

文章编号:1007-6735(2012)05-0452-04

追捕逃逸型微分对策问题的识别域判别

张霞^{1,2}, 高岩³, 夏尊铨¹

(1. 大连理工大学 数学科学学院, 大连 116024; 2. 浙江财经学院东方学院 信息分院, 海宁 314408;
3. 上海理工大学 管理学院, 上海 200093)

摘要: 研究了仿射非线性控制系统下的单目标两人追捕逃逸型微分对策问题, 解决了该类控制系统在不等式约束区域上系统识别域的判别问题, 给出了判别识别域的充分必要条件. 首先利用生存理论及非光滑分析工具得到了仿射非线性控制系统的识别域判别定理, 从而把对该非线性控制系统识别域的判别问题转化为求解凸不等式组的相容性问题. 基于凸可行问题的求解方法给出了此问题的投影算法, 并给出算法相应的收敛性定理. 最后得到了仿射非线性系统下的两人追捕逃逸型微分对策问题的选择定理.

关键词: 微分对策; 追捕逃逸型问题; 仿射非线性系统; 非光滑分析; 投影算法
中图分类号: TP 13; N 94 **文献标志码:** A

Determining the Discriminating Domain of Pursuit-evasion Games

ZHANG Xia^{1,2}, GAO Yan³, XIA Zun-quan¹

(1. School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. School of Information, Zhejiang University of Finance & Economics Dongfang College, Haining 314408, China;
3. Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The pursuit-evasion games with two players and one target for an affine nonlinear control system were investigated. The problem of determining the discriminating domain in the region with inequality constraints for this class of control system was solved and a necessary and sufficient condition was given out. Based on viability theory and nonsmooth analysis method, a theorem of determining the discriminating domain for the nonlinear system was obtained, so that the problem can be transformed into the problem of determining the consistency of convex inequalities. Then a projection algorithm for solving the problem was provided based on the algorithm of convex feasible problem. The convergence theorem of the algorithm was received and finally the alternative theorem for pursuit-evasion games with two players was achieved.

Key words: differential games; pursuit-evasion games; affine nonlinear system; nonsmooth analysis; projection algorithm

收稿日期: 2012-06-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11071029, 10971187)

作者简介: 张霞(1978-), 女, 讲师. 研究方向: 非线性控制、微分对策. E-mail: sdzhx2002@163.com

1 问题的提出

微分对策理论是现代控制理论中的一个重要研究课题,也是对策论的一个重要分支.微分对策是指在局中人之间进行对策活动时要用到微分方程(组)来描述对策现象或规律的一种对策,是解决对抗与竞争问题的有力工具.微分对策理论的研究可追溯到20世纪40年代,当时因军事上的需要,由Isaacs带领的团队研究了导弹对抗飞行器策略问题,以此为开端,微分对策的基本概念及理论相继提出,最早的文献见于Isaacs的《Differential Games》一书^[1].微分对策理论的进一步发展来自两个方面:一是最优控制理论;二是对策论.从最优控制到微分对策可看作是从一方控制发展到双方或多方控制;从对策论到微分对策,又可看作是从静态的对策理论发展到动态的对策理论.因此,微分对策理论的研究对控制领域和对策论中问题的解决起着重要的作用^[2].而且随着该理论不断发展,现在也被广泛应用到科学研究、工程技术、交通运输、航天航空、环境保护、经济管理和市场竞争等许多方面^[3-5].

根据提法的不同,微分对策问题有多种形式.本文将考虑单目标两人追捕逃逸型微分对策问题(pursuit-evasion games),它是由Isaacs最早提出并命名的.描述如下:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), v(t)) \\ u(t) &\in U, v(t) \in V \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中, $x \in R^n$ 是状态变量; $u \in U, v \in V$ 是控制变量; $U, V \subset R^m$, $f(x, u, v)$ 为 R^{m+n} 到 R^m 上的利普希茨函数.设 Ω 为 R^n 中开子集,也称为目标.引入两个局中人,第一个局中人为 Ursula, 控制变量为 u , 要使系统的状态在有限时间内到达目标 Ω ; 另一个局中人为 Victor, 控制变量为 v , 却力争使系统状态永远避开此目标 Ω , 这就是单目标两人追捕逃逸型微分对策问题.

Krasovskii 及 Subbotin 研究了追捕逃逸型微分对策问题的无优先规则的位置策略^[2,6], 并证明了选择定理.即在任何初始点 x_0 , 或者 Ursula 赢, 或者 Victor 赢, 二者择一.然而, 在 Caratheodory 意义下系统(1)无解, 为此他们推广了解的定义, 给出了近似微分对策.与位置策略的研究方法不同, 文献[7]使用了无预见性策略(nonanticipative strategies), 故

局中人都可以通过对方行动的信息来决定自己的行动, 这在现实中有很多应用事例.文献[7]的另一个重要贡献在于通过几何方式去研究胜利域(victory domain, 指无论对方如何行动, 局中人都能赢的初始点的集合), 据此可以继续作胜利域的数值计算^[8-9].随后又在文献[10]中给出了具有状态约束的追捕逃逸型问题, 并证明了微分对策值的存在性.近期作者又将这一理论推广到混杂系统^[11].

就具体应用问题来讲, 微分对策系统识别域(discriminating domain)的判别很重要, 它直接关系到胜利域表示以及微分对策问题的解.然而, 正如对一般的非线性控制系统可生存性判别的充要条件很难具体使用一样^[12], 目前关于微分对策问题的识别域判别还没有切实可行的判别准则.为此, 本文参照文献[13]的方法, 研究了一类重要的控制系统即仿射非线性控制系统下的追捕逃逸型微分对策问题, 给出该问题的系统识别域判别的方法, 并结合凸可行问题的算法给出该判别问题的投影算法, 最后给出这类微分对策问题的选择定理.

2 识别域的判别方法

首先给出文中用到的几个定义.

定义1 K 为 R^n 的闭子集, $x \in K$, 若 $d_K(x + p) = \|p\|$, 则称向量 $p \in R^n$ 为 K 在 x 处的近似法向量, 所有 p 的集合记为 $NP_K(x)$.

定义2 若任意 $x \in D$, 任意 $p \in NP_D(x)$, $\sup_u \inf_v \langle f(x, u, v), p \rangle \leq 0$, 则称 D 为 f 的识别域. R^n 的闭子集 K 所包含的 f 的最大识别域称为 f 的识别核, 记作 $Disc_f(K)$.

定义3 若任意 $x \in D$, 任意 $p \in NP_D(x)$, $\inf_v \sup_u \langle f(x, u, v), p \rangle \leq 0$, 则称 D 为 f 的领导域(leadership domain). R^n 的闭子集 K 所包含的 f 的最大的领导域称为 f 的领导核, 记作 $Lead_f(K)$.

下面讨论识别域的判别问题.考虑如下仿射非线性系统

$$\dot{x}(t) = f(x, u, v) = w(x) + g(x)u + h(x)v \quad (2)$$

其中, $w(x)$ 为 R^n 到 R^n 的利普希茨函数, $g(x)$ 和 $h(x)$ 为 R^n 到 R^{m+n} 的利普希茨函数, $u \in U$ 为一度量紧空间. $v \in V = \{v \in R^m \mid a_i(v) \leq 0, i = 1, 2, \dots, r\}$, $a_i(v)$ 为 R^m 上的凸函数.

定义区域

$$D = \{x \in R^n \mid \varphi_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, s\} \quad (3)$$

这里给定 $\varphi_j(x)$ 为 R^n 上的连续可微函数. 定义指标集

$$J(x) = \{j \mid \varphi_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, s\}$$

为方便问题的研究, 在此给出本文所用到的假设条件及已知命题.

假设 1

a. $f(x, u, v) \mid R^n \times U \times V \rightarrow R^n$ 为连续函数.

b. 对任意 $u \in U, v \in V, f(\cdot, u, v)$ 为利普希茨连续.

假设 2^[14] 存在 $y_0 \in R^n$, 使得 $\nabla \varphi_j(x)^T y_0 < 0, j = 1, 2, \dots, s$.

假设 3^[14] $\text{cl}(\gamma(x)) = \Gamma(x)$ 成立, 其中

$$\Gamma(x) = \{y \in R^n \mid \nabla \varphi_j(x)^T y \leq 0, j \in J(x)\}$$

$$\gamma(x) = \{y \in R^n \mid \nabla \varphi_j(x)^T y < 0, j \in J(x)\}$$

这里 cl 为闭包.

命题 1^[14] 若假设 2 及假设 3 成立, 则 $T_D(x) = \Gamma(x)$. 其中

$$T_D(x) = \left\{ v \in R^n \mid \lim_{h \rightarrow 0^+} \inf \frac{d_D(x+hv)}{h} = 0 \right\}$$

而 $d_D(y)$ 为点 $y \in R^n$ 到集合 D 的距离, 即 $d_D(y) = \inf_{z \in D} \|y - z\|$.

命题 2^[15] 若假设 1 成立, 则 D 为 f 的识别域的充要条件是:

任意 $x \in D$, 任意 $u \in U, f(x, u, V) \cap T_D(x) \neq \emptyset$ 其中, $f(x, u, V) = \bigcup_{v \in V} f(x, u, v)$, $\emptyset$ 为空集.

下面给出判别系统(2)的识别域的充分必要条件.

定理 1 在假设 1~3 成立的条件下, 区域 D 为系统(2)中 f 的识别域当且仅当不等式组

$$\begin{cases} \text{任意 } x \in D, \text{任意 } u \in U, a_i(v) \leq 0, \\ i = 1, 2, \dots, r \end{cases} \quad (4a)$$

$$\begin{cases} \nabla \varphi_j(x)^T w(x) + \nabla \varphi_j(x)^T g(x) u + \\ \nabla \varphi_j(x)^T h(x) v \leq 0, j \in J(x) \end{cases} \quad (4b)$$

是相容的. 其中, $v \in R^m$ 为变量.

证明 由命题 1 知, 区域 D 为 f 的识别域的充要条件是:

任意 $x \in D$, 任意 $u \in U, f(x, u, V) \cap T_D(x) \neq \emptyset$. 当 x 属于区域 D 的内部时, $T_D(x) = R^n$, 定理显然成立. 因此只需考虑边界点的情况, 即集合 $\{x \in R^n \mid \varphi_j(x) = 0, j \in J(x)\}$. 此时由命题 1 知,

$$T_D(x) = \{y \in R^n \mid \nabla \varphi_j(x)^T y \leq 0, j \in J(x)\}$$

所以 $f(x, u, V) \cap T_D(x) \neq \emptyset$ 等价于下面的不等式组有解

$$\begin{cases} a_i(v) \leq 0, i = 1, 2, \dots, r \\ \nabla \varphi_j(x)^T y \leq 0, j \in J(x) \\ y = w(x) + g(x)u + h(x)v \end{cases}$$

将 $y = w(x) + g(x)u + h(x)v$ 代入上面的第二个不等式, 即得式(4a)和式(4b), 证毕.

3 投影算法及选择定理

下面给出判别系统(2)的识别域的算法.

因为式(4a)是关于变量 v 的线性不等式组, 故可与式(4b)一起组成下面的凸不等式组

$$a_k(v) \leq 0, k = 1, 2, \dots, q$$

其中, $v \in R^m$ 为变量, q 为式(4a)和式(4b)中全部不等式的个数.

判别该凸不等式组的相容性又可视为凸可行问题, 令

$$\Psi = \{v \in R^m \mid a_k(v) \leq 0, k = 1, 2, \dots, q\}$$

则问题转化为寻找 $v \in \Psi$. 解决此问题的一个强有力的方法是投影算法^[16], 下面给出判别识别域的投影算法.

Step 1 输入 $x \in D, u \in U$, 计算 $\nabla \varphi_j(x)^T, w(x), g(x)u, h(x), j \in J(x)$.

Step 2 $i = 0, 0 < \eta \leq 1$, 取 $v_0 \in R^m$.

Step 3 若点列 $\{v_i\}$ 收敛, 则停止, $x \in D$ 为 f 的识别域中的点. 否则转至 Step 4.

Step 4 计算 $\sigma_k \in \partial a_k(v_i) = \{\sigma_k \in R^m \mid z \in R^n, a_k(z) \geq a_k(v_i) + [v_i, z - v_i]\}$,

$\Theta_i = \{y \in R^n \mid a_k(v_i) + \langle \sigma_k, y - v_i \rangle \leq 0, k = 1, 2, \dots, q\}$ 和 $y_i = \arg \min_{y \in \Theta_i} \frac{1}{2} [y - v_i, y - v_i]$.

Step 5 选择 $\omega_i \mid \eta \leq \omega_i \leq 2 - \eta$, 计算 $v_{i+1} = v_i + \omega_i(y_i - v_i)$.

Step 6 $i = i + 1$, 转至 Step 3.

考虑到 $\nabla \varphi_j(x)^T w(x) + \nabla \varphi_j(x)^T g(x)u + \nabla \varphi_j(x)^T h(x)v$ 为 v 的线性函数, 连续可微, 故算法中次微分便是一常数. 因此在适当的假设下, 参考文献[16]可以得出算法收敛.

定理 2(收敛性) 在下列条件成立的情况下, 算法收敛, 即 $\{v_i\} \rightarrow v \in \Psi$.

a. $a_i(v) \leq 0, i = 1, 2, \dots, r$ 为凸连续函数;

b. $\Psi \neq \emptyset$;

c. 对任意 $v, \partial a_i(v)$ 是有界的, $i = 1, 2, \dots, r$.

最后回到两人追捕逃逸型微分对策问题, 给出在仿射非线性系统下的选择定理.

定理3 设 f 满足假设1, 令 $O = R^n \setminus \Omega$, 则 Victor 的胜利域为 $Disc_f(O)$, Ursula 的胜利域为 $O \setminus Disc_f(O)$.

证明 参照文献[7]的选择定理可以得到 Victor 的胜利域为 $Disc_f(O)$, Ursula 的胜利域为 $O \setminus Lead_f(O)$. 又因为 $f(x, u, v) = w(x) + g(x)u + h(x)v$, 故

$$\text{任意}(x, p) \in R^{2n}, \sup_u \inf_v \langle f(x, u, v), p \rangle = \inf_v \sup_u \langle f(x, u, v), p \rangle.$$

即 Isaacs 条件满足, 所以 $Lead_f(O) = Disc_f(O)$, 故结论成立, 证毕.

由此可见, 在这种特殊情况下, 局中两人的胜利域瓜分了目标集的补集. 而且该微分对策问题与无优先规则的位置策略相同, 故只要知道系统的初始状态, 就能确定两人的对策结局.

4 结 论

本文基于非光滑分析及生存理论得出了一类仿射非线性微分对策问题在不等式约束区域上系统识别域的判别方法, 该方法可具体实现; 并给出了算法, 以及两人追捕逃逸型微分对策问题的选择定理. 虽然微分对策理论的研究及应用有了极大的发展, 但在追捕逃逸型微分对策模型的建立和求解以及不确定型微分对策等方面的研究尚不充分, 这可作为进一步研究的课题.

参考文献:

- [1] Isaacs R. Differential games[M]. New York: Wiley, 1965.
- [2] Krasovskii N N, Subbotin A I. Game theoretical control problems[M]. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [3] Getz W M, Pachter M. Two-target pursuit-evasion differential games in the plane[J]. JOTA, 1981, 34 (3): 383 - 403.
- [4] Zhu Q Y, Tembine H, Basar T. Hybrid risk-sensitive mean-field stochastic differential games with application to molecular biology[C]//2011 50th IEEE Conference on Digital Object Identifier. Orlando, 2011: 4491 - 4497.
- [5] Steffen J, Georges Z. Developments in differential game theory and numerical methods: economic and management applications[J]. Computational Management Science, 2007, 4(2): 159 - 181.
- [6] Krasovskii N N, Subbotin A I. Universal optimal strategies in positional differential games [J]. Differential Equat, 1984, 19(11): 1377 - 1382.
- [7] Cardallaguet P. Differential game with two players and one target[J]. SIAM J Control and Optimization, 1996, 34(4): 1441 - 1460.
- [8] Quincampoix M, Saint-pierre P. An algorithm for viability kernels in Holderian case: approximation by discrete viability kernels[J]. Journal of Math System, Estim and Control, 1995, 5(1): 115 - 118.
- [9] Cardallaguet P, Quincampoix M, Saint-pierre P. Some algorithms for differential games with two-players and one target[J]. Mathematical Modeling and Numerical Analysis, 1994, 28(4): 441 - 461.
- [10] Cardallaguet P, Quincampoix M, Saint-pierre P. Pursuit differential games with state constraints[J]. SIAM J Control and Optimization, 2002, 39(5): 1615 - 1632.
- [11] Gao Y, Lygeros J, Quincampoix M. On the reachability problem for uncertain hybrid systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(9): 1572 - 1586.
- [12] 高岩. 一类非线性控制系统可生存性判别[J]. 信息与控制, 2005, 34(4): 510 - 512.
- [13] 高岩. 仿射非线性控制系统生存性的判别[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(6): 654 - 656.
- [14] Demyanov V F, Rubinov A M. Constructive nonsmooth analysis[M]. Berne: Peterlang, 1995.
- [15] Aubin J P. Viability theory [M]. Boston: Birkhäuser, 1992.
- [16] Garcia-palomares U M. A superlinearly convergence projection algorithm for solving the convex inequality problem[J]. Operations Research Letter, 1998, 22(2/3): 97 - 103.