

文章编号:1007-6735(2012)05-0409-10

MKdV-Burgers 方程衰减振荡解的 近似解和误差估计

张卫国, 徐 晋, 李 想, 赵 岩

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 研究了 MKdV-Burgers 方程衰减振荡解近似解的求解及其误差估计问题. 利用平面动力系统理论对 MKdV-Burgers 方程的行波解所对应的动力系统作了定性分析, 给出了其在不同参数条件下的全局相图和有界行波解存在的条件和个数. 研究了该方程有界行波解的波形与耗散系数之间的关系, 给出了表征耗散作用大小的两个临界值, 得到了当耗散系数 α 大于某个临界值时方程有界行波解的波形表现为单调扭状孤波、当耗散系数小于某个临界值时方程有界行波解的波形表现为衰减振荡波的结论; 求得了该方程在无耗散作用情况下所有可能的 3 种钟状孤波解. 根据衰减振荡解对应的解轨线在相图中的演化关系, 并利用假设待定法, 求得了该方程的衰减振荡解的近似解. 最后, 根据齐次化原理的思想, 通过建立反映衰减振荡解精确解和近似解间关系的积分方程, 得到了所求衰减振荡近似解的误差估计, 其误差是以指数形式速降的无穷小量.

关键词: MKdV-Burgers 方程; 定性分析; 孤波解; 衰减振荡解; 误差估计

中图分类号: O 175.2 **文献标志码:** A

Approximate Damped Oscillatory Solutions of MKdV-Burgers Equation and Their Error Estimation

ZHANG Wei-guo, XU Jin, LI Xiang, ZHAO Yan

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The theory of planar dynamical systems was utilized to qualitatively analyse the dynamical systems to which correspond the traveling wave solutions of MKdV-Burgers equation. The global phase portraits under different parameter conditions were presented and the conditions when the bounded traveling wave solutions exist. Furthermore, the relations between the wave profiles of bounded traveling wave solutions and the dissipation coefficient α in the equation were investigated. Two critical values which describe the level of dissipating action were obtained and it was found, that a bounded traveling wave appears as a kink profile solitary wave if α is greater than some critical value, while it appears as a damped oscillatory wave if α is less than some critical value. Three kinds of bell profile solitary wave solutions of MKdV-Burgers equation with no dissipation effect were obtained. Based on the above discussion and according to the evolution

收稿日期: 2011-06-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11071164); 上海市教委重点科研创新资助项目(13ZZ118); 上海市重点学科建设资助项目(S30501)

作者简介: 张卫国(1957-), 男, 教授. 研究方向: 非线性系统的理论与应用. E-mail: zwgzwm@yahoo.com.cn

relations of orbits in the global phase portraits, all approximate damped oscillatory solutions were obtained by using undetermined coefficients method. In the light of the idea of homogenization principle, the integral equations reflecting the relations between exact and approximate damped oscillatory solutions were established and the error estimation of these approximate solutions was achieved.

Key words: MKdV-Burgers equation; qualitative analysis; solitary wave solution; damped oscillatory solution; error estimation

1 问题的提出

MKdV 方程^[1-4]

$$u_t + bu^2 u_x + u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

是描述弱非线性长波的模型方程,很多学者对 MKdV 方程进行了研究.田畴^[5]讨论了方程(1)的对称问题及其几何意义.赵申琪等^[6]求得了方程(1)的反散射解.刘式适等^[7]运用 Jacobi 椭圆函数展开法得到了方程(1)的准确周期波解.文献[8-10]分别用格子 Boltzmann 方法、拟小波方法修正的 Jacobi 椭圆函数展开法求得了方程(1)的部分孤波解.张金良等^[11]运用变系数的 F 展开法得到了方程(1)的部分精确解.Kappeler 等^[12]讨论了方程(1)的解在无限远处的无界性.Yang 等^[13]得到了离散的 MKdV 方程的精确双孤子解.

由于在实际问题中耗散是不可避免的,一些作者考虑了较方程(1)更有实际意义的 MKdV-Burgers 方程

$$u_t + bu^2 u_x - \alpha u_{xx} + u_{xxx} = 0 \quad (2)$$

其中, $\alpha > 0$. 当 $\alpha = 0$ 时,方程(2)即化为方程(1),因而方程(2)是方程(1)的推广.张卫国^[14]求出了 $b = 6$ 时,方程(2)的一类准确扭状孤波解,并分析了其结构.赵永明等^[15]利用基本的数理方程知识,讨论了 $b = 6, 0 < \alpha \ll 1$ 时,方程(2)一级近似解的一般表达式,还求出了在无耗散时的一类钟状孤波解表达式.最近 Ahmet^[16]利用推广的 tanh 函数展开法得到了方程(2)的 3 个由 tanh 函数和无界的 coth 函数的多项式构成的精确行波解,其中之一是有界的扭状孤波解.

然而,对于方程(2)的有界行波解还有更重要的问题有待深入研究.如 MKdV-Burgers 方程(2)在无耗散时的钟状孤波解究竟有多少种形式、在耗散系数满足什么样的条件下存在衰减振荡解、此衰减振荡解的精确解或近似解该如何求出.如果得到的是近似解,那么就on研究如何给出误差估计,本文将

着重研究这些问题.

本文利用平面动力系统理论对方程(2)的有界行波解进行定性分析,给出方程(2)有界行波解的全局相图,并给出方程(2)有界行波解存在的条件和个数.讨论有界行波解的波形与耗散项系数 α 之间的关系,找到了两个临界值 $\lambda_1 = 2\sqrt{-(1-\alpha)b'}$ 和 $\lambda_2 = 2\sqrt{-ab'}$,并得到结论:当耗散作用较大,即 α 大于某个临界值时,方程(2)有界行波解的波形表现为单调扭状孤波;当耗散作用较小,即 α 小于某个临界值时,方程(2)有界行波解的波形表现为衰减振荡波.文中还将给出方程(2)在无耗散作用时的 3 种钟状孤波解.进一步,根据衰减振荡解对应的解轨线在相图中的演化关系,并利用假设待定法,求出了方程(2)在各种条件下的衰减振荡解的近似解.同时研究所求衰减振荡解的近似解与相应的精确解间的误差估计的问题.该问题的难点是只知衰减振荡解的近似解,而不知其精确解.为克服这个难点,通过适当变换并根据齐次化原理的思想建立了反映所求衰减振荡近似解和相应精确解间关系的积分方程,从而得到了所求衰减振荡近似解的误差估计.从此误差估计中可以看出,用本文方法求出的方程(2)的衰减振荡解的近似解与其精确解间的误差是以指数形式速降的无穷小量.

2 方程(2)有界行波解的定性分析

设方程(2)有行波解 $u(x, t) = u(\xi) = u(x - ct)$,则满足

$$-cu'(\xi) + bu^2(\xi)u'(\xi) - \alpha u''(\xi) + u'''(\xi) = 0 \quad (3)$$

式中, c 为波速;“'”表示 $\frac{d}{d\xi}$. 对上式积分一次,可得

$$u''(\xi) - \alpha u'(\xi) - cu(\xi) + \frac{b}{3}u^3(\xi) = g \quad (4)$$

式中, g 为积分常数.方程(3)可化为

$$\begin{aligned} u''(\xi) - \alpha u'(\xi) + \bar{b}(u^3(\xi) + \\ pu(\xi) + q) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{其中 } \bar{b} = \frac{b}{3}, p = -\frac{3c}{b}, q = -\frac{3g}{b} \quad (6)$$

为了研究方程(5)有界解的存在性,令 $x = u(\xi)$ 和 $y = u'(\xi)$, 可得与方程(5)等价的平面动力系统

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\xi} &= y \equiv P(x, y) \\ \frac{dy}{d\xi} &= \alpha y - \bar{b}(x^3 + px + q) \equiv Q(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

在 (x, y) 平面上, 系统(7)有限远奇点的个数依赖于 $f(x) = x^3 + px + q = 0$ 实根的个数. 根据方程 $f(x) = 0$ 根存在的判别式 $\Delta = (\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3 = \frac{1}{4b^3}(9bg^2 - 4c^3)$, 得

a. 当 $\Delta > 0$ 时, $f(x) = 0$ 有一个单实根和一对共轭复根;

b. 当 $\Delta = 0$ 时, $f(x) = 0$ 有一个单实根和一个重根;

c. 当 $\Delta < 0$ 时, $f(x) = 0$ 有 3 个单实根.

由于在 $\Delta > 0$ 情况下, 系统(7)只有一个有限远奇点, 此时方程(5)不存在有界行波解, 故以下始终假定 $b > 0, c > 0$ 和 $\Delta \leq 0$. 另外为明确且不致叙述重复起见, 始终假定 $q \leq 0$ (即 $g \geq 0$), 其它情况可类似讨论.

显然, 在上述假定下, 系统(7)有 3 个有限远奇点 $P_i(x_i, 0) (i = 1, 2, 3)$, $x_i (i = 1, 2, 3)$ 是 $f(x) = 0$ 的根, 可设 $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. 根据多项式根与系数的关系, 有

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0, x_1 x_2 + x_1 x_3 + \\ x_2 x_3 &= p, x_1 x_2 x_3 = -q \end{aligned} \quad (8)$$

另外, 系统(7)在有限远奇点 $P_i(x_i, 0) (i = 1, 2, 3)$ 处的雅可比矩阵为

$$J(x_i, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\bar{b}f'(x_i) & \alpha \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3$$

则其行列式 $\det(J(x_i, 0)) = \bar{b}f'(x_i) = \bar{b}(3x_i^2 + p) (i = 1, 2, 3)$, 将 $P_i(x_i, 0)$ 处的特征方程的判别式记为 Δ_i , 则 $\Delta_i = \alpha^2 - 4\bar{b}f'(x_i) = \alpha^2 - 4\bar{b}(3x_i^2 + p) (i = 1, 2, 3)$.

下面利用平面动力系统的理论和方法^[17-19]讨论系统(7)奇点的类型, 并画出相图.

2.1 $\alpha = 0$ 的情况

此时系统(7)有首次积分

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \bar{b}(\frac{1}{4}x^4 + \frac{p}{2}x^2 + qx) = h,$$

$$h \in \mathbf{R} \quad (9)$$

据平面动力系统理论^[17-19]知, 若 $\det(J(x_i, 0)) > 0$, 则 $P_i(x_i, 0)$ 是中心; 若 $\det(J(x_i, 0)) < 0$, 则 $P_i(x_i, 0)$ 是鞍点; 若 $\det(J(x_i, 0)) = 0$ 且 $P_i(x_i, 0)$ 的 Poincaré 指数为 0, 则 $P_i(x_i, 0)$ 为尖点. 结合这些结论和方程(8), 对系统(7)的有限远奇点分析可得下述结论:

a. 在 $q = 0$ 的情况下

此时有 $\Delta < 0$, 故系统(7)有 3 个不同的有限远奇点 $P_i(x_i, 0) (i = 1, 2, 3)$, 其中 $x_1 = -x_3 = -\sqrt{-p}, x_2 = 0$. P_2 为鞍点, P_1 和 P_3 为中心.

b. 在 $q < 0$ 的情况下

(a) 当 $\Delta = 0$ 时, 由方程(8)知, $P_1(x_1, 0)$ 与 $P_2(x_2, 0)$ 重合, 记为 $P_{1,2}(x_{1,2}, 0)$. 从而系统(7)有两个不同的有限远奇点 $P_{1,2}(x_{1,2}, 0)$ 和 $P_3(x_3, 0)$, 其中 $x_{1,2} < 0 < x_3$. $P_{1,2}$ 为尖点, P_3 为中心.

(b) 当 $\Delta < 0$ 时, 系统(7)有 3 个不同的有限远奇点 $P_i(x_i, 0) (i = 1, 2, 3)$. 其中, $x_1 < x_2 < 0 < -x_2 < -x_1 < x_3$. P_1 和 P_3 为中心, P_2 为鞍点.

2.2 $\alpha > 0$ 的情况

由平面动力系统理论^[17-19]知, 若 $\bar{b}f'(x_i) < 0$, 则 $P_i(x_i, 0)$ 为鞍点; 若 $\bar{b}f'(x_i) > 0$ 且 $\Delta_i > 0$, 则 $P_i(x_i, 0)$ 为不稳定结点; 若 $\bar{b}f'(x_i) > 0$ 且 $\Delta_i < 0$, 则 $P_i(x_i, 0)$ 为不稳定焦点; 若 $\bar{b}f'(x_i) = 0$, 易证此时 $P_i(x_i, 0)$ 为鞍结点. 结合这些结论和(8)对系统(7)的有限远奇点作分析可得下述结论:

a. 在 $q = 0$ 的情况下

此时系统(7)有 3 个不同的有限远奇点 $P_i(x_i, 0) (i = 1, 2, 3)$. 其中 $x_1 = -x_3 = -\sqrt{-p}, x_2 = 0$, P_2 为鞍点, P_1 和 P_3 在 $\Delta_1 = \Delta_3 > 0$ 时为不稳定结点, P_1 和 P_3 在 $\Delta_1 = \Delta_3 < 0$ 时为不稳定焦点.

b. 在 $q < 0$ 的情况下

(a) 当 $\Delta = 0$ 时, $P_1(x_1, 0)$ 与 $P_2(x_2, 0)$ 重合, 记为 $P_{1,2}(x_{1,2}, 0)$, 且 $x_{1,2} < 0 < x_3$, 易证 $P_{1,2}$ 为鞍结点, P_3 在 $\Delta_3 > 0$ 时为不稳定结点; P_3 在 $\Delta_3 < 0$ 时为不稳定焦点.

(b) 当 $\Delta < 0$ 时, 系统(7)有 3 个不同的有限远奇点 $P_i(x_i, 0) (i = 1, 2, 3)$, 且 $x_1 < x_2 < 0 < -x_2 < -x_1 < x_3$, 易证 P_2 为鞍点, 当 $\Delta_3 < \Delta_1 < 0$ 时, P_1 和 P_3 为不稳定焦点; 当 $\Delta_3 < 0 < \Delta_1$ 时, P_3 为不稳定焦点, P_1 为不稳定结点; 当 $0 < \Delta_3 < \Delta_1$ 时, P_1 和

P_3 为不稳定结点.

再对系统(7)作 Poincaré 变换,分析其无穷远奇点的类型可得,系统(7)仅在 y 轴上存在一对无穷远奇点 $A_i (i=1,2)$, 其中 A_1 在 y 轴的正方向上, A_2 在 y 轴的负方向上. 且 $A_i (i=1,2)$ 周围各存在一个双曲型区域. 此外, Poincaré 圆盘的圆周为轨线.

对于系统(7), 由于 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \alpha$, 故根据

Bendixson-Dulac 判别法^[17-19], 有下述命题成立:

命题 1 当 $\alpha > 0$ 时, 系统(7)在 (x, y) 平面上不存在闭轨线和具有有限个奇点的奇异闭轨线. 进而, 当 $\alpha > 0$ 时, 方程(2)不存在周期行波解和钟状孤波解.

根据上述分析, 可作出系统(7)在不同参数条件下的全局相图, 见图 1~图 4.

由全局相图 1 可得如下命题:

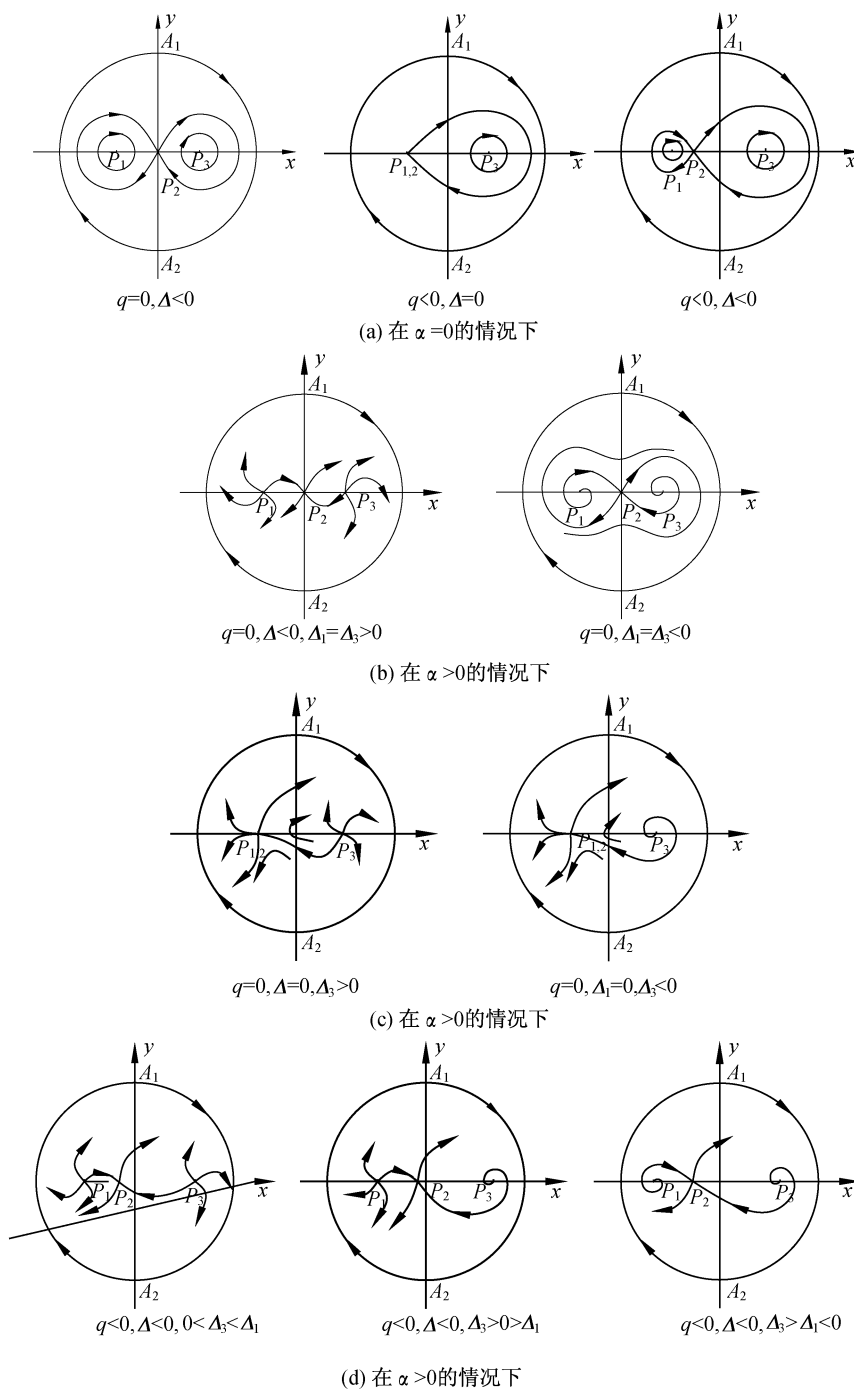


图 1 全局相图

Fig.1 Global phase portraits

命题 2 a. 当 $\alpha = 0$ 时,除去奇点 $P_i (i = 1, 2, 3)$,及轨线 $L(P_2, P_2)$ 和它周围的闭轨线外,系统(7)的非周期轨线都是无界的,且这些轨线上点的 x 坐标值和 y 坐标值也均是无界的.

b. 当 $\alpha > 0$ 时,除去奇点 $P_i (i = 1, 2, 3)$,及轨线 $L(P_1, P_2)$ 、 $L(P_3, P_2)$ 外,系统(7)的非周期轨线都是无界的,且这些轨线上点的 x 坐标值和 y 坐标值也均是无界的.

证明 a. 当 $\alpha = 0$ 时,除去奇点 $P_i (i = 1, 2, 3)$,及轨线 $L(P_2, P_2)$ 和它轨线周围的闭轨线外,系统(7)的非周期轨线都是无界的,且这些轨线上点的 x 坐标值和 y 坐标值也均是无界的,它们在 $|\xi| \rightarrow +\infty$ 时或趋于 A_1 或趋于 A_2 . 因此,这些轨线上点的 y 坐标值一定无界的.

现用反证法证明这些轨线上点的 x 坐标值也是无界的.假设这些轨线上点的 x 坐标值都是有界的.一方面,由于轨线上任意点处的切线斜率满足

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\bar{b}}{y}(x^3 + px + q)$$

故当 $|y| \rightarrow +\infty$ 时,有 $\frac{dy}{dx} \rightarrow 0$. 另一方面,由微分中值定理可以断定当 $|y| \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{dy}{dx}$ 不可能保持有界.这个矛盾表明这些轨线上点的 x 坐标值都是无界的.

b. 命题 2 的结论 b 可类似证明.

命题 3 a. 若 $\alpha = 0, q = 0$ 系统(7)存在两条同宿轨(见图 1); $q < 0$ 时,系统(7)至多存在两条同宿轨 $L(P_{1,2}, P_{1,2})$ 或 $L(P_2, P_2)$.

b. 若 $\alpha > 0, q = 0$ 时系统(7)存在两条异宿轨 $L(P_i, P_2) (i = 1, 3)$ (见图 1); $q < 0$ 时,系统(7)至多存在两条异宿轨 $L(P_i, P_2) (i = 1, 3)$.

考虑到平面动力系统同宿轨和闭轨对应非线性发展方程的钟状孤波解和周期行波解,而异宿轨对应扭状孤波解或振荡行波解,因此由命题 2 和命题 3 及全局相图 1,可得如下定理:

定理 1 设波速 c 和积分常数 g 满足 $\Delta = \frac{1}{4b^3}(9bg^2 - 4c^3) \leq 0, b > 0, c > 0$.

a. 若 $\alpha = 0, q = 0$ 时方程(2)存在两个钟状孤波解(对应图 1 中的同宿轨 $L(P_2, P_2)$); $q < 0$ 时,方程(2)至多存在两个钟状孤波解(对应图 1, 中同宿轨 $L(P_{1,2}, P_{1,2})$ 和对应图 1 中两同宿轨 $L(P_2, P_2)$).

b. 若 $\alpha > 0, q = 0$ 时方程(2)存在两个有界行波解(其中图 1 中异宿轨 $L(P_i, P_2)$ 分别对应两个扭状孤波解,图 1 中异宿轨 $L(P_i, P_2)$ 分别对应两个衰减

振荡解($i = 1, 3$)); $q < 0$ 时,方程(2)至多存在两个有界行波解(其中图 1 中异宿轨 $L(P_i, P_2)$ 分别对应两个扭状孤波解,图 1 中异宿轨 $L(P_i, P_2)$ 分别对应一个扭状孤波解和一个衰减振荡解,图 1 中异宿轨 $L(P_i, P_2)$ 分别对应两个衰减振荡解($i = 1, 3$)).

3 方程(2)有界行波解的波形与耗散系数 α 之间的关系

考虑方程(2)有界解与耗散系数 α 间的关系,为明确起见如下始终假定 $\Delta < 0$.

在假定 $\Delta < 0$ 下,方程 $f(x) = 0$ 有 3 个不同的实根 x_1, x_2, x_3 , 满足 $x_1 < x_2 < x_3$, 此时方程(5)可改写为

$$u''(\xi) - \alpha u'(\xi) + \bar{b}(u(\xi) - x_1) \cdot (u(\xi) - x_2)(u(\xi) - x_3) = 0 \quad (10)$$

对方程(10)做变换 $V(\xi) = \frac{u(\xi) - x_1}{x_3 - x_1}$, 得

$$V'(\xi) - \alpha V'(\xi) + \bar{b}'V(\xi)(1 - V(\xi)) \cdot (V(\xi) - a) = 0 \quad (11)$$

其中 $a = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}, \bar{b}' = -\bar{b}(x_3 - x_1)^2$

显然, $P'_1(0, 0), P'_2(a, 0)$ 和 $P'_3(1, 0)$ 是方程(11)对应平面动力系统的奇点,它们分别与系统(7)的奇点 $P_1(x_1, 0), P_2(x_2, 0)$ 和 $P_3(x_3, 0)$ 相对应. 由于线性变换不改变奇点的性质,故奇点 $P'_i (i = 1, 2, 3)$ 与奇点 $P_i (i = 1, 2, 3)$ 具有相同的性质.

由定性分析和命题 1 可知,方程(5)不存在满足 $u(-\infty) = u(+\infty)$ 的有界解,只可能存在满足以下两种情况的有界解

$$(A) \quad u(-\infty) = x_3, u(+\infty) = x_2$$

$$(B) \quad u(-\infty) = x_1, u(+\infty) = x_2$$

由此,相对应的方程(11)就只可能存在满足下列情况的有界解

$$(A_1) \quad V(-\infty) = 1, \quad V(+\infty) = a$$

$$(B_1) \quad V(-\infty) = 0, \quad V(+\infty) = a$$

记 $\lambda_1 = 2\sqrt{-(1-a)\bar{b}'} = 2\sqrt{\frac{\bar{b}}{3}(3x_3^2 + p)}$,

$$\lambda_2 = 2\sqrt{-a\bar{b}'} = 2\sqrt{\frac{\bar{b}}{3}(3x_1^2 + p)} \quad (12)$$

因在所给假定条件下有 $0 < a \leq \frac{1}{2}$, 故 $\lambda_1 > \lambda_2$, 由文献[20-22]中的有关结果,可得:

引理 1 a. 当 $\alpha > \lambda_1$ 时,方程(11)有单调下降的解 $V(\xi)$, 满足情况(A₁);

b. 当 $\alpha > \lambda_2$ 时, 方程(11)有单调上升的解 $V(\xi)$, 满足情况(B₁).

c. 当 $0 < \alpha < \lambda_1$ 时, 方程(11)有振荡解 $V(\xi)$, 满足情况(A₁);

d. 当 $0 < \alpha < \lambda_2$ 时, 方程(11)有振荡解 $V(\xi)$, 满足情况(B₁).

e. 当 $\lambda_2 < \alpha < \lambda_1$ 时, 方程(11)存在单调上升的解 $V(\xi)$, 满足情况(B₁); 同时存在振荡解 $V(\xi)$, 满足情况(A₁).

故由引理1, 可得方程(2)在 $\Delta < 0$ 下行波解的性态与参数 α 的下列关系定理.

定理2 设波速 c 和积分常数 g 满足

$$9bg^2 - 4c^3 < 0, b > 0, c > 0$$

a. 当 $\alpha > \lambda_1$ 时, 方程(2)存在单调下降的扭状孤波解 $u(\xi)$ (对应图1)中轨线 $L(P_3, P_2)$ 和轨线 $L(P_3, P_{1,2})$; 当 $0 < \alpha < \lambda_1$ 时, 方程(2)存在振荡行波解 $u(\xi)$ (对应图1)中轨线 $L(P_3, P_2)$ 和轨线 $L(P_3, P_{1,2})$. 这里的 $u(\xi)$ 均满足 $u(-\infty) = x_3$ 和 $u(+\infty) = x_2$.

b. 当 $\alpha > \lambda_2$ 时, 方程(2)存在单调上升的扭状孤波解 $u(\xi)$ (对应图1)中轨线 $L(P_1, P_2)$; 当 $0 < \alpha < \lambda_2$ 时, 方程(2)存在衰减振荡解 $u(\xi)$ (对应图1)中轨线 $L(P_1, P_2)$. 这里 $u(\xi)$ 均满足 $u(-\infty) = x_1$ 和 $u(+\infty) = x_2$.

c. 当 $\lambda_2 < \alpha < \lambda_1$ 时, 方程(2)存在单调上升的扭状孤波解 $u(\xi)$ (对应图1)中轨线 $L(P_1, P_2)$, 满足 $u(-\infty) = x_1$ 和 $u(+\infty) = x_2$; 同时存在振荡行波解 $u(\xi)$ (对应图1)中轨线 $L(P_3, P_2)$, 满足 $u(-\infty) = x_3$ 和 $u(+\infty) = x_2$.

下面对方程(2)的振荡行波解进一步证明其衰减性. 以方程(2)对应于图1的振荡行波解为例进行讨论, 其它情况的讨论类似.

定理3 设波速 c 和积分常数 g 满足

$$9bg^2 - 4c^3 < 0, b > 0, c > 0$$

a. 当 $0 < \alpha < \lambda_1$ 时, 则方程(2)对应于轨线 $L(P_3, P_2)$ 的振荡行波解 $u(\xi)$ 存在最大值点 $\hat{\xi}_1$, 使在 $\hat{\xi}_1$ 的右侧 $u(\xi)$ 具有单减性, 而在其左侧 $u(\xi)$ 具有衰减性. 即在 ξ 轴上存在无穷可数多个极大值点 $\hat{\xi}_i (i = 1, 2, \dots, +\infty)$ 和极小值点 $\check{\xi}_i (i = 1, 2, \dots, +\infty)$, 满足

$$\left. \begin{aligned} -\infty < \dots < \check{\xi}_n < \hat{\xi}_n < \dots < \\ \check{\xi}_1 < \hat{\xi}_1 < +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\xi}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \check{\xi}_n = -\infty \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} u(+\infty) < u(\check{\xi}_1) < \dots < u(\check{\xi}_n) < \dots < \\ u(-\infty) < \dots < u(\hat{\xi}_n) < \dots < u(\hat{\xi}_1) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u(\hat{\xi}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(\check{\xi}_n) = u(-\infty) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

并且, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{\xi}_n - \hat{\xi}_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\check{\xi}_n - \check{\xi}_{n+1}) = \frac{4\pi}{\sqrt{4(bx_3^2 - c) - \alpha^2}} \quad (15)$$

b. 当 $0 < \alpha < \lambda_2$ 时, 则方程(2)对应于轨线 $L(P_1, P_2)$ 的振荡行波解 $u(\xi)$, 存在最小值点 $\check{\xi}_1$, 使在 $\check{\xi}_1$ 的右侧具有单增性, 而在其左侧具有衰减振荡性. 即在 ξ 轴上存在无穷可数多个极大值点 $\hat{\xi}_i (i = 1, 2, \dots, +\infty)$ 和极小值点 $\check{\xi}_i (i = 1, 2, \dots, +\infty)$, 满足

$$\left. \begin{aligned} -\infty < \dots < \hat{\xi}_n < \check{\xi}_n < \dots < \\ \hat{\xi}_1 < \check{\xi}_1 < +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\xi}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \check{\xi}_n = -\infty \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} u(\check{\xi}_1) < \dots < u(\check{\xi}_n) < \dots < u(-\infty) < \\ \dots < u(\hat{\xi}_n) < \dots < u(\hat{\xi}_1) < u(+\infty) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u(\hat{\xi}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(\check{\xi}_n) = u(-\infty) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

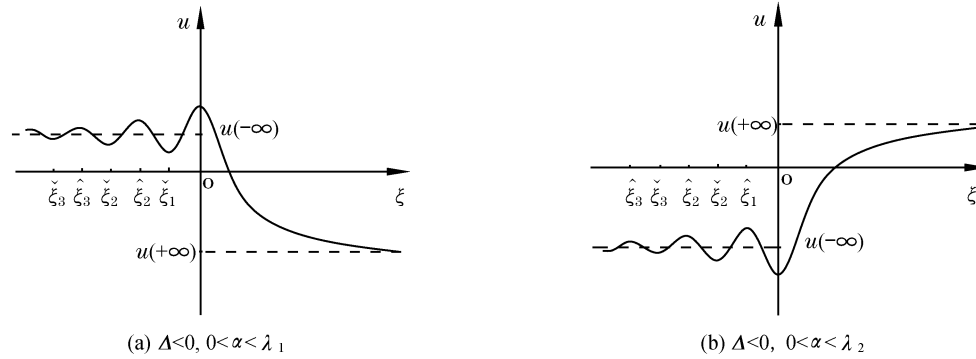
并且, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{\xi}_n - \hat{\xi}_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\check{\xi}_n - \check{\xi}_{n+1}) = \frac{4\pi}{\sqrt{4(bx_1^2 - c) - \alpha^2}} \quad (18)$$

证明 a. 当定理3a条件成立时, 方程(2)对应的平面动力系统(7)在平面上有3个奇点, P_2 为鞍点, $P_1(x_1, 0)$ 和 $P_3(x_3, 0)$ 都为不稳定焦点. 当 $\xi \rightarrow -\infty$ 时, 轨线 $L(P_3, P_2)$ 将螺旋地趋于 P_3 . $L(P_3, P_2)$ 在 P_3 的右侧与 ξ 轴的交点对应于 $u(\xi)$ 的极大值点, 在 P_3 的左侧与 ξ 轴的交点对应于 $u(\xi)$ 的极小值点, 因此可得式(13)和式(14). 当轨线 $L(P_3, P_2)$ 充分接近 P_3 时, 其性质趋于系统(7)在点 P_3 的线性近似解的性质, 绕点 P_3 旋转的频率趋于 $\sqrt{4(bx_3^2 - c) - \alpha^2}/4\pi$. 因此, 有式(15)成立.

b. 证明过程类似 a.

因行波解 $u(\xi)$ 在 ξ 轴上做平行移动不改变波的形状和速度, 故不失一般性, 可设 $\hat{\xi}_1 = 0$ 或 $\check{\xi}_1 = 0$. 这样, 定理3描述的衰减振荡解可由图2表示.

图2 耗散系数 α 各种范围内方程(5)的解相图Fig.2 Phase portraits of solutions of equation(5) under various ranges for dissipation α

由定理2和定理3可知,由于耗散项 αu_{xx} 的作用,方程(2)产生扭状孤波解和振荡行波解.当 α 较大时,方程(2)的波形是单调的,表现为扭状;当 α 较小时,方程(2)的波形是振荡的,且具有衰减性.

4 方程(2)的钟状孤波解和衰减振荡解的近似解

4.1 方程(2)的钟状孤波解

受文献[23]中定理1的启发,并利用待定假设法,可得如下定理:

定理4 设 D 是 $bD^3 - 3cD - 3g = 0$ 的实解.

a. 当 $q = 0, \Delta < 0$ 时, $D_1 = -D_3, D_2 = 0$, 则此时方程(2)有两个钟状孤波解

$$u_1^\pm(\xi) = \pm \sqrt{\frac{6c}{b}} \operatorname{sech}(\sqrt{c}(\xi - \xi_0)) \quad (19)$$

此时 $u_1^\pm(\xi)$ 为对应图1中两条对称同宿轨 $L(P_2, P_2)$.

b. 当 $q < 0, \Delta = 0$ 时, $D_1 = D_2 < D_3$, 此时方程(2)有一个钟状孤波解

$$u_2(\xi) = 12\sqrt{\frac{c}{b}} \frac{1}{3b + 2bc(\xi - \xi_0)^2 - \sqrt{\frac{c}{b}}} \quad (20)$$

此时 $u_2(\xi)$ 对应图1中同宿轨 $L(P_{1,2}, P_{1,2})$.

c. 当 $q < 0, \Delta < 0$ 时, $D_1 < D_2 < 0 < D_3$, 此时方程(2)有两个钟状孤波解

$$u_3^\pm(\xi) = \frac{\left[\pm \frac{6(bD_2^2 - c)}{\sqrt{6bc - 2b^2D_2^2}} \operatorname{sech}^2 \eta \right]}{\left[2 + \left(-1 \mp \frac{2bD_2}{\sqrt{6bc - 2b^2D_2^2}} \right) \operatorname{sech}^2 \eta \right]} + D_2 \quad (21)$$

其中, $\eta = \frac{1}{2}\sqrt{c - bD_2^2}(\xi - \xi_0)$, $u_3^\pm(\xi)$ 分别对应图1中两条同宿轨 $L(P_2, P_2)$.

综上所述,在此给出了 $\alpha = 0$ 时,方程(2)所有可能的3种钟状孤波解的显示表达式:在 $q = 0, \Delta < 0$ 情形,方程(2)的钟状孤波解由式(19)表示;在 $q < 0, \Delta = 0$ 情形,方程(2)的钟状孤波解由式(20)表示;在 $q < 0, \Delta < 0$ 情形,方程(2)的钟状孤波解由式(21)表示;可以证明,在 $q > 0, \Delta = 0$ 时,方程(2)的钟状孤波解有形如式(20)的形式,在 $q > 0, \Delta < 0$ 时,方程(2)的钟状孤波解也有形如式(21)的形式.

4.2 方程(2)的衰减振荡解的近似解

这里要求出图1中焦-鞍轨线对应的方程(2)的衰减振荡解的近似解.不妨以求出图中焦-鞍轨线 $L(P_3, P_2)$ 对应的方程(2)的衰减振荡解的近似解为例,其余可用类似的方法求出.

由平面动力系统理论知,图1中焦-鞍轨线是在耗散项 $-\alpha u_{xx}(\xi)$ 的作用下(即耗散系数 α 满足 $0 < \alpha < \lambda_1$ 时),由图1中一条同宿轨 $L(P_2, P_2)$ 破裂产生的;轨线 $L(P_1, P_2)$ 是在耗散项作用下(即耗散系数 α 满足 $0 < \alpha < \lambda_2$ 时),由图1中一条同宿轨 $L(P_2, P_2)$ 破裂产生的.因此,方程(2)对应焦-鞍轨线 $L(P_3, P_2)$ 的衰减振荡解的非振荡部分可用定理4a中的钟状孤波解

$$u^*(\xi) = \sqrt{\frac{6c}{b}} \operatorname{sech}(\sqrt{c}(\xi - \xi_0)), \xi \in [\xi_0, +\infty) \quad (22)$$

来表示.为了得到衰减振荡解的衰减振荡部分的近似表达式,选用如下形式的解

$$u(\xi) = e^{\beta(\xi - \xi_0)} (A_1 \cos(B(\xi - \xi_0)) - A_2 \sin(B(\xi - \xi_0))) + C, \xi \in (-\infty, \xi_0) \quad (23)$$

其中, A_1, A_2, B, C, β 待定.之所以选用式(23),是因为式(23)既具有衰减性也具有振荡性,其中 $e^{\beta(\xi - \xi_0)}$ 具有衰减性, $A_1 \cos(B(\xi - \xi_0)) - A_2 \sin(B(\xi - \xi_0))$ 具有振荡性.

将式(23)代入方程(5),略去 $e^{\beta(\xi - \xi_0)}$ 的高阶无穷

小量后,可得

$$\left. \begin{aligned} B^2 &= -\frac{\alpha^2}{4} + bC^2 - c \\ \beta &= \frac{\alpha}{2} \\ bC^3 - 3cC - 3g &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

为了构造整个衰减振荡解的近似解,两部分的解还需满足对接条件.由于解的波形不随平移而改变,故可选取 $\xi_0 = 0$ 作为对接点,对接条件取为

$$\frac{d^i}{d\xi^i} u(0) = \frac{d^i}{d\xi^i} u^*(0), i = 0, 1$$

$$\text{即 } A_1 + C = u^*(0), \beta A_1 - A_2 B = 0 \quad (25)$$

因为 $\xi_0 = 0$ 是钟状孤波解的极值点,故 $\frac{d}{d\xi} u^*(0) = 0$.

当 $\xi \rightarrow -\infty$ 时,由于式(22)趋于 D_3 ,故 $C = D_3$. 进一步,由式(24)中第一式和连接条件式(25),分别得

$$B^2 = -\frac{\alpha^2}{4} + bD_3^2 - c \quad (26)$$

$$\text{和 } A_1 = \sqrt{\frac{6c}{b}} - D_3, A_2 = \frac{\beta A_1}{B} = \frac{\alpha A_1}{2B} \quad (27)$$

因无论 B 取正值还是负值, $A_1 \cos(B\xi) - A_2 \sin(B\xi)$ 的值均相同,故以后始终假设 $B > 0$.

按照上述方法,可得如下定理.

定理 5 设 D_i 是 $bD^3 - 3cD - 3g = 0$ 的实根,且 $D_1 = -D_3, D_2 = 0$, 则

a. 当 $0 < \alpha < \lambda_1$ 时,方程(2)有对应图 1 中焦-鞍轨线 $L(P_3, P_2)$ 的衰减振荡解,其近似解为

$$u(\xi) \approx \begin{cases} \sqrt{\frac{6c}{b}} \operatorname{sech}(\sqrt{c}(\xi - \xi_0)), & \xi \in [0, +\infty) \\ e^{\frac{\alpha}{2}\xi} (A_1 \cos(B\xi) - A_2 \sin(B\xi)) + D_3, & \xi \in (-\infty, 0), \end{cases} \quad (28)$$

$$u(\xi) \approx \begin{cases} -\frac{6(bD_2^2 - c) \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2} \sqrt{c - bD_2^2} \xi}{2\sqrt{6bc - 2b^2 D_2^2} + (-\sqrt{6bc - 2b^2 D_2^2} + 2bD_2) \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2} \sqrt{c - bD_2^2} \xi} + D_2, & \xi \in [0, +\infty) \\ e^{\frac{\alpha}{2}\xi} (A_1 \cos(B\xi) - A_2 \sin(B\xi)) + D_3, & \xi \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

其中 $B = \frac{1}{2} \sqrt{4(bD_3^2 - c) - \alpha^2}$

$$A_1 = -\frac{6(bD_2^2 - c)}{\sqrt{6bc - 2b^2 D_2^2} + 2bD_2} + D_2 - D_3, A_2 = \frac{\alpha A_1}{2B}$$

$$u(\xi) \approx \begin{cases} -\frac{6(bD_2^2 - c) \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2} \sqrt{c - bD_2^2} \xi}{2\sqrt{6bc - 2b^2 D_2^2} - (\sqrt{6bc - 2b^2 D_2^2} + 2bD_2) \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2} \sqrt{c - bD_2^2} \xi} + D_2, & \xi \in [0, +\infty) \\ e^{\frac{\alpha}{2}\xi} (A_1 \cos(B\xi) - A_2 \sin(B\xi)) + D_1, & \xi \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

$$\text{其中 } B = \frac{1}{2} \sqrt{4(bD_3^2 - c) - \alpha^2}$$

$$A_1 = \sqrt{\frac{6c}{b}} - D_3, A_2 = \frac{\alpha A_1}{2B}$$

b. 当 $0 < \alpha < \lambda_2$ 时,方程(2)有对应图 1 中焦-鞍轨线 $L(P_1, P_2)$ 的衰减振荡解,其近似解为

$$u(\xi) \approx \begin{cases} -\sqrt{\frac{6c}{b}} \operatorname{sech}(\sqrt{c}(\xi - \xi_0)), & \xi \in [0, +\infty) \\ e^{\frac{\alpha}{2}\xi} (A_1 \cos(B\xi) - A_2 \sin(B\xi)) + D_1, & \xi \in (-\infty, 0) \end{cases} \quad (29)$$

$$\text{其中 } B = \frac{1}{2} \sqrt{4(bD_1^2 - c) - \alpha^2}$$

$$A_1 = -\sqrt{\frac{6c}{b}} - D_1, A_2 = \frac{\alpha A_1}{2B}$$

类似上面的讨论,可得以下的定理:

定理 6 设 D_i 是 $bD^3 - 3cD - 3g = 0$ 的实根,且 $D_1 = D_2 < D_3$, 则当 $0 < \alpha < \lambda_1$ 时,方程(2)有对应图 1 中焦-鞍轨线 $L(P_3, P_{1,2})$ 的衰减振荡解,其近似解为

$$u(\xi) = \begin{cases} -\frac{12D_1}{3+2c\xi^2} + D_1, & \xi \in [0, +\infty) \\ e^{\frac{\alpha}{2}\xi} (A_1 \cos(B\xi) - A_2 \sin(B\xi)) + D_3, & \xi \in (-\infty, 0) \end{cases} \quad (30)$$

$$\text{其中 } B = \frac{1}{2} \sqrt{4(bD_3^2 - c) - \alpha^2}$$

$$A_1 = -3D_1 - D_3, A_2 = \frac{\alpha A_1}{2B}$$

定理 7 设 D_i 是 $bD^3 - 3cD - 3g = 0$ 的实根,且 $D_1 < D_2 < D_3$, 则

a. 当 $0 < \alpha < \lambda_1$ 时,方程(2)有对应图 1 中焦-鞍轨线 $L(P_3, P_2)$ 的衰减振荡解,其近似解为

b. 当 $0 < \alpha < \lambda_2$ 时,方程(2)有对应图 1 中焦-鞍轨线 $L(P_1, P_2)$ 的衰减振荡解,其近似解为

其中 $B = \frac{1}{2}\sqrt{4(bD_1^2 - c) - \alpha^2}$

$$A_1 = \frac{6(bD_2^2 - c)}{\sqrt{6bc - 2b^2D_2^2 + 2bD_2}} + D_2 - D_1, A_2 = \frac{\alpha A_1}{2B}$$

5 方程(2)衰减振荡近似解的误差估计

研究所求衰减振荡解的近似解与其相应的精确解间的误差估计.以研究图1中焦-鞍轨线 $L(P_1, P_2)$ 对应的衰减振荡解的近似解式(29)与相应的精确解间的误差估计为例,其余衰减振荡解与其近似解间的误差估计可用类似的方法得到.

因当 $\Delta < 0$ 时,方程 $bD^3 - 3cD - 3g = 0$ 有3个不同的根 $D_i (i = 1, 2, 3)$, 满足 $D_1 < D_2 < D_3$, 故方程(4)可改写为

$$u''(\xi) - \alpha u'(\xi) + \frac{b}{3}(u(\xi) - D_1) \cdot (u(\xi) - D_2)(u(\xi) - D_3) = 0 \quad (31)$$

为得到焦-鞍轨线 $L(P_1, P_2)$ 对应的方程(2)衰减振荡解的近似解的误差估计,对式(31)作变换

$$V(\xi) = \frac{u(\xi) - D_1}{D_3 - D_1} \quad (32)$$

和 $\xi = -\eta (\eta > 0)$, 并记

$$\tilde{V}(\eta) = V(-\eta) = V(\xi) \quad (33)$$

则求方程(4)满足初始条件

$$u(0) = \bar{u}(0), u'(0) = \bar{u}'(0) \quad (34)$$

的精确衰减振荡解可化为求如下初值问题的精确解

$$\left. \begin{aligned} \tilde{V}_{\eta\eta}(\eta) + \alpha \tilde{V}_{\eta}(\eta) + \bar{b}w(D_3 - D_1)^2 \tilde{V}(\eta) &= \\ -\bar{b}(D_3 - D_1)^2 \tilde{V}^2(\eta)(\tilde{V}(\eta) - (w+1)) & \\ \tilde{V}(0) = \frac{u(0) - D_1}{D_3 - D_1}, \tilde{V}_{\eta}(0) = 0 & \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

其中, $w = \frac{D_2 - D_1}{D_3 - D_1}$, $\bar{b} = \frac{b}{3}$, $\bar{u}(\xi)$ 即为式(29)中的第一式.

首先运用齐次化原理于初值问题

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_{\eta\eta}(\eta) + \alpha \bar{V}_{\eta}(\eta) + \bar{b}w(D_3 - D_1)^2 \bar{V}(\eta) &= \\ -\bar{b}(D_3 - D_1)^2 \bar{V}^2(\eta)(\bar{V}(\eta) - (w+1)) & \\ \bar{V}(0) = \frac{u(0) - D_1}{D_3 - D_1}, \bar{V}_{\eta}(0) = 0 & \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

其中, $\tilde{V}(\eta)$ 满足初值问题式(35). 易证以下两个引理成立.

引理2 设 $\bar{V}_1(\eta), \bar{V}_2(\eta)$ 分别为

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_{\eta\eta}(\eta) + \alpha \bar{V}_{\eta}(\eta) + \bar{b}w(D_3 - D_1)^2 \bar{V}(\eta) &= 0 \\ \bar{V}(0) = \frac{u(0) - D_1}{D_3 - D_1}, \bar{V}_{\eta}(0) = 0 & \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

和

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_{\eta\eta}(\eta) + \alpha \bar{V}_{\eta}(\eta) + \bar{b}w(D_3 - D_1)^2 \bar{V}(\eta) &= \\ -\bar{b}(D_3 - D_1)^2 \tilde{V}^2(\eta)(\tilde{V}(\eta) - (w+1)) & \\ \bar{V}(0) = 0, \bar{V}_{\eta}(0) = 0 & \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

的解, 则 $\bar{V}_1(\eta) + \bar{V}_2(\eta)$ 是初值问题式(36)的解.

引理3 若 $\bar{V}_3(\eta, \tau)$ 为

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_{\eta\eta}(\eta) + \alpha \bar{V}_{\eta}(\eta) + \bar{b}w(D_3 - D_1)^2 \cdot \\ \bar{V}(\eta) = 0 \\ \bar{V}(\tau) = 0, \bar{V}_{\eta}(\tau) = -\bar{b}(D_3 - D_1)^2 \cdot \\ \tilde{V}^2(\eta)(\tilde{V}(\eta) - (w+1)) \end{aligned} \right\} \quad \eta > \tau \quad (39)$$

的解, 则 $\int_0^{\eta} \bar{V}_3(\eta, \tau) d\tau$ 是初值问题式(38)的解.

易得, 初值问题式(37)的解为

$$\bar{V}_1(\eta) = e^{-\alpha_1 \eta} (c_1 \cos(\bar{\beta}_1 \eta) + c_2 \sin(\bar{\beta}_1 \eta)) \quad (40)$$

其中 $\alpha_1 = \frac{\alpha}{2}, \bar{\beta}_1 = \frac{1}{2}\sqrt{4(bD_1^2 - c) - \alpha^2}$,

$$c_1 = \frac{u(0) - D_1}{D_3 - D_1}, c_2 = \frac{c_1 \alpha_1}{\bar{\beta}_1}$$

令 $t = \eta - \tau$, 代入初值问题式(39), 即可解得

$$\begin{aligned} \bar{V}_3(\eta, \tau) &= -\frac{\bar{b}}{\bar{\beta}_1} (D_3 - D_1)^2 \tilde{V}^2(\tau)(\tilde{V}(\tau) - \\ & (w+1)) e^{-\alpha_1(\eta-\tau)} \sin(\bar{\beta}_1(\eta-\tau)) \end{aligned}$$

于是, 初值问题(38)的解为

$$\begin{aligned} \bar{V}_2(\eta) &= \int_0^{\eta} \bar{V}_3(\eta, \tau) d\tau = -\frac{\bar{b}}{\bar{\beta}_1} \cdot \\ & (D_3 - D_1)^2 \int_0^{\eta} \tilde{V}^2(\tau)(\tilde{V}(\tau) - (w+1)) \cdot \\ & e^{-\alpha_1(\eta-\tau)} \sin(\bar{\beta}_1(\eta-\tau)) d\tau \end{aligned}$$

这样初值问题式(36)的解为 $\bar{V}(\eta) = \bar{V}_1(\eta) + \bar{V}_2(\eta)$. 又因为初值问题式(35)的解 $\tilde{V}(\eta)$ 满足初值问题式(36), 据解的唯一性定理知, $\tilde{V}(\eta) = \bar{V}(\eta)$, 即

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\eta) &= e^{-\alpha_1 \eta} (c_1 \cos(\bar{\beta}_1 \eta) + c_2 \sin(\bar{\beta}_1 \eta)) - \\ & \frac{\bar{b}}{\bar{\beta}_1} (D_3 - D_1)^2 \int_0^{\eta} \tilde{V}^2(\tau)(\tilde{V}(\tau) - \\ & (w+1)) e^{-\alpha_1(\eta-\tau)} \sin(\bar{\beta}_1(\eta-\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (41)$$

现将 $\eta = -\xi$ 和(32)代入式(41),并在式(41)的积分式中作变换 $\tau' = -\tau$,可得方程(2)满足初始条件式(34)的隐式精确衰减振荡解

$$u(\xi) - D_1 = e^{\bar{a}_1 \xi} (\bar{c}_1 \cos(\bar{\beta}_1 \xi) + \bar{c}_2 \sin(\bar{\beta}_1 \xi)) - \frac{\bar{b}}{\bar{\beta}_1} \int_0^\xi e^{\bar{a}_1(\xi-\tau)} \sin(\bar{\beta}_1(\xi-\tau)) (u(\tau) - D_1)^2 \cdot (u(\tau) - D_2 - D_3 + D_1) d\tau \quad (42)$$

其中, $\bar{c}_1 = \bar{u}(0) - D_1$, $\bar{c}_2 = -\frac{\bar{a}_1 \bar{c}_1}{\bar{\beta}_1}$. 显然 $\bar{\beta}_1$, $\bar{c}_1$ 和 $\bar{c}_2$ 分别与定理 3(b) 中的 B , A_1 和 $-A_2$ 相等, 且 $e^{\bar{a}_1 \xi} (\bar{c}_1 \cos(\bar{\beta}_1 \xi) + \bar{c}_2 \sin(\bar{\beta}_1 \xi)) + D_1$ 即为前面式(29)给出的衰减振荡解的近似解. 式(42)反映了在 $\xi < 0$ 时, 衰减振荡解的近似解与相应精确解间的关系.

为推导方程出 $L(P_1, P_2)$ 对应的方程(2)的衰减振荡解的近似解与相应精确解间的误差估计, 从式(41)出发. 因衰减振荡解 $u(\xi)$ 是有界解, 又 $\tilde{V}(\eta) = V(\xi) = \frac{u(\xi) - D_1}{D_3 - D_1}$, 故存在 $M > 0, M_1 > 0$ 使得 $|u(\xi)| < M, |\tilde{V}(\tau)| < M_1$, 于是由式(41), 有

$$|\tilde{V}(\eta)| \leq C_1 e^{\bar{a}_1 \eta} + \frac{\bar{b}(D_3 - D_1)^2}{\bar{\beta}_1} \cdot T_1 e^{\bar{a}_1 \eta} \int_0^\eta e^{\bar{a}_1 \tau} |\tilde{V}(\tau)| d\tau$$

其中, $C_1 = |c_1| + |c_2|$, $T_1 = M_1(M_1 + (w+1))$. 因 $\bar{a}_1 > 0$, 故对任意的 η_1 满足 $0 < \eta_1 \leq \eta$, 有

$$|\tilde{V}(\eta)| \leq C_1 e^{\bar{a}_1 \eta_1} + \frac{\bar{b}(D_3 - D_1)^2}{\bar{\beta}_1} \cdot T_1 e^{\bar{a}_1 \eta_1} \int_0^{\eta_1} e^{\bar{a}_1 \tau} |\tilde{V}(\tau)| d\tau$$

于是由 Gronwall 不等式, 有

$$|\tilde{V}(\eta)| \leq C_1 e^{\bar{a}_1 \eta_1} \cdot \exp\left(\frac{\bar{b}(D_3 - D_1)^2}{\bar{\beta}_1 \alpha_1} T_1 e^{\bar{a}_1 \eta_1} (e^{\bar{a}_1 \eta} - 1)\right)$$

由 η_1 选取的任意性, 令 $\eta_1 \rightarrow \eta$, 则有

$$|\tilde{V}(\eta)| \leq T_2 e^{\bar{a}_1 \eta}, \eta > 0 \quad (43)$$

其中

$$T_2 = C_1 \exp\left(\frac{\bar{b}(D_3 - D_1)^2}{\bar{\beta}_1 \alpha_1} T_1\right)$$

现将 $\eta = -\xi$ 和式(32)代入式(43), 就有

$$|u(\xi) - D_1| \leq T_2 (D_3 - D_1) e^{\bar{a}_1 \xi}, \xi < 0 \quad (44)$$

式(44)就是关于轨线 $L(P_1, P_2)$ 对应的方程(2)衰减振荡解的振幅的估计. 由式(44)易见, 随着 $\xi < 0$

的不断减小 $u(\xi)$ 将迅速收敛于 D_1 .

将式(41)移项, 并取绝对值, 同时利用不等式(43), 可得

$$|\tilde{V}(\eta) - e^{\bar{a}_1 \eta} (\bar{c}_1 \cos(\bar{\beta}_1 \eta) + \bar{c}_2 \sin(\bar{\beta}_1 \eta))| \leq \frac{\bar{b}}{\bar{\beta}_1} (D_3 - D_1)^2 \int_0^\eta \tilde{V}^2(\tau) (|\tilde{V}(\eta)| + (w+1)) e^{\bar{a}_1(\eta-\tau)} d\tau \leq \frac{\bar{b}}{\bar{\beta}_1 \alpha_1} (D_3 - D_1)^2 \cdot (T_2 + w + 1) T_2^2 e^{\bar{a}_1 \eta}, \eta > 0 \quad (45)$$

再将 $\eta = -\xi$ 和式(32)代入式(43), 可得

$$|u(\xi) - (e^{\bar{a}_1 \xi} \bar{c}_1 \cos(\bar{\beta}_1 \xi) + \bar{c}_2 \sin(\bar{\beta}_1 \xi)) + D_1| \leq T_3 e^{\bar{a}_1 \xi}, \xi < 0 \quad (46)$$

其中, $T_3 = \frac{\bar{b}(D_3 - D_1)^3}{\bar{\beta}_1 \alpha_1} (T_2 + w + 1) T_2^2$. 式(46)表明, 方程(2)对应图 1 中焦-鞍轨线 $L(P_1, P_2)$ 的衰减振荡解的近似解式(29)与其真解间的误差不超过 $T_3 e^{\bar{a}_1 \xi}$. 因 $\epsilon(\xi) = O(e^{\frac{\bar{a}}{2}\xi}) (\xi \rightarrow -\infty)$, 故用式(29)作为方程(2)在定理 3(b)条件下衰减振荡解的近似解是有意义的.

利用类似的方法, 可获得其它所求衰减振荡解的近似解与其真解间的误差估计, 它们的误差均是以指数形式速降的无穷小量.

参考文献:

- [1] Garder C S. The Korteweg-de Vries equation and generalizations IV. The Korteweg-de Vries equation as a hamiltonian system [J]. Journal of Mathematical Physics, 1971, 12: 1548 - 1551.
- [2] Konno K, Ichikawa Y H. A modified Korteweg-de Vries equation for ion acoustic waves [J]. Phys Soc Japan, 1974, 37: 1631 - 1636.
- [3] Whitham G B. Linear and nonlinear wave [M]. New York: Springer, 1974.
- [4] Dodd R K, Eilbeck J C, Gibbon D J, et al. Solitons and nonlinear wave equations [M]. London: Academic Press Inc Ltd, 1982.
- [5] 田畴. MKdV 方程的两组对称及其几何意义 [J]. 高校应用数学学报, 1989, 4(2): 179 - 186.
- [6] 赵申琪, 徐宝智. MKdV 方程的反散射解 [J]. 高校应用数学学报, 1989, 4(3): 398 - 402.
- [7] 刘式适, 傅遵涛, 刘式达, 等. Jacobi 椭圆函数展开法及其在求解非线性波动方程中的应用 [J]. 物理学报, 2001, 50(11): 2068 - 2072.

(下转第 490 页)

实践表明,烘房风机自动回转供风系统与可控引导送风系统两项新技术配合使用,使烘房内的热空气流循环更平稳均匀且可调控,导致木材干燥质量和烘房工作效率显著提高,烘房能耗大大降低,其节能环保意义是不言而喻的。

4 结 论

a. 烘房风机回转供风系统与干燥烘房可控引导送风系统这两项有自主发明专利技术的配合使用,可以使烘房内的热空气流达到干燥工艺要求的最佳工况,实现热空气流的均匀、稳定、可调控的正、反向循环活动,且热空气流的流动阻力小、射程远。

b. 实践证明,创新技术的使用能够很好地满足多种木材干燥的工艺要求,木材干燥质量显著提高,木材干燥能耗明显降低,比常规烘房节电 60% 以上,缩短了干燥周期,使干燥成本大大降低。由于烘房技术层高度的降低,节省了烘房的初投资。烘房容积的减小,缩短了木材干燥的预热升温时间。新技术可以去掉原常规烘房中的送、回风吊顶,使木材堆垛

装卸及设备保养简便,干燥作业的工作效率大大提高,新颖烘房达到了节能环保要求。

c. 采用上述新技术的新颖烘房也适用于食品、药品、农副产品及化工产品等干燥领域。

参考文献:

- [1] 朱政贤. 我国木材干燥设备市场亟待技术规范与正确导向[J]. 木材工业, 2002, 16(1): 6-9.
 - [2] 郑万友, 张丽福. 木材干燥设备的创新途径与发展[J]. 林业机械与木工设备, 2006, 34(2): 7-9.
 - [3] 顾炼百. 我国实用木材干燥技术的进展及思考[J]. 木材工业, 2006, 20(2): 19-22.
 - [4] 刘玉容, 闫振, 伊松林. 改善木材干燥室内空气流动特性的初步研究[J]. 干燥技术与设备, 2006, 4(1): 45-48.
 - [5] 严平, 曹伟武, 钱尚源. 干燥窑用风机自动回转供风系统的研究[J]. 木材工业, 2005, 19(2): 25-27.
 - [6] 严平, 曹伟武, 钱尚源. 烘房风机回转供风系统: 中国, ZL03129112.0[P]. 2005-09-14.
 - [7] 曹伟武, 严平, 钱尚源. 干燥烘房的可控引导送风系统: 中国, ZL200510024874.1[P]. 2008-04-30.
-
- (上接第 418 页)
- [8] 李华兵, 黄兵花, 刘慕仁, 等. 用格子 Boltzmann 方法模拟 MKdV 方程[J]. 物理学报, 2001, 50: 837-840.
 - [9] 唐驾时, 刘铸永, 李学平. MKdV 方程的拟小波解[J]. 物理学报, 2003, 52: 522-525.
 - [10] 石玉仁, 郭鹏等. 修正 Jacobi 椭圆函数展开法及其应用[J]. 物理学报, 2004, 53: 3265-3269.
 - [11] Zhang Jinliang, WANG Mingliang, WANG Yaoming. The extended F-expansion method and the exact solutions to the KdV and MKdV equation with variable coefficients[J]. Acta Physica Sinica, 2006, 26(A)(3): 353-360.
 - [12] Kappeler T, Perry P, Shubin M. Solution of MKdV in class of functions unbounded at infinity[J]. Journal of Geometric Analysis, 2008, 18(2): 443-477.
 - [13] Yang Q, Zhang H J. Exact two-solution solutions for discrete MKdV equation[J]. Commun Theor Phys, 2008, 49(6): 1553-1556.
 - [14] 张卫国. B-MKdV 方程和 B-MBBM 方程的一类孤波解[J]. 兰州大学学报, 1993, 29(3): 14-19.
 - [15] 赵永明, 颜家壬. MkdV 方程的微扰理论[J]. 物理学报, 1999, 48(11): 1976-1982.
 - [16] Ahmet B. On traveling wave solutions to combined KdV-MKdV equation and modified Burgers-KdV equation[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2009, 14: 1038-1042.
 - [17] Nemytskii V, Stepanov V. Qualitative theory of differential equations[M]. New York: Dover, 1989.
 - [18] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985.
 - [19] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性及稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
 - [20] Arons D G, Weiberger H F. Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics [J]. Advances in Mathematics, 1978, 30: 33-76.
 - [21] Fife P C. Mathematical aspects of reacting and diffusing systems [M]. New York: Springer-Verlag, 1979.
 - [22] 叶其孝, 李正元. 反应扩散方程引论[M]. 北京: 科学出版社, 1990.
 - [23] Zhang Weiguo, Chang Qianshun, Jiang Baoguo. Explicit exact solitary-wave solutions for compound KdV-type and compound KdV Burgers-type equations with nonlinear term of any order[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2002, 13: 311-319.