

文章编号:1007-6735(2012)03-0284-05

不等式约束下 $AXA^* = B$ 的 Hermite 最小二乘解

张凤霞

(聊城大学 数学科学学院, 聊城 252059)

摘要: 利用线性 Hermite 矩阵函数 $A - BX - (BX)^*$ 的最大最小秩与惯性指数, 研究了 $Y - P$ 的最大最小秩与惯性指数, 其中 Y 为矩阵方程 $AXA^* = B$ 的 Hermite 最小二乘解, P 是给定的 Hermite 矩阵. 从而得到了 $Y > (<, \geq, \leq) P$ 的充要条件. 特别地, 给出了 Y 的最大最小秩与惯性指数以及存在 $AXA^* = B$ 的正定(负定、半正定、半负定)Hermite 最小二乘解的等价条件.

关键词: 矩阵函数; 矩阵方程; Hermite 最小二乘解; 秩; 惯性指数

中图分类号: O 151.21 **文献标志码:** A

The Hermitian Least-squares Solution of $AXA^* = B$ Subject to Inequality Restrictions

ZHANG Feng-xia

(School of Mathematics Science, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract: The maximal and minimal ranks and inertias of $Y - P$ were studied by utilizing the maximal and minimal ranks and inertias of linear Hermitian matrix function $A - BX - (BX)^*$, where Y was the least-square Hermitian solution of matrix equation $AXA^* = B$, and P was a given Hermitian matrix. The necessary and sufficient conditions of $Y > (<, \geq, \leq) P$ were obtained. In particular, the maximal and minimal ranks and inertias of Y were given, and equivalent conditions for existence of positive (negative, nonnegative, nonpositive) definite Hermitian least-square solution of matrix equation $AXA^* = B$ were achieved.

Key words: matrix function; matrix equation; Hermitian least-square solution; rank; inertia

近年来, 矩阵秩方法与惯性指数方法作为矩阵研究的一个有力工具越来越引起学者的重视, 该方法被大量应用到广义逆矩阵、矩阵方程、矩阵不等式以及统计量分析等问题的研究中, 该方法的运用将这些问题的研究推到了一个新的层面. 矩阵秩方法与惯性指数的方法都是田永革提出的, 其思想就是

将矩阵等式问题转化成秩的问题去解决^[1-6], 将矩阵不等式(Löwner partial ordering)的问题转化成惯性指数的问题去解决^[7-11]. 这看似简单的转化, 事实上富有深刻的思想内涵, 它将复杂的矩阵表达式的问题归结为简单的数字指标——秩与惯性指数, 刻画了一些通过以往方法无法解决的问题, 如

收稿日期: 2011-01-20

基金项目: 山东省教育厅科研发展计划资助项目(J09LA05)

作者简介: 张凤霞(1977-), 女, 讲师. 研究方向: 矩阵理论. E-mail: zhangfengxia@lcu.edu.cn

Guo、Wei 以及 Liu 在文献[12-15]中用此方法解决了逆序律、正序律、吸收律、左(右)星序以及极秩等问题,并且此方法也应用到统计量的估计上,更加深刻地刻画了统计量的性质^[16-18].

本文将利用线性 Hermite 矩阵函数 $A - BX - (BX)^*$ 的最大最小秩与惯性指数,研究矩阵方程 $AXA^* = B$ 的 Hermite 最小二乘解 Y 与给定的 Hermite 矩阵 P 之差的最大最小秩与惯性指数,从而得到了 $Y > (<, \geq, \leq) P$ 的充要条件. 特别地,给出了矩阵方程 $AXA^* = B$ 的 Hermite 最小二乘解的最大最小秩与惯性指数以及该矩阵方程存在正定、负定、半正定、半负定 Hermite 最小二乘解的等价条件.

1 预备知识

在本文中,用 $C^{m \times n}$ 表示全体 $m \times n$ 阶的复矩阵的集合, C_H^m 表示全体 $m \times m$ 阶 Hermite 复矩阵的集合, $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩, A^* , $R(A)$, A^+ 分别表示矩阵 A 的共轭转置、值域与 M-P 逆. 设矩阵 A 为 Hermite 矩阵,记 $i_+(A)$, $i_-(A)$ 分别表示矩阵 A 正惯性指数与负惯性指数,也即 A 的正特征值个数与负特征值个数,且显然有 $r(A) = i_+(A) + i_-(A)$. 同型的两个 Hermite 矩阵 A 和 B , 如果 $A - B$ 正定(负定、半正定、半负定),记为 $A > B$ ($A < B$, $A \geq B$, $A \leq B$). E_A , F_A 分别表示 $I - AA^+$, $I - A^+A$, 并且 $r(E_A) = m - r(A)$, $r(F_A) = n - r(A)$, 其中 $A \in C^{m \times n}$.

下面给出将用到的几个引理.

引理 1^[9] 设 $S = C^{m \times n}$, $H = C_H^m$, 则

a. 若 $m = n$, S 中存在非奇异矩阵的等价条件为 $\max_{X \in S} r(X) = m$.

b. 若 $m = n$, S 中所有矩阵非奇异的等价条件为 $\min_{X \in S} r(X) = m$.

c. $0 \in S$ 等价于 $\min_{X \in S} r(X) = 0$.

d. $S = \{0\}$ 等价于 $\max_{X \in S} r(X) = 0$.

e. S 中所有矩阵有相同的秩等价于 $\max_{X \in S} r(X) = \min_{X \in S} r(X)$.

f. H 中存在 $X > 0$ ($X < 0$) 等价于 $\max_{X \in H} i_+(X) = m$ ($\max_{X \in H} i_-(X) = m$).

g. H 中所有的矩阵满足 $X > 0$ ($X < 0$) 等价于 $\min_{X \in H} i_+(X) = m$ ($\min_{X \in H} i_-(X) = m$).

h. H 中存在矩阵满足 $X \geq 0$ ($X \leq 0$) 等价于 $\min_{X \in H} i_-(X) = 0$ ($\min_{X \in H} i_+(X) = 0$).

i. H 中所有的矩阵满足 $X \geq 0$ ($X \leq 0$) 等价于 $\max_{X \in H} i_-(X) = 0$ ($\max_{X \in H} i_+(X) = 0$).

j. H 中所有的矩阵有相同的正惯性指数等价于 $\max_{X \in H} i_+(X) = \min_{X \in H} i_+(X)$.

k. H 中所有的矩阵有相同的负惯性指数等价于 $\max_{X \in H} i_-(X) = \min_{X \in H} i_-(X)$.

引理 2^[19] 设 $A \in C^{m \times n}$, $B \in C_H^m$, 则 $AXA^* = B$ 有 Hermite 解的充要条件为 $R(B) \subseteq R(A)$ 或者 $AA^+B = B$. 在有 Hermite 解的条件下,其解为

$$X = A^+B(A^+)^* + F_A V + V^* F_A$$

其中, $V \in C^{n \times n}$ 为任意复矩阵.

引理 3^[3,11] 设 $A \in C_H^m$, $B \in C^{m \times n}$, 则

$$\max_{X \in C^{n \times m}} r[A - BX - (BX)^*] = \min \{m, r(P)\}$$

$$\min_{X \in C^{n \times m}} r[A - BX - (BX)^*] = r(P) - 2r(B)$$

$$\max_{X \in C^{n \times m}} i_{\pm}[A - BX - (BX)^*] = i_{\pm}(P)$$

$$\min_{X \in C^{n \times m}} i_{\pm}[A - BX - (BX)^*] = i_{\pm}(P) - r(B)$$

$$\text{其中, } P = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}$$

引理 4^[20] 设 A, B, C, D, P, Q 为使表达式 $D - CP^+AQ^+B$ 有意义的复矩阵, 则

$$r(D - CP^+AQ^+B) =$$

$$r \begin{pmatrix} P^*AQ^* & P^*PP^* & 0 \\ Q^*QQ^* & 0 & Q^*B \\ 0 & CP^* & -D \end{pmatrix} - r(P) - r(Q)$$

引理 5^[11] 设 $A \in C_H^m$, $B \in C^{m \times n}$, 则

$$r \begin{pmatrix} A & BF_P \\ F_P B^* & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ B^* & 0 & P^* \\ 0 & P & 0 \end{pmatrix} - 2r(P)$$

$$i_{\pm} \begin{pmatrix} A & BF_P \\ F_P B^* & 0 \end{pmatrix} = i_{\pm} \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ B^* & 0 & P^* \\ 0 & P & 0 \end{pmatrix} - r(P)$$

引理 6^[9] 设 $A \in C_H^m$, $B \in C^{q \times n}$, $P \in C^{q \times m}$, $D \in C_H^n$, 则

$$i_{\pm}(D - B^*(P^+)^+AP^+B) =$$

$$i_{\pm} \begin{pmatrix} -PAP^* & PP^*P & 0 \\ P^*PP^* & 0 & P^*B \\ 0 & B^*P & D \end{pmatrix} - r(P)$$

引理 7 设 $A \in C_H^m$, $B \in C_H^m$, $Q \in C^{m \times n}$, $P \in C^{m \times m}$, 则

$$\text{a. } i_{\pm}(\lambda A) = \begin{cases} i_{\pm}(A), \lambda > 0 \\ i_{\mp}(A), \lambda < 0 \end{cases}$$

$$\text{b. } i_{\pm} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = i_{\pm}(A) + i_{\pm}(B)$$

$$\text{c. } i_{\pm} \begin{pmatrix} 0 & Q \\ Q^* & 0 \end{pmatrix} = r(Q)$$

$$\text{d. 若 } R(A) = R(P^*), \text{ 则 } i_{\pm}(PAP^*) = i_{\pm}(A).$$

2 矩阵方程 $AXA^* = B$ 的最小二乘 Hermite 解的最大最小秩与惯性指数

设 $A \in C^{m \times n}$, $B \in C_H^m$, 若矩阵方程

$$AXA^* = B \quad (1)$$

无 Hermite 解, 可以考虑其 Hermite 最小二乘解, 也即是矩阵方程 $A^*AYA^*A = A^*BA$ 的 Hermite 解, 由引理 2 知此方程总是有 Hermite 解, 其解为

$$Y = (A^*A)^+ A^*BA((A^*A)^+)^* +$$

$$F_{A^*A}V + V^*F_{A^*A}$$

其中, $V \in C^{n \times n}$ 为任意矩阵. 下面记 $AXA^* = B$ 的全体 Hermite 最小二乘解为集合

$$S = \{Y = (A^*A)^+ A^*BA((A^*A)^+)^* +$$

$$F_{A^*A}V + V^*F_{A^*A}, V \in C^{n \times n}\}.$$

下面给出 $Y - P$ 的最大最小秩与惯性指数.

定理 1 设 $A \in C^{m \times n}$, $B \in C_H^m$, $P \in C_H^n$ 为给定的矩阵, Y 为矩阵方程 $AXA^* = B$ 的 Hermite 最小二乘解, 则

$$\max_{Y \in S} r(Y - P) = \min \{n, 2n + r(A^*BA - A^*APA^*A) - 2r(A)\}$$

$$\min_{Y \in S} r(Y - P) = r(A^*BA - A^*APA^*A)$$

$$\max_{Y \in S} i_{\pm}(Y - P) = n + i_{\pm}(A^*BA - A^*APA^*A) - r(A)$$

$$\min_{Y \in S} i_{\pm}(Y - P) = i_{\pm}(A^*BA - A^*APA^*A)$$

证明 $AXA^* = B$ 的 Hermite 最小二乘解为

$$Y = (A^*A)^+ A^*BA((A^*A)^+)^* +$$

$$F_{A^*A}V + V^*F_{A^*A}$$

而

$$(A^*A)^+ A^* = A^+ (A^*)^+ A^* = A^+ (AA^+)^* =$$

$$A^+ F_{A^*A} = I_n - (A^*A)^+ (A^*A) = I_n - A^+A = F_A$$

所以 $AXA^* = B$ 的 Hermite 最小二乘解可以简化为

$$Y = A^+B(A^+)^* + F_AV + V^*F_A$$

从而, $Y - P = A^+B(A^+)^* - P + F_AV + V^*F_A$

利用引理 3, 可得

$$\max_{Y \in S} r(Y - P) =$$

$$\min \left\{ n, r \begin{pmatrix} A^+B(A^+)^* - P & -F_A \\ -F_A & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (2)$$

$$\min_{Y \in S} r(Y - P) =$$

$$r \begin{pmatrix} A^+B(A^+)^* - P & -F_A \\ -F_A & 0 \end{pmatrix} - 2r(-F_A) \quad (3)$$

$$\max_{Y \in S} i_{\pm}(Y - P) =$$

$$i_{\pm} \begin{pmatrix} A^+B(A^+)^* - P & -F_A \\ -F_A & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\min_{Y \in S} i_{\pm}(Y - P) =$$

$$i_{\pm} \begin{pmatrix} A^+B(A^+)^* - P & -F_A \\ -F_A & 0 \end{pmatrix} - r(-F_A) \quad (5)$$

下面利用分块矩阵的初等变换及引理 4 与引理 5 计算式(2)~(5)中的分块矩阵的秩.

$$r \begin{pmatrix} A^+B(A^+)^* - P & -F_A \\ -F_A & 0 \end{pmatrix} =$$

$$r \begin{pmatrix} P - A^+B(A^+)^* & F_A \\ F_A & 0 \end{pmatrix} =$$

$$r \begin{pmatrix} P - A^+B(A^+)^* & I_n & 0 \\ I_n & 0 & A^* \\ 0 & A & 0 \end{pmatrix} - 2r(A) =$$

$$r \left[\begin{pmatrix} P & I_n & 0 \\ I_n & 0 & A^* \\ 0 & A & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} A^+B(A^+)^* (I_n \ 0 \ 0) \right] -$$

$$2r(A) = r \begin{pmatrix} A^*BA & A^*AA^* & 0 & 0 & 0 \\ AA^*A & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & A^* & -P & -I_n & 0 \\ 0 & 0 & -I_n & 0 & -A^* \\ 0 & 0 & 0 & -A & 0 \end{pmatrix} -$$

$$4r(A) = 2n + r \begin{pmatrix} A^*BA & A^*A & 0 \\ A^*A & 0 & A^* \\ 0 & A & -APA^* \end{pmatrix} -$$

$$4r(A) = 2n + r(A^*BA - A^*APA^*A) - 2r(A)$$

利用 Hermite 分块矩阵的合同变换、引理 5、引理 6 与引理 7, 可以计算

$$i_{\pm} \begin{pmatrix} A^+B(A^+)^* - P & -F_A \\ -F_A & 0 \end{pmatrix} =$$

$$i_{\mp} \begin{pmatrix} P - A^+B(A^+)^* & F_A \\ F_A & 0 \end{pmatrix} =$$

$$i_{\mp} \begin{pmatrix} P - A^+B(A^+)^* & I_n & 0 \\ I_n & 0 & A^* \\ 0 & A & 0 \end{pmatrix} - r(A) =$$

$$i_{\mp} \left[\begin{pmatrix} P & I_n & 0 \\ I_n & 0 & A^* \\ 0 & A & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} A^+ B (A^+)^* \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] -$$

$$r(A) = i_{\mp} \begin{pmatrix} -A^*BA & A^*AA^* & 0 & 0 & 0 \\ AA^*A & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & A^* & P & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n & 0 & A^* \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 \end{pmatrix} -$$

$$2r(A) = i_{\mp} \begin{pmatrix} -A^*BA & A^*AA^* & 0 & 0 & 0 \\ AA^*A & 0 & 0 & 0 & -AA^* \\ 0 & 0 & 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & -AA^* & 0 & 0 & APA^* \end{pmatrix} -$$

$$2r(A) = n + i_{\mp} \begin{pmatrix} -A^*BA & A^*AA^* & 0 \\ AA^*A & 0 & AA^* \\ 0 & AA^* & APA^* \end{pmatrix} -$$

$$2r(A) = n + i_{\mp} \begin{pmatrix} -A^*BA & A^*A & 0 \\ A^*A & 0 & A^* \\ 0 & A & APA^* \end{pmatrix} -$$

$$2r(A) = n + i_{\mp} (-A^*BA + A^*APA^*A) - r(A) =$$

$$n + i_{\pm} (A^*BA - A^*APA^*A) - r(A)$$

将上述结果代入式(2)~(5),便可得到定理结论.

利用上述定理,可以得到 $AXA^* = B$ 的 Hermite 最小二乘解的最大最小秩与惯性指数.

推论 1 设 $A \in C^{m \times n}$, $B \in C_H^m$ 为给定的矩阵, Y 为矩阵方程 $AXA^* = B$ 的 Hermite 最小二乘解,则

$$\begin{aligned} \max_{Y \in S} r(Y) &= \min \{n, 2n + r(A^*BA^*) - 2r(A)\} \\ \min_{Y \in S} r(Y) &= r(A^*BA^*) \\ \max_{Y \in S} i_{\pm}(Y) &= n + i_{\pm}(A^*BA) - r(A) \\ \min_{Y \in S} i_{\pm}(Y) &= i_{\pm}(A^*BA) \end{aligned}$$

3 矩阵方程 $AXA^* = B$ 的 Hermite 最小二乘解的正定性

利用上述 $Y - P$ 的最大最小秩与最大最小惯性指数,以及引理 1,可以得到 $Y > (<, \geq, \leq) P$ 的充要条件. 特别地,还可以得到 $AXA^* = B$ 存在正定、负定、半正定、半负定最小二乘 Hermite 解的等价条件.

定理 2 设 $A \in C^{m \times n}$, $B \in C_H^m$, $P \in C_H^n$ 为给定的矩阵,则

a. $AXA^* = B$ 存在 Hermite 最小二乘解 Y , 使得 $Y - P > 0 (Y - P < 0)$ 的充要条件为

$$i_{+}(A^*BA - A^*APA^*A) = r(A)$$

$$(i_{-}(A^*BA - A^*APA^*A) = r(A))$$

b. $AXA^* = B$ 的所有 Hermite 最小二乘解 Y , 满足 $Y - P > 0 (Y - P < 0)$ 的充要条件为

$$i_{+}(A^*BA - A^*APA^*A) = n$$

$$(i_{-}(A^*BA - A^*APA^*A) = n)$$

c. $AXA^* = B$ 存在 Hermite 最小二乘解 Y , 使得 $Y - P \geq 0 (Y - P \leq 0)$ 的充要条件为

$$i_{-}(A^*BA - A^*APA^*A) = 0$$

$$(i_{+}(A^*BA - A^*APA^*A) = 0)$$

d. $AXA^* = B$ 所有的 Hermite 最小二乘解 Y , 满足 $Y - P \geq 0 (Y - P \leq 0)$ 的充要条件为

$$n + i_{-}(A^*BA - A^*APA^*A) = r(A)$$

$$(n + i_{+}(A^*BA - A^*APA^*A) = r(A))$$

或者

$$r(A) = n, i_{-}(A^*BA - A^*APA^*A) = 0$$

$$(r(A) = n, i_{+}(A^*BA - A^*APA^*A) = 0)$$

e. $AXA^* = B$ 存在 Hermite 最小二乘解 Y , 使得 $Y - P$ 非奇异的充要条件为

$$n + r(A^*BA - A^*APA^*A) \geq 2r(A)$$

f. $AXA^* = B$ 的所有 Hermite 最小二乘解 Y , 满足 $Y - P$ 非奇异的充要条件为

$$r(A^*BA - A^*APA^*A) = n$$

推论 2 设 $A \in C^{m \times n}$, $B \in C_H^m$ 为给定的矩阵, 则

a. $AXA^* = B$ 存在 Hermite 最小二乘解 Y , 使得 $Y > 0 (Y < 0)$ 的充要条件为

$$i_{+}(A^*BA) = r(A) (i_{-}(A^*BA) = r(A))$$

b. $AXA^* = B$ 所有 Hermite 最小二乘解 Y , 满足 $Y > 0 (Y < 0)$ 的充要条件为

$$i_{+}(A^*BA) = n (i_{-}(A^*BA) = n)$$

c. $AXA^* = B$ 存在 Hermite 最小二乘解 Y , 使得 $Y \geq 0 (Y \leq 0)$ 的充要条件为

$$i_{-}(A^*BA) = 0 (i_{+}(A^*BA) = 0)$$

d. $AXA^* = B$ 所有的 Hermite 最小二乘解 Y , 满足 $Y \geq 0 (Y \leq 0)$ 的充要条件为

$$n + i_{-}(A^*BA) = r(A) (n + i_{+}(A^*BA) = r(A))$$

或者

$$r(A) = n, i_{-}(A^*BA) = 0 (r(A) = n, i_{+}(A^*BA) = 0)$$

e. $AXA^* = B$ 存在非奇异的 Hermite 最小二乘解等价于 $n + r(A^*BA^*) \geq 2r(A)$.

f. $AXA^* = B$ 的所有 Hermite 最小二乘解非奇异等价于 $r(A^*BA^*) = n$.

4 结论

利用线性 Hermite 矩阵函数 $A - BX - (BX)^*$ 的最

大最小秩与惯性指数,研究 $\mathbf{Y}-\mathbf{P}$ 的最大最小秩与惯性指数,其中 $\mathbf{Y}$ 为矩阵方程 $\mathbf{AXA}^* = \mathbf{B}$ 的最小二乘 Hermite 解, $\mathbf{P}$ 是给定的 Hermite 矩阵. 从而得到了约束条件下 $\mathbf{AXA}^* = \mathbf{B}$ 的最小二乘 Hermite 解非奇异、正定(负定)与半正定(半负定)的充要条件.

参考文献:

- [1] Tian Y, George S. Rank equalities for idempotent and involutory matrices[J]. Linear Algebra Appl, 2001, 335(1/2/3): 101 - 117.
- [2] Tian Y. More on maximal and minimal ranks of Schur complements with applications[J]. Appl Math Compute, 2004, 152(3): 675 - 692.
- [3] Tian Y, Liu Y. Extremal ranks of some symmetric matrix expressions with applications[J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 2006, 28(3): 890 - 905.
- [4] Tian Y, George S. On some matrix equalities for generalized inverses with applications[J]. Linear Algebra Appl, 2009, 430(10): 2716 - 2733.
- [5] Tian Y, Takane Y. The inverse of any two-by-two non-singular partitioned matrix and three matrix inverse completion problems[J]. Comput Math Appl, 2009, 57(8): 1294 - 1304.
- [6] Liu Y, Tian Y, Takane Y. Ranks of Hermitian and skew-Hermitian solutions to the matrix equation $\mathbf{AXA}^* = \mathbf{B}$ [J]. Linear Algebra Appl, 2009, 431(12): 2359 - 2372.
- [7] Tian Y. Relations between matrix sets generated from linear matrix expressions and their applications[J]. Comput Math Appl, 2011, 61(6): 1493 - 1501.
- [8] Tian Y. Expansion formulas for the inertias of Hermitian matrix polynomials and matrix pencils of orthogonal projectors[J]. J Math Anal Appl, 2011, 376(1): 162 - 186.
- [9] Tian Y. Equalities and inequalities for inertias of hermitian matrices with applications[J]. Linear Algebra Appl, 2010, 433(1): 263 - 296.
- [10] Liu Y, Tian Y. Max-min problems on the ranks and inertias of the matrix expressions $\mathbf{A} - \mathbf{BXC} \pm (\mathbf{BXC})^*$ with applications[J]. J Optimiz Theory Appl, 2011, 148(3): 593 - 622.
- [11] Tian Y. Maximization and minimization of the rank and inertia of the Hermitian matrix expression $\mathbf{A} - \mathbf{BX} - (\mathbf{BX})^*$ with applications [J]. Linear Algebra Appl, 2011, 434(10): 2109 - 2139.
- [12] Guo W, Wei M, Zhao J. Forward order law for g-inverses of the product of two matrices[J]. Appl Math Compute, 2007, 189(2): 1749 - 1754.
- [13] Guo W, Wei M, Wang M. On least squares g-inverses and minimum norm g-inverses of a bordered matrix [J]. Linear Algebra Appl, 2006, 416(2/3): 627 - 642.
- [14] Liu Y, Wei M. Rank equalities related to the generalized inverses $A_{T,S}^{(2)}, B_{T_1, S_1}^{(2)}$ of two matrices A and B [J]. Appl Math Compute, 2004, 159(1): 19 - 28.
- [15] Liu Y, Wei M. Rank equalities for submatrices in generalized inverse $M_{T,S}^{(2)}$ of M [J]. Appl Math Compute, 2004, 152(2): 499 - 504.
- [16] Tian Y, Simo P. On the equivalence of estimations under a general linear model and its transformed models [J]. Linear Algebra Appl, 2009, 430(10): 2622 - 2641.
- [17] Tian Y. On an additive decomposition of the BLUE in a multiple-partitioned linear model[J]. J Multivariate Anal, 2009, 100(4): 767 - 776.
- [18] Liu Y. On equality of ordinary least squares estimator best linear unbiased estimator and best linear unbiased predictor in the general linear model[J]. J Stat Plan Infer, 2009, 139(4): 1522 - 1529.
- [19] Groß J. A note on the general Hermitian solution to $\mathbf{AXA}^* = \mathbf{B}$ [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Society, 1998, 21(2): 57 - 62.
- [20] Tian Y. Upper and lower bounds for ranks of matrix expressions using generalized inverse[J]. Linear Algebra Appl, 2002, 355(1/2/3): 187 - 214.