

文章编号:1007-6735(2012)04-0359-05

积空间中求解凸不等式系统的不完全投影算法

党亚峥¹, 高 岩²

(1. 河南理工大学 数学与信息科学学院, 焦作 454001; 2. 上海理工大学 管理学院, 上海 200093)

摘要: 针对凸不等式系统提出了一种具有可变权参数和下松弛因子的平行不完全投影算法, 经过有限次的投影算法得到不完全投影点, 并且通过构造一个新的积空间, 将欧氏空间中的平行不完全投影算法转化为新空间中的半序列不完全投影算法, 使得平行的不完全投影法的收敛性由半序列不完全投影算法的收敛性证明直接得到, 在一定程度上简化了平行不完全投影算法的收敛性证明.

关键词: 凸不等式系统; 不完全投影算法; 积空间; 收敛性分析

中图分类号: O 223.1; N 94 **文献标志码:** A

Incomplete Projection Algorithm for Solving a System of Convex Inequalities in a Product Space

DANG Ya-zheng¹, GAO Yan²

(1. School of Mathematics and Information Science, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454001, China;
2. Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: A parallel incomplete projection method with variable weights and under relaxation coefficient was proposed for the system of convex inequalities. Then, the parallel incomplete projection method was transformed in a given Euclidean space into a semi-sequential incomplete projection method in a product space by constructing a new space. Convergent results for the parallel incomplete projection methods may be obtained from the semi-sequential ones, which can simplify the proof of the convergence.

Key words: convex inequalities system; incomplete projection algorithm; product space; convergence analysis

1 问题的提出

有限的非空闭凸集, 且它们的交集非空, 凸可行问题 (CFP) 就是求一点

设 $C_i \subset R^n, i = 1, 2, \dots, m$. C_i 为欧氏空间中

$$x \in C = \bigcap_{i=1}^m C_i \tag{1}$$

收稿日期: 2011-03-06
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11171221); 上海市重点学科建设资助项目(S30501); 上海市科委资助项目(10550500800); 河南省教育自然科学基金资助项目(2010A520019)
作者简介: 党亚峥(1973-), 女, 讲师. 研究方向: 系统分析与集成. E-mail: jgdyz@163.com
高 岩(联系人), 男, 教授. 研究方向: 系统分析与集成. E-mail: gaoyan@usst.edu.cn

如果定义 $C_i = \{x \in R^n : f_i(x) \leq 0\}$, 其中, 函数 $f_i(x)$ 是凸的, 则凸可行问题(CFP)就变为求解不等式系统 $f_i(x) \leq 0 (i = 1, 2, \dots, m)$ 的可行解的问题.

作为一类重要的复杂系统, 凸可行问题在系统科学和工程技术中的应用非常广泛, 如最优化^[1-2]、逼近论^[3-4]、图像重建的预测和计算机断层扫描^[5-6]、控制理论^[7-8]等. 实际中很难直接找到 $C = \bigcap_{i=1}^m C_i$ 中的一点, 通常采用投影算法, 可参见文献[9-11]. 投影算法产生的序列是 Fejer 单调的, 基于这样的事实, 1998 年 Ubaldo 在文献[12]中提出了解凸可行问题的平行不完全投影算法. 事实上, 任何一种投影算法经过有限步迭代总能找到不完全投影点, 所以, 不完全投影算法包含了一般的投影算法. 随后, Echebest 在文献[13]中针对线性的凸可行问题提出了一种加速的不完全投影算法, 但是, 在这些不完全投影算法迭代步中含有权参数 ω_i^k , 所以, 在证明算法的收敛性时会涉及这些参数的选择问题, 势必会使证明复杂化. 本文利用文献[14]的思想建立一个新的积空间, 转换平行的不完全投影算法为半序列的不完全投影算法, 这样, 一方面将求多集的交点问题转化为 2 个凸集的交点问题, 使问题简化; 另一方面使权参数隐含在一个算子中, 从而更有利于简化算法的收敛性证明.

2 预备知识

文中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示 R^n 中的内积和范数; $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示 $(R^n)^m$ 中的内积和范数; I 表示恒等算子.

现介绍文献[12]中提到的解凸可行问题的平行不完全投影算法.

算法 1

步骤 1 假设 $x^k \notin C$, x^k 是当前迭代点; 给定参数 $\eta, 0 < \eta \leq 1$.

步骤 2 对每个凸集 $C_i, i = 1, 2, \dots, m$, 寻找满足

$$z \in C_i \Rightarrow |y_i^k - z| < |x^k - z|$$

不等式的点 y_i^k .

步骤 3 选择权参数 $\omega_i^k, i = 1, 2, \dots, m$, 使得 $\sum_{i=1}^m \omega_i^k = 1$. 选择松弛参数 λ_k , 使得 $\eta \leq \lambda_k \leq 2 - \eta$.

步骤 4 计算

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k \alpha_k \sum_{i=1}^m \omega_i^k (y_i^k - x^k)$$

其中

$$\alpha_k = \frac{\sum_{i=1}^m \omega_i^k \|y_i^k - x^k\|^2}{2 \left\| \sum_{i=1}^m \omega_i^k (y_i^k - x^k) \right\|^2}$$

一般的投影算法产生的迭代序列是 Fejer 单调的, 即如果序列 $\{x^k\}$ 由投影算法产生, 则 $z \in C \Rightarrow \|x^{k+1} - z\| \leq \|x^k - z\|$, 所以, 在算法 1 中, 不完全投影点可以通过有限步的投影算法得到.

3 算法转换

算法 1 含有加速因子 α_k 和松弛参数 $\lambda_k, \eta \leq \lambda_k \leq 2 - \eta, 0 < \eta \leq 1$. 因此, 它是一种加速的不完全投影算法. 但是, 本文只考虑下松弛的情况, 也就是在算法 1 中取 $\alpha_k = 1, \lambda_k \in (0, 1)$. 现介绍具体过程.

3.1 下松弛的不完全投影算法

算法 2

步骤 1 假设 $x^k \notin C$, x^k 是当前迭代点.

步骤 2 对每个凸集 $C_i, i = 1, 2, \dots, m$, 寻找满足

$$z \in C \Rightarrow \|y_i^k - z\| < \|x^k - z\|$$

不等式的点 y_i^k .

步骤 3 选择权参数 $\omega_i^k, i = 1, 2, \dots, m$, 使得

$$\sum_{i=1}^m \omega_i^k = 1.$$

步骤 4 计算

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k \sum_{i=1}^m \omega_i^k (y_i^k - x^k) \quad (2)$$

其中, $\lambda_k \in (0, 1)$.

3.2 新的积空间

为了简化算法 2 的收敛性证明, 将平行不完全投影算法转化为半序列不完全投影算法, 首先需要建立新的积空间, 其定义为

$$\langle \langle V, W \rangle \rangle := \omega_1 \langle v_1, \omega_1 \rangle + \omega_2 \langle v_2, \omega_2 \rangle + \dots + \omega_m \langle v_m, \omega_m \rangle$$

$$\|V\|^2 := \langle \langle V, V \rangle \rangle = \sum_{i=1}^m \omega_i v_i^2$$

其中, $V = (v_1, v_2, \dots, v_m) \in (R^n)^m, v_i \in R^n, i = 1, 2, \dots, m, W = (w_1, w_2, \dots, w_m) \in (R^n)^m, w_i \in R^n, i = 1, 2, \dots, m$. 这样就可以构建一个新的积空间 $((R^n)^m, \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle, \|\cdot\|)$, $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示新空间的内积和范数. 为了方便起

见,空间 $((R^n)^m, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ 可以简记为 $(R^n)^m$,为便于区别 R^n 中的点,这里用大写字母表示 $(R^n)^m$ 中的点.

现定义新的积空间 $(R^n)^m$ 中的两个子集.其一,定义集 $N \equiv C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_m$,即 R^n 中的凸集 C_i 的笛卡儿积, $i=1,2,\dots,m$.显然, N 是空间 $(R^n)^m$ 中的闭集.其二,定义集 D , D 为 R^n 在常规嵌入 $q: R^n \rightarrow (R^n)^m$ 下的像,即对 $\forall v \in R^n$,令 $q(v) \equiv (v, v, \dots, v)$.

显然,如果 $C \neq \emptyset$,则 $N \cap D \neq \emptyset$,而且 $q(C) = N \cap D$.这样,在原始空间中找 C 中的一点就等价于找 $N \cap D$ 中的一点,并且这些点是一一对应的.因此,在子集 $D \subset (R^n)^m$ 中构建一个序列 $\{X^k\}$ 收敛到 $N \cap D$ 中的一点,就可以在 R^n 中找到一个相应的序列 $\{x^k\}$ 收敛到 C 中相应的一点.

命题1 设 $V = (v_1, v_2, \dots, v_m) \in (R^n)^m$,定义算子

$$T_{C_i}: z \in C_i \Rightarrow |y_i^k - z| < |x^k - z| \quad (3)$$

也就是自变量 x^k 经过算子 T_{C_i} 运算后得到满足不等式(3)的点 y_i^k ,即 $T_{C_i}(x^k) = y_i^k$,直接定义算子

$$T_D: T_D V = q\left(\sum_{i=1}^m \omega_i v_i\right)$$

其中

$$\sum_{i=1}^m \omega_i = 1, \quad 0 < \omega_i < 1$$

则对任意 $Z \in D \cap N$,有

$$\text{a. } T_N V = (T_{C_1} v_1, T_{C_2} v_2, \dots, T_{C_m} v_m);$$

$$\text{b. } \|T_D T_N X - Z\|^2 < \|X - Z\|^2.$$

证明 显然, T_D 是线性算子.

a. 由新空间的范数的定义可得

$$\|T_N V - Z\|^2 = \langle T_N V - Z, T_N V - Z \rangle =$$

$$\sum_{i=1}^m \omega_i \|y_i - z_i\|^2 < \sum_{i=1}^m \omega_i \|v_i - z_i\|^2 =$$

$$\|V - Z\|^2$$

所以

$$T_N V = (T_{C_1} v_1, T_{C_2} v_2, \dots, T_{C_m} v_m)$$

b. 由 T_D 的定义可得

$$\|T_D T_N V - Z\|^2 = \|B - Z\|^2 =$$

$$\sum_{i=1}^m \omega_i \|y_i - z_i\|^2 < \sum_{i=1}^m \omega_i \|x_i - z_i\|^2 =$$

$$\|V - Z\|^2$$

其中

$$B = \left(\sum_{i=1}^m \omega_i y_i, \sum_{i=1}^m \omega_i y_i, \dots, \sum_{i=1}^m \omega_i y_i\right)$$

3.3 转换平行算法为半序列算法

现给出算法2对应的积空间中的半序列投影算法.

算法3

步骤1 取 D 中任意一点 $X^0 = q(x^0)$.

步骤2 计算

$$Y^1 = q(x^0) + \lambda_1 (T_N(q(x^0)) - q(x^0))$$

$$X^1 = T_D(Y^1)$$

步骤3 计算

$$\left. \begin{aligned} Y^{k+1} &= X^k + \lambda_k (T_N X^k - X^k) \\ X^{k+1} &= T_D(Y^{k+1}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中, $\lambda_k \in (0,1)$.

显然,由于 $X^k = q(x^k)$,以上下松弛不完全投影算法产生的序列 $\{X^k\} \subset D$,对应 R^n 中的序列 $\{x^k\}$.

命题2 假设 $Z \in D \cap N$,则

$$\langle T_D T_N X^k - X^k, T_D T_N X^k - Z \rangle <$$

$$\frac{1}{2} \|T_D T_N X^k - X^k\|^2$$

证明

$$\|X^k - Z\|^2 =$$

$$\|X^k - T_D T_N X^k + T_D T_N X^k - Z\|^2 =$$

$$\|X^k - T_D T_N X^k\|^2 + \|T_D T_N X^k - Z\|^2 +$$

$$2\langle X^k - T_D T_N X^k, T_D T_N X^k - Z \rangle$$

由命题1得

$$\|X^k - Z\|^2 =$$

$$\|X^k - T_D T_N X^k\|^2 + \|X^k - Z\|^2 +$$

$$2\langle X^k - T_D T_N X^k, T_D T_N X^k - Z \rangle$$

因此

$$0 < \|X^k - T_D T_N X^k\|^2 +$$

$$2\langle X^k - T_D T_N X^k, T_D T_N X^k - Z \rangle$$

显然,可以直接得出结果.

推论1 令 $Z \in D \cap N$,则

$$\langle T_D T_N X^k - X^k, X^k - Z \rangle <$$

$$-\frac{1}{2} \|T_D T_N X^k - X^k\|^2$$

证明 由命题2很容易得到

$$\langle X^k - T_D T_N X^k, Z - X^k \rangle =$$

$$\langle X^k - T_D T_N X^k, Z - T_D T_N X^k \rangle -$$

$$\|T_D T_N X^k - X^k\|^2 \leq \frac{1}{2} \|T_D T_N X^k - X^k\|^2 -$$

$$\|T_D T_N X^k - X^k\|^2 = -\frac{1}{2} \|T_D T_N X^k - X^k\|^2$$

4 收敛性证明

首先证明积空间中算法3的收敛性,然后基于算法2与算法3的等价性给出算法2的收敛性定理和相应的简单化证明.

定理1 令 $Z \in D \cap N$, 则

$$\|X^{k+1} - Z\|^2 \leq \|X^k - Z\|^2 - \lambda_k(1 - \lambda_k) \|T_D T_N X^k - X^k\|^2 \quad (5)$$

证明 由式(4)得

$$\begin{aligned} \|X^{k+1} - Z\|^2 &\leq \|X^k + \lambda_k(T_D T_N X^k - X^k) - Z\|^2 = \\ &\|X^k - Z\|^2 + \lambda_k^2 \|T_D T_N X^k - X^k\|^2 + \\ &2\lambda_k \langle T_D T_N X^k - X^k, X^k - Z \rangle \end{aligned}$$

由推论1可知

$$\begin{aligned} \|X^{k+1} - Z\|^2 &\leq \|X^k - Z\|^2 + \lambda_k^2 \|T_D T_N X^k - X^k\|^2 - \\ &\lambda_k \|T_D T_N X^k - X^k\|^2 = \|X^k - Z\|^2 - \\ &\lambda_k(1 - \lambda_k) \|T_D T_N X^k - X^k\|^2 \end{aligned}$$

故定理1得证.

由定理1可知,序列 $\{\|X^k - Z\|\}_{k=0}^{+\infty}$ 是递减的.假设

$$\{\|X^k - Z\|\}_{k=0}^{+\infty} \rightarrow d(Z)$$

显然

$$\{\|X^{k+1} - Z\|\}_{k=0}^{+\infty} \rightarrow d(Z)$$

再由式(5)可得

$$\|T_D T_N X^k - X^k\| \rightarrow 0 \quad (6)$$

另外,由式(5)得

$$\|X^k\| \leq \|X^k - Z\| + \|Z\| \leq \|X^0 - Z\| + \|Z\|$$

所以,序列 $\{\|X^k\|\}_{k=0}^{+\infty}$ 是有界的.

定理2 如果 $D \cap N \neq \emptyset$, 任取 D 中的点 X^0 为起始点,则由算法3产生的序列 $\{X^k\}_{k=0}^{+\infty}$ 收敛于点 $D \cap N$ 中的一点,记为 Z .

证明 已知序列 $\{X^k\}_{k=0}^{+\infty}$ 是有界的,所以,存在 $\{X^k\}_{k=0}^{+\infty}$ 的一个子序列假设为 $\{X^{k_p}\}_{p=0}^{+\infty}$ 和 $(R^n)^m$ 的一点假设为 A ,使得 $\{X^{k_p}\}_{p=0}^{+\infty}$ 弱收敛于点 A ,则对任意点 $B \in (R^n)^m$,有

$$\begin{aligned} |\langle T_D T_N X^{k_p} - A, B \rangle| &= |\langle T_D T_N X^{k_p} - X^{k_p}, B \rangle + \langle X^{k_p} - A, B \rangle| \leq \\ &\|T_D T_N X^{k_p} - X^{k_p}\| \cdot \|B\| + \\ &|\langle X^{k_p} - A, B \rangle| \end{aligned} \quad (7)$$

由式(6)可知,不等式(7)右边第一项趋于0;由 $\{X^{k_p}\}_{p=0}^{+\infty}$ 收敛于点 A ,可知不等式(7)右边的第二

项也趋于0.所以, $\{T_D T_N X^{k_p}\}_{p=0}^{+\infty}$ 弱收敛于点 A .另一方面,由于 T_D 是线性的,对于 $X^{k_p} = (x^{k_p}, x^{k_p}, \dots, x^{k_p})$,很容易得出

$$\langle T_N X^{k_p}, X^{k_p} \rangle = \langle T_D T_N X^{k_p}, X^{k_p} \rangle$$

进而 $\{T_N X^{k_p}\}_{p=0}^{+\infty} \rightarrow A$. 而 D 和 N 是闭的,所以,由定理1可得 $A \in D$ 和 $A \in N$,也即 $A \in D \cap N$.

现证明 $\{X^k\}_{k=0}^{+\infty}$ 的每个收敛子列都弱收敛于同一点 A . 假设存在 $\{X^k\}_{k=0}^{+\infty}$ 的一个子序列 $\{X^{k_{p'}}\}_{p'=0}^{+\infty}$ 弱收敛于点 A' ,由上可知, $A' \in D \cap N$. 则对任意 $p \in Z^+$,有

$$\begin{aligned} \|X^{k_p} - A'\|^2 - \|X^{k_p} - A\|^2 &= \\ \langle X^{k_p} - A + A - A', X^{k_p} - A + \\ &A - A' \rangle - \|X^{k_p} - A\|^2 \end{aligned}$$

经过内积运算,得

$$\begin{aligned} \|X^{k_p} - A'\|^2 - \|X^{k_p} - A\|^2 &= \\ 2\langle X^{k_p} - A, A - A' \rangle + \|A' - A\|^2 \end{aligned} \quad (8)$$

同理.对任意 $p' \in Z^+$,有

$$\begin{aligned} \|X^{k_{p'}} - A\|^2 - \|X^{k_{p'}} - A'\|^2 &= \\ 2\langle X^{k_{p'}} - A', A' - A \rangle + \|A - A'\|^2 \end{aligned} \quad (9)$$

由定理1可知,序列 $\{\|X^k - A\|\}_{k=0}^{+\infty}$ 和序列 $\{\|X^k - A'\|\}_{k=0}^{+\infty}$ 分别收敛于 $d(A)$ 和 $d(A')$. 特别地

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (\|X^k - A\| - \|X^k - A'\|) &= \\ d(A) - d(A') \end{aligned} \quad (10)$$

对 $p \rightarrow \infty$ 和 $p' \rightarrow \infty$,式(8)和式(9)分别取极限,可得

$$\begin{aligned} d(A')^2 - d(A)^2 &= 0 + \|A - A'\|^2 \\ d(A)^2 - d(A')^2 &= 0 + \|A' - A\|^2 \end{aligned}$$

故 $A' = A$. 所以,定理2得证.

将平行不完全投影算法转换为半序列不完全投影算法的主要优点是能够通过序列 $\{X^k\}_{k=0}^{+\infty}$ 的收敛性质得到相应的序列 $\{x^k\}_{k=0}^{+\infty}$ 的收敛性质.基于此,给出定理3.

定理3 当 $(R^n)^m$ 中的序列 $\{X^k\}_{k=0}^{+\infty}$ 收敛于一点 $A \in D \cap N$ 时,则在空间 R^n 中其相应的序列 $\{x^k\}_{k=0}^{+\infty}$ 也收敛到一点 $a \in C$,并且 $a = q(a)$.

证明 已知当 $C = \bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset$ 时, $D \cap N \neq \emptyset$,由序列 $\{X^k\}_{k=0}^{+\infty}$ 和序列 $\{x^k\}_{k=0}^{+\infty}$ 的一一对应性和定理2,很容易得到序列 $\{x^k\}_{k=0}^{+\infty}$ 收敛到一点 a ,所以,接下来只需证明 $a \in C$.

对任意 $b \in R^n$,取一个指标 $j \in \{1, 2, \dots, m\}$,有

$$\begin{aligned} |\langle y_j^k - a, b \rangle| &= |\langle y_j^k - x^k, b \rangle + \langle x^k - a, b \rangle| \\ &\leq \|y_j^k - x^k\| \cdot \|b\| + |\langle x^k - a, b \rangle| \quad (11) \end{aligned}$$

由式(7)可以得到不等式(11)右边的第一项趋向于0,由于序列 $\{x^k\}_{k=0}^{+\infty}$ 收敛到一点 a ,显然,第二项也趋于0.所以, $|\langle y_j^k - a, b \rangle| \rightarrow 0$. 又由于 $y_j^k \in C_j$.所以, $a \in \bigcap_{j=1}^m C_j$.

5 结 论

原空间的平行不完全投影算法转换为一个新空间中的半序列不完全投影算法,这样,平行不完全投影算法的收敛性就可以由半序列不完全投影算法的收敛性得到,在某种程度上简化了平行不完全投影算法的收敛性证明.

但是,本文只是下松弛的平行不完全投影算法,是否能拓展到上松弛和加速的情况仍然是有待解决的问题.

参考文献:

- [1] Chinneck J W. The constraint consensus method for finding approximately feasible points in nonlinear programs[J]. *Inform J Comput*, 2004, 16(3): 255 - 265.
- [2] Censor Y, Lent A. Cyclic subgradient projections[J]. *Math Program*, 1982, 24(1): 233 - 235.
- [3] Deutsch F. Best approximation in inner product space [M]. New York: Springer-Verlag, 2001.
- [4] Deutsch F. The Method of alternating orthogonal projections, approximation theory, spline functions and applications [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992, 105 - 121.
- [5] Censor Y. Parallel application of block iterative methods in medical imaging and radiation therapy[J]. *Math Program*, 1998, 12(2): 307 - 325.
- [6] Gould N I M. How good are projection methods for convex feasibility problems[J]. *Comput Optim Appl*, 2008, 40(1): 1 - 12.
- [7] Boyd S, El Ghaoui L, Feron E, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- [8] 高岩. 仿射非线性控制系统生存性的判别[J]. *控制理论与应用*, 2009, 29(6): 654 - 656.
- [9] Baushke H H, Borwein J M. On projection algorithms for solving convex feasibility problems[J]. *SIAM Rev*, 1996, 8(3): 367 - 426.
- [10] Eremin I I. On systems of inequalities with convex functions in the left-hand sides[J]. *Amer Math Soc Trans*, 1970, 88(2): 67 - 83.
- [11] Herman G T. Image reconstruction from projections: the fundamentals of computerized tomography [M]. New York: Academic Press, 1980.
- [12] Garcia U M, Gonzalez F J. Incomplete projection algorithms for solving the convex feasibility problem [J]. *Numer Algorithms*, 1998, 18(2): 177 - 193.
- [13] Echebest N, Guradarcci M T. An acceleration scheme for solving convex feasibility problems using incomplete projection algorithm [J]. *Numerical Algorithms*, 2004, 35(2/3/4): 331 - 350.
- [14] Crombez G. Viewing parallel projection methods as sequential ones in convex feasibility problems[J]. *Trans Amer Math Soc*, 1995, 347(7): 2575 - 2583.