R$.

情形4 在情形2中,当 $r' \in R', m \in M, \beta \in \Gamma$ 时,规定

$$r' \beta m \triangleq r'_m \quad (4)$$

则 M_R 为 R' -模,即 $M = {}_{R'} M_R$.

情形5 在情形1中,当 $y^* \in M^*, r' \in R', \beta \in \Gamma$ 时,规定

$$\left. \begin{aligned} (y^* \beta r') m &\triangleq y^* (r'_m \beta 1_\alpha) \\ (r \beta y^*) m &\triangleq r \beta (y^* m) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

则 $y^* \beta r' \in M^*$ 且 $M^* = {}_{R'} M_R^*$.

情形6 在情形2中,当 $y^* \in M^*, r' \in R', \beta \in \Gamma$ 时,规定

$$(y^* \beta r') m \triangleq (y^* r') m, (r \beta y^*) m \triangleq r \beta (y^* m) \quad (6)$$

则 $M^* = {}_{R'} M_R^*$.

对于情形1与情形2有下面的性质:

$$\begin{aligned} \text{a. } (y^*, m_1 + m_2) &= (y^*, m_1) + (y^*, m_2), \\ (y_1^* + y_2^*, m) &= (y_1^*, m) + (y_2^*, m); \end{aligned}$$

$$\text{b. } (y^*, m) \beta r = (y^*, m \beta r), (r \beta y^*, m) = r \beta (y^*, m);$$

$$\text{c. } (y^* \beta r', m) = (y^*, \beta r' m).$$

对于情形1,3,5,因 $1_\alpha \in C(R), 1'_\alpha \in C(R')$,故 α -张量积就是张量积,令

$$\tau: M^* \otimes_R M \rightarrow R, \quad \tau(y^* \otimes m) = (y^*, m)$$

$$\mu: M \otimes_{R'} M^* \rightarrow R', \quad \mu(m \otimes y^*) = [m, y^*]$$

其中, $[m, y^*]: m_1 \rightarrow m \alpha (y^*, m_1) = m \alpha (y^* m_1)$,则 τ 为 R - R -模同态,而 μ 为 $R'-R'$ -模同态.因

$$[m, y^*] m_1 = m \alpha (y^* m_1)$$

$$[m, y^*] \alpha m_1 = [m, y^*] \alpha 1_\alpha m_1 = [m, y^* \alpha m_1]$$

故 $[m, y^*] \alpha m_1 = m \alpha (y^* m_1)$.同样,有 $x^* \alpha [m, y] = (x^*, m) \alpha y^*$.故由定义1可知, $(R, R',$

$\text{End}_\Gamma(M_R), M, M^*, \tau, \mu$ 为一个 Morita 结构.

对于情形 2, 4, 6, 可以取 α -张量积作同态映射:

$$\tau: M^* \otimes_R^\alpha M \rightarrow R, \quad \tau(y^* \otimes^\alpha m) = (y^*, m)$$

$$\mu: M \otimes_{R'}^\alpha M^* \rightarrow R', \quad \mu(m \otimes^\alpha y^*) = [m, y^*]$$

其中, $[m, y^*]: m_1 \rightarrow m_\alpha(y^* m_1)$. 同样, $(R, R', M, M^*, \tau, \mu)$ 为一个 Morita 结构.

综合上述情形, 从 M 出发构造获得的 Morita 结构 $(R, R', M, M^*, \tau, \mu)$, 称为 M 的构造, 仍记为 M .

3 构造 M 的性质和应用

先证明构造 M 有以下性质.

定理 4 在构造 M 中, 若 τ, μ 是单射, 则

- $M_R, {}_{R'}M, M'_R, {}_R M'$ 均是投射模;
- τ, μ 是同构映射;
- 映射 $l: x' \mapsto l(x'), (l'(x'): M \rightarrow R; g \mapsto (x', y))$ 是 ${}_R M'_R$ 到 ${}_R M'_R$ 的双模同构映射;
- $C(R)$ 与 $C(R')$ 同构.

证明 仿照文献[4]可证得结论 a-d, 本文省略证明.

现应用定理 4, 给出左、右 Artin 单广义 Γ -环结构定理的另一个证明.

定理 5 设 R 为广义 Γ -环, 则下列条件等价:

- R 为左、右 Artin 单的^[1];
- R 为单的且含极小右理想;
- $L_\alpha \simeq D_n \simeq R_\alpha$, 其中, L_α 为 R 的左 α -算子环, R_α 为 R 的右 α -算子环, $\forall \alpha \in \Gamma, D_n$ 为除环 D 上的 n 阶方阵环.

证明 a $\Rightarrow$ b. 显然.

b $\Rightarrow$ c. 设 R 有极小右理想 I , 仿照文献[3]的引理 1 可得: 存在 $e_1 \in R, \epsilon \in \Gamma$, 使得 $f = e_1 \epsilon R$, $e_1 \epsilon_1 e_1 = e_1$, 且 R 有极小右理想的直和分解, $R = e_1 \epsilon_1 R + e_2 \epsilon_2 R + \cdots + e_n \epsilon_n R$. 其中, $e_i \epsilon_i e_i = e_i$, $e_i \epsilon_i R (i = 1, 2, \cdots, n)$ 均为极小右理想. 因此, 作为右 R -模, R 为既约右 R -模的直和, 且 I 为 R 的直和因子, 又显然 I 为有限生成的, 而 R 为 α -自由模, 于是, 由定理 1 可知, I 为有限生成投射模, 由定理 5 可知, $\tau(1) \neq 0$, 由 τ 为单的, 可知 $\tau(I) = R$, 即 I 为投射生成模. 按前文构造 M , 则有

$$(R, R' = \text{End}_\Gamma I_R, I, I^* = \text{Hom}(I_R, R_R), \tau, \mu)$$

是一个 Morita 结构, 现按情形 1, 3, 5 下的构造 M 与情形 2, 4, 6 下的构造 M , 分别证明定理 5 中的 c 成立.

若 M 是情形 1, 3, 5 下的构造, 则由 $\tau(I) = R$ 与 τ, μ 的定义可知, τ, μ 均为满射, 故定理 1 中各结论成立. 因 R 有 α -单位元 $1_\alpha, \forall \alpha \in \Gamma$, 由式(1), (3), (5)可知, $R'_\alpha = \text{End } I_{R'} = \text{End } I_{R'_\alpha}$, 且 R'_α 为除环. 由定理 4 得 I^* 为有限生成右 R' -模, 且 $L_\alpha \simeq \text{End } I_{R'}^* = \text{End } I_R^* \simeq D_n$, 存在除环 D 与正数 n . 又显然有 $R_\alpha \simeq L_\alpha$, 故有 $\text{End } I_R^* = \text{End } I_{R_\alpha}^*$.

若 M 是情形 2, 4, 6 下的构造, 则由式(2), (4), (6)可知, $1_\alpha \in C(R) (\exists \alpha \in \Gamma)$, 但由情形 2, $1'_\alpha \in C(R')$, 显然 $I_{R_\alpha}^*$ 有意义, 此时亦可证 $\text{End } I_R^* = \text{End } I_{R_\alpha}^*$, 从而式(5)成立. 事实上, 设 $\varphi \in \text{End } I_{R'}^*$, 显然, 有 $\varphi \in \text{End } I_{R'_\alpha}^*$; 反之, 设 $\varphi \in \text{End } I_{R'_\alpha}^*, \forall m^* \in I^*, r' \in R', \varphi(m^* \alpha r') = (\varphi m^*) \alpha r',$ 对 $\forall \beta \in \varphi, \varphi(m^* \beta r') = \varphi(m^* \alpha 1'_\alpha \beta r') = \varphi(m^*) \alpha 1'_\alpha \beta r' = (\varphi m^*) \beta r'$, 又显然 $\varphi \in \text{End } I^*$ 所以, $\varphi \in \text{End } I_R^*$, 于是, $\text{End } I_R^* = \text{End } I_{R_\alpha}^*$.

c $\Rightarrow$ a 因 $R_\alpha \simeq D_n$, 由文献[1]可知, R 为右 Artin 单的, 同样, 因 $R_\alpha \simeq D_n$, 可知 R 为左 Artin 单的, 故 R 为左、右 Artin 单的.

现给出一实例说明定理 5 的应用.

例 1 取除环 D 上 n 阶方阵环 $R = D_n$,

$\Gamma = \{\alpha \in D_n \mid \exists a \neq 1 \in D, \alpha = \text{diag}(a, a, \cdots, a)\}$
 $M = R^{(n)}, R' = \text{End}(M_R), M^* = \text{Hom}(M_R, R_R),$
 τ, μ 如前文中定义, 由定理 3 得 $(R, R', M, M^*, \tau, \mu)$ 为 M 的构造 M , 且满足定理 5 中的条件 c. 故由定理 5 可知, $R = D_n$ 是一个左、右 Artin 单的广义 Γ -环.

参考文献:

- [1] 高振林. 广义 Γ -环的交换条件[J]. 曲阜师范大学学报, 1987, 13(3): 205-208.
- [2] Gao Z L. On Rees matrix representations of abundant semigroups untri adequate transuersals[J]. Commun Korean Math Soc, 2009, 24(4): 481-500.
- [3] Nobusawa. On a generalization of ring theory[J]. Osaka J Math, 1964, 23(1): 81-89.
- [4] Jacobson N. Basic Algebra II [M]. San Fancisco: W H Freeman and Company, 1980.