

文章编号:1007-6735(2012)04-0364-05

亚纯函数及其 k 阶导数权分担两个公共值的唯一性

张凤丽, 王新利

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 用权分担的思想, 并通过限制亚纯函数 f 的极点重数, 考察 f 及其 k 阶导数分担两个公共值的唯一性问题, 改进了 Frank-Weissenborn 的结果, 证明了若非常数亚纯函数 f 及其 k 阶导数分担 $(a, \infty), (b, 1)$ 且 f 的极点重数大于等于 $2k + 4$, 则 $f \equiv f^{(k)}$.

关键词: 亚纯函数; 权分担; 公共值; 唯一性

中图分类号: O 174.5 **文献标志码:** A

Uniqueness of Meromorphic Function with Its k -th Derivative, Sharing Two Weighted Values

ZHANG Feng-li, WANG Xin-li

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: By using the method of weighted sharing values, the result of Frank-Weissenborn was improved. Assuming f as a non-constant meromorphic function, and a and b as two distinct finite non-zero values, if f and $f^{(k)}$ share (a, ∞) and $(b, 1)$, and the multiplicity of poles of $f \geq 2k + 4$, then $f \equiv f^{(k)}$.

Key words: meromorphic functions; weighted sharing; common value; uniqueness

1 知识背景

亚纯函数是指在复平面 $\mathbb{C}$ 上亚纯. 对于任意非常数亚纯函数 f , 使用 Nevanlinna 值分布论中的基本结果及标准记号^[1], 如 $T(r, f), N(r, f), m(r, f), \bar{N}(r, f)$ 等, 特别地, 用 $S(r, f)$ 表示满足 $S(r, f) = o(T(r, f)) (r \rightarrow \infty, r \notin E, \text{mes} E < +\infty)$ 的

量. 对任意的两个复数 $a_1, a_2 \in \mathbb{C} \cup \infty$, 若 $f - a_1$ 与 $g - a_2$ 的零点相同, 并且每个零点的重数也相同, 则称 f 与 g CM 分担 (a_1, a_2) (若 $a_i = \infty$, $f - a_i$ 的零点就是 f 的极点); 若不计重数, 则称 f 与 g 的 IM 分担 (a_1, a_2) ; 若 $a_1 = a_2 = a$, 则称 f 与 g CM(IM) 分担 a .

对于任意正整数 k , 定义 $N_k\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ 是 f 的

收稿日期: 2011-01-13

作者简介: 张凤丽(1989-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 复分析. E-mail: zhangfengli1989@163.com
王新利(联系人), 女, 讲师. 研究方向: 复分析. E-mail: xlwang@usst.edu.com

所有重数 $\leq k$ 的 a -值点的计数函数, $N_{(k)}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ 是 f 的所有重数 $\geq k$ 的 a -值点的计数函数, 而 $\bar{N}_{(k)}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ 和 $\bar{N}_{(k)}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ 分别是它们的精简计数函数. 用 $E_k(a, f)$ 表示满足下列性质的 f 的 a -值点的集合: 若 f 的一个 a -值点的重数 $m \leq k$, 则这个 a -值点的重数计 m 次, 若 f 的一个 a -值点的重数 $m > k$, 则这个 a -值点的重数计 $k+1$ 次. 如果 $E_k(a, f) = E_k(a, g)$, 则称 f 和 g 以权 k 分担 a , 也可记为 f 和 g 分担 (a, k) .

Gundersen^[2]证明了 f 和 f' CM 分担两个公共值的唯一性, 其结论如下:

定理 1 设 f 是一个非常数亚纯函数, $b (\neq 0)$ 是一个有穷值. 如果 f 和 f' CM 分担 0 和 b , 那么 $f \equiv f'$.

Frank 等^[3]推广了上述结果, 证明了 f 和 $f^{(k)}$ 关于分担公共值的如下性质:

定理 2 设 f 是一个非常数亚纯函数, $k (\geq 2)$ 是一个整数, (a_1, a_2) 和 (b_1, b_2) 是两对有穷值, 满足 $a_1 \neq b_1, a_2 \neq b_2$ 并且 $a_2 b_2 \neq 0$. 如果 f 和 $f^{(k)}$ CM 分担 (a_1, a_2) 和 (b_1, b_2) , 那么, 有

$$(a_1 - b_1)f^{(k)} - (a_2 - b_2)f - (a_1 b_2 - a_2 b_1) \equiv 0$$

事实上, 如果在上述定理中, 设 $a_1 = a_2 = a, b_1 = b_2 = b$ 并且 $ab \neq 0$, 那么即是下面的定理:

定理 3 设 f 是一个非常数亚纯函数. 如果 f 和 $f^{(k)}$ CM 分担两个不同的有穷非零复数 a 和 b , 那么 $f \equiv f^{(k)}$.

Frank 等^[4]证明了如果 f 和 $f^{(k)}$ CM 分担任意有穷复数 a 和 b , 仍有 $f \equiv f^{(k)}$ 成立. 后来 Frank 猜想, 能否将条件“ f 和 $f^{(k)}$ CM 分担 b ”减弱为“ f 和 $f^{(k)}$ IM 分担 b ”, 但仍有 $f \equiv f^{(k)}$ 的结论成立. 李平^[5]给出了如下的例子, 证明 Frank 的猜想是不成立的.

设 a_1 是任意有穷值, $a_2 = a_1 + \sqrt{2}i$. 设 ω 是如下 Riccati 方程式的非常数解

$$\omega' = (\omega - a_1)(\omega - a_2)$$

设

$$f = (\omega - a_1)(\omega - a_2) - \frac{1}{3}$$

容易得到

$$\begin{aligned} f'' &= 6\omega'f \\ f' + \frac{1}{6} &= 6\left(f + \frac{1}{6}\right)^2 \end{aligned}$$

可以看到 0 是 ω' 的 Picard 例外值, 并且 f 和 f'' CM

分担 0 , 并且 f 和 f'' IM 分担 $\frac{1}{6}$, 但是 f 不恒等于 f'' .

所以考虑, 如果在 IM 分担 b 这个条件下再附加某些条件, 能否使 $f \equiv f^{(k)}$ 的结论成立. 陈春芳^[6]通过限制 f 的极点重数, 讨论了 f 和 f' IM 分担公共值的唯一性问题, 得到了下面的结论:

定理 4 设 f 为非常数亚纯函数, 且 f 的极点重数 $n \geq 11$, a 和 b 为两个相互判别的有穷复数, 若 f 和 f' IM 分担 a 和 b , 则 $f \equiv f'$.

针对以上结论, 结合权分担的思想, 对定理 3 中的条件进行了改进, 得到如下结果:

定理 5 设 $f(z)$ 是一个非常数的亚纯函数, k 为正整数, 并且 $f(z)$ 的极点重数大于等于 $2k+4$. 如果 $f(z)$ 和 $f^{(k)}(z)$ 分担 $(a, \infty), (b, 1)$, 这里 a 和 $b (\neq 0)$ 是两个相互判别的有穷复数, 那么 $f(z) \equiv f^{(k)}(z)$.

2 相关引理

引理 1 设 f 是非常数亚纯函数, f 和 $f^{(k)}$ 分担 $(0, \infty), (1, 1)$, 并且 f 的极点重数大于等于 $2k+4$. 如果 f 不恒等于 $f^{(k)}$, 则有

$$\bar{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + \bar{N}_{(2)}(r, f) = S(r) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \bar{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) + \bar{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-1}\right) + \\ \bar{N}_{(2)}(r, f^{(k)}) = S(r) \end{aligned} \quad (2)$$

证明 设

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{f'}{f(f-1)} - \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}(f^{(k)}-1)} \\ \varphi_2 &= \frac{f'}{f-1} - \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1} \\ \varphi_3 &= \frac{f'}{f} - \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

由条件知, $\varphi_i (i=1, 2, 3)$ 不恒等于 0 . 因为 f 不恒等于 $f^{(k)}$, 所以

$$\bar{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{f}\right) = N\left(r, \frac{1}{\varphi_2}\right) \leq T(r, \varphi_2) + O(1) =$$

$$N(r, \varphi_2) + S(r, f) \leq \bar{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + S(r, f) \leq$$

$$N\left(r, \frac{1}{\varphi_3}\right) \leq N(r, \varphi_3) = S(r, f)$$

由于 f 和 $f^{(k)}$ 以 CM 分担 0 , 所以

$$\bar{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) = \bar{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{f}\right) = S(r, f)$$

又由式(3),有

$$\begin{aligned}\bar{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) &\leq N\left(r, \frac{1}{\varphi_3}\right) = S(r, f) \\ N_{(2)}(r, f) &\leq N\left(r, \frac{1}{\varphi_1}\right) \leq T(r, \varphi_1) = \\ N(r, \varphi_1) &\leq \bar{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) = S(r, f)\end{aligned}$$

由 f 和 $f^{(k)}$ 分担 $(1, 1)$ 知

$$\bar{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-1}\right) = \bar{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) = S(r, f)$$

另外, 由于 f 的极点重数大于等于 $2k+4$, 故

$$\bar{N}_{(2)}(r, f^{(k)}) = \bar{N}_{(2)}(r, f) = S(r, f)$$

故引理得证.

引理 2^[7] 设 f_1 和 f_2 是两个非常数亚纯函数, 且满足 $\bar{N}(r, f_i) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f_i}\right) = S(r)$, 其中 $i=1, 2$.

如果 $\bar{N}_0(r, 1; f_1, f_2) \neq S(r)$, 那么存在 2 个满足 $|s| + |t| > 0$ 的整数 s 和 t , 使得 $f_1^s f_2^t \equiv 1$.

这里, $\bar{N}_0(r, 1; f_1, f_2)$ 表示 f_1 与 f_2 的公共 1-值点的精简计数函数, 并且 $T(r) = T(r, f_1) + T(r, f_2)$, $S(r) = o(T(r)) (r \rightarrow \infty, r \notin E)$ 仅是与 f_1 和 f_2 有关的量.

引理 3 设 $f(z)$ 是一个非常数的亚纯函数, k 为正整数, 并且 $f(z)$ 的极点重数大于等于 $2k+4$. 如果 $f(z)$ 和 $f^{(k)}(z)$ 分担 $(0, \infty), (1, 1)$, 那么

$$T(r, f) = T(r, f^{(k)}) + S(r, f) \quad (4)$$

证明 如果 $f(z)$ 恒等于 $f^{(k)}(z)$, 则引理 3 成立.

假设 $f(z)$ 不恒等于 $f^{(k)}(z)$. 设

$$h_1 = \frac{f-1}{f^{(k)}-1} \quad (5)$$

$$h_2 = \frac{f}{f^{(k)}} \quad (6)$$

$$h_0 = \frac{h_1}{h_2} \quad (7)$$

由引理 1 和式(1)、式(2)可知, $\bar{N}\left(r, \frac{1}{h_j}\right) +$

$\bar{N}(r, h_j) = S(r)$, 其中 $h_j (j=0, 1, 2)$ 不恒为 0, 1 和 ∞ .

由式(5)、式(6)、式(7), 可知

$$f = \frac{1-h_1}{1-h_1/h_2} = \frac{h_1-1}{h_0-1}$$

$$f^{(k)} = \frac{h_1-1}{h_0-1} / h_2 = \frac{h_1-1}{h_0-1} \frac{h_0}{h_1} = \frac{h_1^{-1}-1}{h_0^{-1}-1}$$

情形 1 $\bar{N}_0(r, 1; h_1, h_2) \neq S(r, f)$

由引理 2, $\exists |s| + |t| > 0$, 使得 $h_1^s h_2^t \equiv 1$. 即 $\frac{(f-1)^s}{(f^{(k)}-1)^s} \frac{f^t}{(f^{(k)})^t} \equiv \left(\frac{f-1}{f^{(k)}-1}\right)^s \left(\frac{f}{f^{(k)}}\right)^t \equiv 1$, 故 f 和 $f^{(k)}$ CM 分担 $0, 1, \infty$. 从而得到式(4), 故引理 3 得证.

情形 2 $\bar{N}_0(r, 1; h_1, h_2) = S(r, f)$

由式(7), 可知

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{h_0}\right) \leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{h_1}\right) + \bar{N}(r, h_2)$$

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{h_0-1}\right) \leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{h_1}\right) + \bar{N}(r, h_2)$$

$$\bar{N}(r, h_0) \leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{h_2}\right) + \bar{N}(r, h_1)$$

再由 Nevanlinna 第二基本定理, 可知

$$T(r, h_0) \leq \bar{N}(r, h_0) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{h_0}\right) +$$

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{h_0-1}\right) + S(r) = S(r)$$

所以, $T\left(r, \frac{(f-1)f^{(k)}}{(f^{(k)}-1)f}\right) = S(r)$. 设

$$\frac{(f-1)f^{(k)}}{(f^{(k)}-1)f} = g \quad (8)$$

因此, $T(r, g) = S(r)$, 并且由式(8), 可知

$$(f-1) \frac{f^{(k)}}{f} = g(f^{(k)}-1)$$

又 $f(z)$ 和 $f^{(k)}(z)$ 分担 $(0, \infty)$, 则

$$T(r, f) \leq T(r, f^{(k)}) + S(r)$$

再由式(8), 可知

$$(f^{(k)}-1) = (f-1) \frac{1}{g} \frac{f^{(k)}}{f}$$

同理, 有

$$T(r, f^{(k)}) \leq T(r, f) + S(r)$$

从而引理 3 得证.

3 定理 5 的证明

假设 f 不恒等于 $f^{(k)}$, 分两种情况进行讨论.

情形 1 假设 $ab \neq 0$, 则有

$$N\left(r, \frac{1}{f-f^{(k)}}\right) \leq T(r, f-f^{(k)}) + O(1) =$$

$$N(r, f^{(k)}) + m\left(r, f\left(1 - \frac{f^{(k)}}{f}\right)\right) + O(1) =$$

$$k\bar{N}(r, f) + N(r, f) + m(r, f) + S(r, f) =$$

$$\begin{aligned}
& T(r, f) + k\bar{N}(r, f) + S(r, f) \\
& N(r, \frac{1}{f-a}) + N(r, \frac{1}{f-b}) \leq N(r, \frac{1}{f-f^{(k)}}) \leq \\
& T(r, f) + k\bar{N}(r, f) + S(r, f) \quad (9) \\
& m(r, \frac{1}{f-a}) + m(r, \frac{1}{f-b}) = m(r, \frac{1}{f-a} + \\
& \frac{1}{f-b}) + S(r, f) \leq m(r, \frac{1}{f^{(k)}}) + S(r, f) \quad (10)
\end{aligned}$$

将式(9)和式(10)相加,可知

$$\begin{aligned}
2T(r, f) & \leq T(r, f) + k\bar{N}(r, f) + \\
& m(r, \frac{1}{f^{(k)}}) + S(r, f) \quad (11)
\end{aligned}$$

另外

$$\begin{aligned}
& \bar{N}(r, \frac{1}{f^{(k)}-a}) + \bar{N}(r, \frac{1}{f^{(k)}-b}) \leq N(r, \\
& \frac{1}{f-f^{(k)}}) \leq T(r, f) + k\bar{N}(r, f) + S(r, f) \quad (12)
\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}
& N(r, \frac{1}{f^{(k)}-a}) - \bar{N}(r, \frac{1}{f^{(k)}-a}) + N(r, \frac{1}{f^{(k)}-b}) - \\
& \bar{N}(r, \frac{1}{f^{(k)}-b}) \leq N(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}) \quad (13)
\end{aligned}$$

将式(12)和式(13)相加,可知

$$\begin{aligned}
& N(r, \frac{1}{f^{(k)}-a}) + N(r, \frac{1}{f^{(k)}-b}) \leq T(r, f) + \\
& k\bar{N}(r, f) + N(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}) + S(r, f), \text{又} \\
& m(r, \frac{1}{f^{(k)}}) + m(r, \frac{1}{f^{(k)}-a}) + m(r, \frac{1}{f^{(k)}-b}) \leq \\
& m(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}) + S(r, f)
\end{aligned}$$

所以,可知

$$\begin{aligned}
& m(r, \frac{1}{f^{(k)}}) + 2T(r, f^{(k)}) \leq T(r, f) + \\
& T(r, f^{(k+1)}) + k\bar{N}(r, f) + S(r, f) = \\
& T(r, f) + T(r, f^{(k)}) + (k+1)\bar{N}(r, f) + S(r, f) \\
& \text{再由式(11),可知} \\
& T(r, f^{(k)}) \leq T(r, f) + (k+1)\bar{N}(r, f) + S(r, f) \leq \\
& (2k+1)\bar{N}(r, f) + S(r, f)
\end{aligned}$$

由于 f 的极点重数大于等于 $2k+4$, 所以

$$T(r, f) \leq \frac{2k+1}{2k+4} T(r, f) + S(r, f), \text{即}$$

$$T(r, f) = S(r, f)$$

矛盾.

情形 2 设 $ab=0$, 不失一般性, 设 $a=0, b=1$, 则定理即为 $f(z)$ 和 $f^{(k)}(z)$ 分担 $(0, \infty), (1, 1)$. 因此, 设

$$\phi = \frac{f'(f-f^{(k)})}{f(f-1)} \quad (14)$$

$$\chi = \frac{f^{(k+1)}(f-f^{(k)})}{f^{(k)}(f^{(k)}-1)} \quad (15)$$

由式(12)计算, 可知

$$\begin{aligned}
& m(r, \phi) = m(r, \frac{f'(f-f^{(k)})}{f(f-1)}) \leq m(r, \frac{f'}{f-1}) + \\
& m(r, \frac{f-f^{(k)}}{f}) = S(r, f)
\end{aligned}$$

并且由 ϕ 的构造及 f 的极点重数大于等于 $2k+4$, 可以看到

$$\begin{aligned}
& N(r, \phi) = N(r, \frac{f'(f-f^{(k)})}{f(f-1)}) = (k+1)\bar{N}(r, f) + \\
& S(r, f) \leq \frac{k+1}{2k+4} T(r, f) + S(r, f)
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
& T(r, \phi) = m(r, \phi) + N(r, \phi) \leq \\
& \frac{k+1}{2k+4} T(r, f) + S(r, f) \quad (16)
\end{aligned}$$

同理, 由 f 和 $f^{(k)}$ 分担 $(0, \infty)$, 引理 3 和式(15), 可知

$$\begin{aligned}
& m(r, \chi) = m(r, \frac{f^{(k+1)}(f-f^{(k)})}{f^{(k)}(f^{(k)}-1)}) \leq m(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}) + \\
& m(r, \frac{f}{f^{(k)}}) + S(r, f) \leq \\
& m(r, \frac{f}{f^{(k)}}) + S(r, f) = m(r, \frac{f^{(k)}}{f}) + \\
& N(r, \frac{f^{(k)}}{f}) - N(r, \frac{f}{f^{(k)}}) \leq \\
& N(r, \frac{f^{(k)}}{f}) + S(r, f) = k\bar{N}(r, f) + \\
& S(r, f) \leq \frac{k}{2k+4} T(r, f) + S(r, f) \\
& N(r, \chi) = N(r, \frac{f^{(k+1)}(f-f^{(k)})}{f^{(k)}(f^{(k)}-1)}) =
\end{aligned}$$

$$\bar{N}(r, f) + S(r, f) \leq \frac{1}{2k+4} T(r, f) + S(r, f)$$

所以

$$\begin{aligned}
& T(r, \chi) = m(r, \chi) + N(r, \chi) \leq \\
& \frac{k+1}{2k+4} T(r, f) + S(r, f) \quad (17)
\end{aligned}$$

设 $H_{(m_1, n_1)} = m_1 \phi - n_1 \chi$, 这里 m_1 和 n_1 都是正整数. 分两种情况进行讨论.

情形 1 假设存在两个正整数 m_0 和 n_0 , 使得 $H_{(m_0, n_0)} \equiv 0$. 因此, 得到

$$m_0 \frac{f'}{f(f-1)} \equiv n_0 \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}(f^{(k)}-1)} \quad (18)$$

对式(18)积分, 可知

$$\left(\frac{f-1}{f}\right)^{m_0} \equiv A \left(\frac{f^{(k)}-1}{f^{(k)}}\right)^{n_0}$$

这里 $A (\neq 0)$ 是一个常数. 由引理 3 结论, 所以 $m_0 = n_0$, 从而 $f((1-A_1)f^{(k)}-A_1) = f^{(k)}$.

若 f 的极点是 n 重, 则上面等式左边的极点数是 $n + n + k = 2n + k$, 右面的极点是 $n + k$, 所以 $n = 0$, 与 f 的极点重数大于等于 $2k + 4$ 矛盾.

情形 2 假设对任意两个正整数 m_1 和 n_1 , 使得 $H_{(m_0, n_0)}$ 不恒为 0. 设 z_0 是 f 和 $f^{(k)}$ 的重数分别为 n_1 和 m_1 的公共零点, 所以由 H 的构造知 $H_{(m_1, n_1)}(z_0) = 0$. 设 z_1 是 $f-1$ 和 $f^{(k)}-1$ 的重数分别为 n_1 和 m_1 的公共零点, 同理知 $H_{(m_1, n_1)}(z_1) = 0$. 因此, 由式(16)和式(17), 可知

$$\begin{aligned} & \bar{N}_{(n_1, m_1)}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}_{(n_1, m_1)}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) \leq \\ & N\left(r, \frac{1}{H_{(m_1, n_1)}}\right) + S(r, f) \leq \\ & T(r, \varphi) + T(r, \chi) + S(r, f) \leq \\ & \frac{2k+2}{2k+4} T(r, f) + S(r, f) \end{aligned} \quad (19)$$

由第二基本定理和式(19), 可知

$$T(r, f) \leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) +$$

$$\begin{aligned} & \bar{N}(r, f) + S(r, f) = \sum_{m_1 \geq 1, n_1 \geq 1} \bar{N}_{(n_1, m_1)}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \\ & \sum_{m_1 \geq 1, n_1 \geq 1} \bar{N}_{(n_1, m_1)}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + \bar{N}(r, f) + S(r, f) \leq \\ & \frac{2k+2}{2k+4} T(r, f) + \frac{1}{2k+4} T(r, f) + S(r, f) = \\ & \frac{2k+3}{2k+4} T(r, f) + S(r, f) \end{aligned}$$

即 $T(r, f) \leq S(r, f)$, 矛盾. 故定理 5 得证.

参考文献:

- [1] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.
- [2] Gundersen G G. Meromorphic functions that share two finite values with their derivatives [J]. Pacific J Math, 1983, 105(2): 299-309.
- [3] Frank G, Ohlenroth W. Meromorphe funktionen, die mit einer ihrer ableitungen werte teilen [J]. Complex Variables, 1986, 6(1): 23-37.
- [4] Frank G, Weissenborn G. Meromorphe funktionen, die mit einer ihrer ableitungen werte teilen [J]. Complex Variables, 1986, 7(1/2/3): 33-43.
- [5] Yang Chong-jun, Yi Hong-xun. Uniqueness theory of meromorphic functions [M]. Beijing: Science Press, 2003: 415.
- [6] 陈春芳. 亚纯函数及其导数的唯一性 [J]. 南京师范大学学报, 2004, 27(3): 36-39.
- [7] Zhang Q C. Meromorphic functions sharing three values [J]. India J Pure Appl Math, 1999, 30(7): 667-682.