

文章编号:1007-6735(2012)05-0481-06

二部双圈图的拉普拉斯系数

陈永玲, 何常香

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 研究二部双圈图的 Laplacian 系数, 将二部双圈图分为三类, 利用 α -变换及图的 Laplacian 特征多项式的计算, 得到每一分类中具有较小拉普拉斯系数的图, 然后对其 Laplacian 特征多项式进行比较, 得到了阶数固定的二部双圈图中具有最小 Laplacian 系数的图.

关键词: 二部双圈图; 特征多项式; 拉普拉斯系数

中图分类号: O 157.5 **文献标志码:** A

On Laplacian Coefficients of Bipartite Bicyclic Graphs

CHEN Yong-ling, HE Chang-xiang

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The Laplacian coefficients of bipartite bicyclic graphs were investigated. All the bipartite bicyclic graphs were classified into three categories. The graph with the smallest k -th coefficient of each category was obtained by using α -transform and Laplacian characteristic polynomial of the graph, and then the graph with the smallest k -th coefficient among all bipartite bicyclic graphs of order n was obtained by using Laplacian characteristic polynomial of the graph.

Key words: bipartite bicyclic graphs; characteristic polynomial; Laplacian coefficients

1 问题的提出

设 $G=(V, E)$ 为 n 阶图, G 的拉普拉斯矩阵 $L(G)=D(G)-A(G)$ 的特征多项式定义为 G 的拉普拉斯特征多项式, 记为

$$P(G; x) = \det(xI_n - L(G)) = \sum_{k=0}^n (-1)^k c_k(G) x^{n-k}$$

并称 $c_k(G)$ 为图 G 的拉普拉斯系数, 其中, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

设 F 是 G 的一个恰有 k 个连通分支的生成森林, 各连通分支的顶点数为 $n_i, i=1, 2, \dots, k$, 记

$\gamma(F) = \prod_{i=1}^k n_i$. 关于图 G 的拉普拉斯系数, 文献 [1] 证明并给出 $c_{n-k}(G)$ 的表达式, 如定理 1 所示.

定理 1^[1] G 的拉普拉斯特征多项式中 x^k 的系数

$$c_{n-k}(G) = \sum_{F \in \mathcal{F}_k} \gamma(F)$$

式中, $\mathcal{F}_k$ 是 G 的所有的恰有 k 个连通分支的生成森林的集合.

收稿日期: 2010-12-10

作者简介: 陈永玲(1986-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 组合数学与图论. E-mail: da1108@126.com

何常香(1979-), 女, 副教授. 研究方向: 组合数学与图论. E-mail: changxiang-he@163.com

由文献[1]可知,图 G 的拉普拉斯系数 $c_0 = 1$, $c_n = 0$, $c_1 = 2|E(G)|$, $c_{n-1} = n\tau(G)$, 其中, $\tau(G)$ 为 G 的生成树的个数. 对于树的拉普拉斯系数, 文献[2-5]已经有深入的研究, 而关于有圈图的拉普拉斯系数的研究则相对较少, 文献[6-7]分别研究了具有最小拉普拉斯系数的单圈图和双圈图. 本文将研究具有最小拉普拉斯系数的二部双圈图.

定义双圈图为边数等于顶点数加 1 的连通图, 二部双圈图定义为既是双圈图又是二部图的图. 将全体 n 阶双圈图和 n 阶二部双圈图构成的集合分别用 $\mathcal{B}(n)$ 和 $\mathcal{BB}(n)$ 表示.

设 $B(P_3, P_3, P_3)$ 是在长为 4 的圈中不相邻的两个顶点间增加 1 条新的长为 2 的路而得到的图, B 是在 $B(P_3, P_3, P_3)$ 中的某一个 3 度点添加 $n-5$ 条悬挂边 (恰有一个顶点度数为 1 的边) 而得到的图, 如图 1 所示.

本文证明了 B 是所有 n 阶二部双圈图中拉普拉斯系数最小的图.

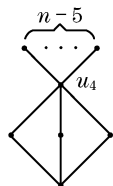


图 1 B
Fig.1 B

2 双圈图的分类和基本引理

定义 1 设 G 为 n 阶连通图, 若 $|E(G)| = n+1$, 则称 G 为双圈图.

由双圈图定义可知, G 为双圈图当且仅当 G 可由同阶的树增加 2 条新边而得到. 若 G 是一个双圈图, 称 G 的 (唯一的) 极小的双圈子图为 G 的基图, 记为 $\hat{G}$. 将图中度数为 1 的点称为悬挂点. 显然, $\hat{G}$ 为 G 的唯一不含悬挂点的双圈子图.

显然, 不含悬挂点的双圈图可以分为 $B(p, q)$, $B(p, l, q)$ 和 $B(P_s, P_l, P_m)$ 这 3 类.

设 $B(p, q)$ 是由有唯一公共点 u 的圈 C_p 和 C_q 组成的图, 如图 2 所示.

设 $B(p, l, q)$ 是在圈 C_p 中的点 u 和圈 C_q 中的点 v 加 1 条长为 l ($l \geq 1$) 的新路 $uu_1 \cdots u_{l-1}v$ 得到的图, 如图 2 所示.

设 $B(p, l, q)$ ($1 \leq m \leq \min\{s, l\}$) 是由点 x 到 y 的 3 条内点不交的路组成的双圈图. 设这 3 条路分别为: 长为 s 的路 $xv_1 \cdots v_{s-1}y$, 长为 l 的路

$xu_1 \cdots u_{l-1}y$ 和长为 m 的路 $xw_1 \cdots w_{m-1}y$, 如图 3 所示.

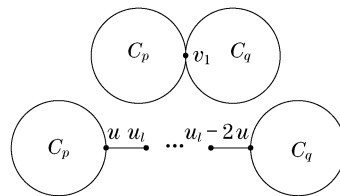


图 2 $B(p, q)$ 和 $B(p, l, q)$
Fig.2 $B(p, q)$ and $B(p, l, q)$

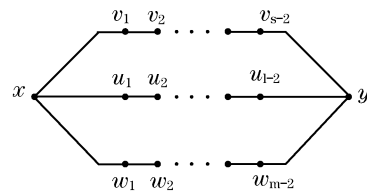


图 3 $B(P_s, P_l, P_m)$
Fig.3 $B(P_s, P_l, P_m)$

可将双圈图分为如下 3 类:

$$\mathcal{B}_1(n) = \{G \in \mathcal{B}(n) \mid G = B(p, q), p, q \geq 3\}$$

$$\mathcal{B}_2(n) = \{G \in \mathcal{B}(n) \mid G = B(p, l, q), p, q \geq 3, l \geq 1\}$$

$$\mathcal{B}_3(n) = \{G \in \mathcal{B}(n) \mid G = B(P_s, P_l, P_m), 2 \leq m \leq \min\{s, l\}\}$$

易知, $\mathcal{B}(n) = \mathcal{B}_1(n) \cup \mathcal{B}_2(n) \cup \mathcal{B}_3(n)$.

类似双圈图的分类, 可将二部双圈图分为如下 3 类:

$$\mathcal{BB}_1(n) = \{G \in \mathcal{B}(n) \mid G = B(2p, 2q), p, q \geq 2\}$$

$$\mathcal{BB}_2(n) = \{G \in \mathcal{B}(n) \mid G = B(2p, l, 2q), p, q \geq 2, l \geq 1\}$$

$$\mathcal{BB}_3(n) = \{G \in \mathcal{B}(n) \mid G = B(P_{2s}, P_{2l}, P_{2m}), 1 \leq m \leq \min\{s, l\}\}$$

易知, $\mathcal{BB}(n) = \mathcal{BB}_1(n) \cup \mathcal{BB}_2(n) \cup \mathcal{BB}_3(n)$.

定义 2^[7] 设 G 为 $n \geq 3$ 阶连通图, $e = uv$ 是 G 的一条非悬挂边, 且 uv 不在任意三角形中, 设 $N_G(v) \setminus \{u\} = \{v_1, v_2, \dots, v_d\}$, 其中, $d \geq 1$. 令

$G' = \alpha(G, u, v) = G - vv_1 - \cdots - vv_d + uv_1 + \cdots + uv_d$ 则称 G' 为 G 经 α -变换得到的图.

引理 1^[7] 设 G 为 n 阶连通图, uv 是 G 的一条非悬挂边, $G' = \alpha(G, u, v)$, 则对任意 $0 \leq k \leq n$, 都有

$$c_k(G) \geq c_k(G')$$

a. 若 uv 是割边, 则等号成立当且仅当 $k \in \{0, 1, n-1, n\}$;

b. 若 uv 不是割边, 则等号成立当且仅当 $k \in \{0, 1, n\}$.

引理 2^[8] 设 G 为 n 阶连通图, H 为 G 的子图, 且 $|V(H)| \geq 2$, 对于点 $v \in V(H)$, G 是由 H 从点 v 长出 $n - |V(H)|$ 条不同的悬挂边而得到的图, 则

$$\Phi(G; x) = (x-1)^{n-|V(H)|} \Phi(H; x) - (n-|V(H)|)x(x-1)^{n-|V(H)|-1} \Phi(L_v(H); x)$$

式中, $L_v(H)$ 为 $L(H)$ 删去点 v 所在的行和列后所得到的主子矩阵.

3 主要结论

为方便起见, 记 $B_1 = B(P_3, P_3, P_3)$, 并设 $V(B_1) = \{u, v, w, z, m\}$, 其中, $d(u) = d(v) = 3$, $d(w) = d(z) = d(m) = 2$. 定义图 $B_1(a, b; c, d, e)$ 为由图 B_1 从点 u, v, w, z, m 分别长出 a, b, c, d, e 条悬挂边而得到的图, 如图 4 所示.

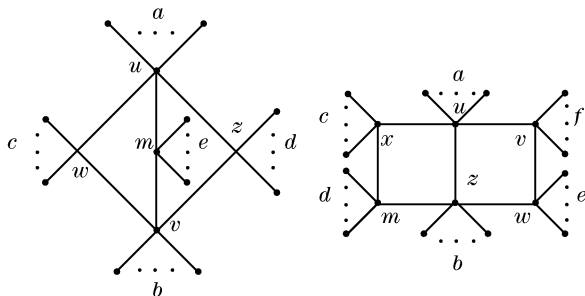


图 4 $B_1(a, b; c, d, e)$ 和 $B_2(a, b; c, d, e, f)$

Fig.4 $B_1(a, b; c, d, e)$ and $B_2(a, b; c, d, e, f)$

引理 3 设图 $B_1(a, b; c, d, e)$ 如图 4 所示, 其中, $a+b+c+d+e = n-5$, 且 $c \neq 0$, 则对 $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, 有

$$c_k(B_1(a, b; c, d, e)) \geq c_k(B_1(a+c, b; 0, d, e))$$

等式成立当且仅当 $k \in \{0, 1, n-1, n\}$.

证明 为方便起见, 记 $G = B_1(a, b; c, d, e)$, $G' = B_1(a+c, b; 0, d, e)$. 当 $k \in \{0, 1, n-1, n\}$ 时, 等号显然成立. 现考虑 c_{n-k} , 其中, $2 \leq k \leq n-2$.

设 $\mathcal{F}_k, \mathcal{F}'_k$ 分别表示 G 和 G' 的恰有 k 个连通分支的生成森林的集合, 设

$$\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_k^1 \cup \mathcal{F}_k^2 \cup \mathcal{F}_k^3 \cup \mathcal{F}_k^4 \cup \mathcal{F}_k^5$$

其中, $\mathcal{F}_k^i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ 表示顶点 u, v, w, z, m 恰属于 i 个不同的连通分支的生成森林的集合, $i \leq k$. 类似地, 可以定义 $\mathcal{F}'_k, i = 1, 2, 3, 4, 5$. 再分别用 x, y, r, s, t 表示与 G 中顶点 u, v, w, z, m 相邻的悬挂顶点在 F 中为孤立点的个数. 记 $A = a+1-x, B = b+1-y, C = c+1-r, D = d+1-s, E = e+1-t$. 不失一般性, 设在 F 中与 w 相邻的悬挂顶点为 $w_1, \dots, w_{c-r}$, 定义森林 F' 为

$$V(F') = V(G')$$

$E(F') = E(F) - ww_1 - \dots - ww_{c-r} + uw_1 + \dots + uw_{c-r}$ 从而 $F' \in \mathcal{F}'_k$. 显然, $F' \in \mathcal{F}'_k \Leftrightarrow F \in \mathcal{F}_k^i, i = 1, 2, 3, 4, 5$.

若 u, w 属于 F 的同一棵生成树, 则 $\gamma(F) = \gamma(F')$. 故假设 u, w 不在 F 的同一棵生成树中, 分 4 种情形考虑.

情形 1 $F \in \mathcal{F}_k^2$

子情形 a $E(F) \cap E(B_1) = \{um, uz, mv\} \cup \{um, vz, mv\} \cup \{um, uz, zv\} \cup \{uz, mv, zv\}$
 $\gamma(F) - \gamma(F') = (A+B+D+E)C - (A+C-1+B+D+E) = (A+B+D+E-1)(C-1)$

子情形 b $E(F) \cap E(B_1) = \{uv, vz, mv\}$

$\gamma(F) - \gamma(F') = A(B+C+D+E) - (A+C-1)(B+D+E+1) = (A-B-D-E-1)(C-1)$

子情形 c $E(F) \cap E(B_1) = \{uv, uz, mv\}$

$\gamma(F) - \gamma(F') = (A+D)(B+C+E) - (A+D+C-1)(B+E+1) = (A+D-B-E-1)(C-1)$

子情形 d $E(F) \cap E(B_1) = \{um, vz, uv\}$

$\gamma(F) - \gamma(F') = (A+E)(B+C+D) - (A+E+C-1)(B+D+1) = (A+E-B-D-1)(C-1)$

子情形 e $E(F) \cap E(B_1) = \{um, uz, uv\}$

$\gamma(F) - \gamma(F') = (A+D+E)(B+C) - (A+D+E+C-1)(B+1) = (A+D+E-B-1)(C-1)$

综合以上 5 种子情形, 有

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_k^2} \gamma(F) - \sum_{F' \in \mathcal{F}'_k} \gamma(F') = \sum_{F \in \mathcal{F}_k^2} 4(2A+D+E-2)(C-1)$$

情形 2 $F \in \mathcal{F}_k^3$

子情形 a $E(F) \cap E(B_1) = \{vz, mv\}$

$\gamma(F) - \gamma(F') = AC(B+D+E) - (A+C-1)(B+D+E) = (A-1)(B+D+E)(C-1)$

子情形 b $E(F) \cap E(B_1) = \{um, mv\}$

$\gamma(F) - \gamma(F') = (A+B+E)CD - (A+C-1+B+E)D = (A+B+E-1)(C-1)D$

子情形 c $E(F) \cap E(B_1) = \{vw, mv\}$

$\gamma(F) - \gamma(F') = AD(B+C+E) - (A+C-1)(B+E+1)D = (A-B-E-1)(C-1)D$

子情形 d $E(F) \cap E(B_1) = \{uz, zv\}$

$\gamma(F) - \gamma(F') =$

$$(A+B+D)CE - (A+B+D+C-1)E = (A+B+D-1)(C-1)E$$

子情形 e $E(F) \cap E(B_1) = \{vw, vz\}$

$$\gamma(F) - \gamma(F') =$$

$$AE(B+C+D) - (A+C-1)(B+D+1)E = (A-B-D-1)(C-1)E$$

子情形 f $E(F) \cap E(B_1) = \{uz, um\}$

$$\gamma(F) - \gamma(F') =$$

$$(A+D+E)BC - (A+D+E+C-1)B = (A+D+E-1)(C-1)B$$

子情形 g $E(F) \cap E(B_1) = \{uz, wv\}$

$$\gamma(F) - \gamma(F') = (A+D)(B+C)E -$$

$$(A+D+C-1)(B+1)E = (A+D-B-1)(C-1)E$$

子情形 h $E(F) \cap E(B_1) = \{um, wv\}$

$$\gamma(F) - \gamma(F') = (A+E)(B+C)D -$$

$$(A+E+C-1)(B+1)D = (A+E-B-1)(C-1)D$$

子情形 i $E(F) \cap E(B_1) = \{uz, mv\}$

$$\gamma(F) - \gamma(F') = (A+D)(B+E)C -$$

$$(A+D+C-1)(B+E) = (A+D-1)(C-1)(B+E)$$

子情形 j $E(F) \cap E(B_1) = \{um, zv\}$

$$\gamma(F) - \gamma(F') =$$

$$(A+E)(B+D)C - (A+E+C-1)(B+D) = (A+E-1)(C-1)(B+D)$$

综合以上 10 种子情形,有

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_k^3} \gamma(F) - \sum_{F' \in \mathcal{F}_k^3} \gamma(F') = \sum_{F \in \mathcal{F}_k^3} [(A-1)(3B+5D+5E)+4DE](C-1)$$

情形 3 $F \in \mathcal{F}_k^4$

子情形 a $E(F) \cap E(B_1) = \{um\}$

$$\gamma(F) - \gamma(F') =$$

$$(A+E)BCD - (A+C-1+E)BD = (A+E-1)(C-1)BD$$

子情形 b $E(F) \cap E(B_1) = \{uz\}$

$$\gamma(F) - \gamma(F') =$$

$$(A+D)BCE - (A+C-1+D)BE = (A+D-1)(C-1)BE$$

子情形 c $E(F) \cap E(B_1) = \{mv\}$

$$\gamma(F) - \gamma(F') =$$

$$(B+E)ACD - (A+C-1)D(B+E) = (A-1)(C-1)(B+E)D$$

子情形 d $E(F) \cap E(B_1) = \{zv\}$

$$\gamma(F) - \gamma(F') =$$

$$(B+D)ACE - (A+C-1)E(B+D) = (A-1)(C-1)(B+D)E$$

子情形 e $E(F) \cap E(B_1) = \{vw\}$

$$\gamma(F) - \gamma(F') =$$

$$(B+C)ADE - (A+C-1)DE(B+1) = (A-B-1)(C-1)DE$$

综合以上 5 种子情形,有

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_k^4} \gamma(F) - \sum_{F' \in \mathcal{F}_k^4} \gamma(F') = \sum_{F \in \mathcal{F}_k^4} [(A-1)(2BD+2BE+3DE)+BDE](C-1)$$

情形 4 $F \in \mathcal{F}_k^5$

$$\gamma(F) - \gamma(F') =$$

$$ABCDE - (A+C-1)BDE = (A-1)(C-1)BDE$$

则

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_k^5} \gamma(F) - \sum_{F' \in \mathcal{F}_k^5} \gamma(F') = \sum_{F \in \mathcal{F}_k^5} (A-1)(C-1)BDE$$

又

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_k^1} \gamma(F) - \sum_{F' \in \mathcal{F}_k^1} \gamma(F') = 0$$

综上所述,有

$$c_{n-k}(G) - c_{n-k}(G') = \sum_{F \in \mathcal{F}_k} \gamma(F) - \sum_{F' \in \mathcal{F}_k'} \gamma(F') =$$

$$\sum_{i=1}^5 \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_k^i} \gamma(F) - \sum_{F' \in \mathcal{F}_k^i} \gamma(F') \right) > 0$$

因此,引理 3 得证.

引理 4 设图 $B_1(a, n-5-a; 0, 0, 0)$ ($a \neq n-5$)

如引理 3 所定义,则对 $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$,有

$$c_k(B_1(a, n-5-a; 0, 0, 0)) \geq c_k(G_1)$$

等式成立当且仅当 $k \in \{0, 1, n-1, n\}$.

证明 为方便起见,记 $G = B_1(a, n-5-a; 0, 0, 0)$, $G' = G_1$. 当 $k \in \{0, 1, n-1, n\}$ 时,等式显然成立.

现考虑 c_{n-k} , 其中, $2 \leq k \leq n-2$.

设 $\mathcal{F}_k, \mathcal{F}_k'$ 分别表示 G 和 G' 的恰有 k 个连通分支的生成森林的集合. 设

$$\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_k^1 \cup \mathcal{F}_k^2 \cup \mathcal{F}_k^3 \cup \mathcal{F}_k^4 \cup \mathcal{F}_k^5$$

其中, $\mathcal{F}_k^i$ 表示顶点 u, v, w, z, m 恰属于 i 个不同的连通分支的生成森林的集合, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. 类似地, 可以定义 $\mathcal{F}_k^i, i = 1, 2, 3, 4, 5$. 再分别用 x, y 表示与 G 中顶点 u, v 相邻的悬挂顶点在 F 中为孤立点的个数. 记 $A = a+1-x, B = b+1-y$. 不失一般性, 设在 F 中与 v 相邻的悬挂顶点为 $v_1, \dots, v_{b-y}$, 定义森林 F' 为

$$V(F') = V(G')$$

$$E(F') = E(F) - vv_1 - \dots - vv_{b-y} + uv_1 + \dots + uv_{b-y}$$

从而, $F' \in \mathcal{F}_k'$. 显然, $F' \in \mathcal{F}_k^i \Leftrightarrow F \in \mathcal{F}_k^i, i = 1, 2, 3, 4, 5$.

若 u, v 属于 F 的同一棵生成树, 则 $\gamma(F) =$

$\gamma(F')$. 故假设 u, v 不在 F 的同一棵生成树中, 分 4 种情形考虑.

情形 1 $F \in \mathcal{F}_k^2$

子情形 a $E(F) \cap E(B_1) = \{uw, um, uz\}$

$$\gamma(F) - \gamma(F') = (A+3)B - (A+B+2) = (A+2)(B-1)$$

子情形 b $E(F) \cap E(B_1) = \{vw, um, uz\} \cup \{uw, uz, mv\} \cup \{uw, um, zv\}$

$$\gamma(F) - \gamma(F') = (A+2)(B+1) - 2(A+B+1) = A(B-1)$$

子情形 c $E(F) \cap E(B_1) = \{wu, vz, mv\} \cup \{um, vz, wv\} \cup \{uz, vm, wv\}$

$$\gamma(F) - \gamma(F') = (A+1)(B+2) - 3(A+B) = (A-2)(B-1)$$

子情形 d $E(F) \cap E(B_1) = \{vw, vm, vz\}$

$$\gamma(F) - \gamma(F') = A(B+3) - 4(A+B-1) = (A-4)(B-1)$$

综合以上 4 种子情形, 有

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_k^2} \gamma(F) - \sum_{F' \in \mathcal{F}_k^2} \gamma(F') = \sum_{F \in \mathcal{F}_k^2} 8(A-1)(B-1)$$

情形 2 $F \in \mathcal{F}_k^3$

子情形 a $E(F) \cap E(B_1) = \{uw, uz\} \cup \{um, uz\} \cup \{uw, um\}$

$$\gamma(F) - \gamma(F') = (A+2)B - (A+B+1) = (A+1)(B-1)$$

子情形 b $E(F) \cap E(B_1) = \{um, wv\} \cup \{um, vz\} \cup \{uz, vw\} \cup \{uw, vm\} \cup \{uw, zv\}$

子情形 c $E(F) \cap E(B_1) = \{vm, vz\} \cup \{vw, vz\} \cup \{vw, vm\}$

$$\gamma(F) - \gamma(F') = A(B+2) - 3(A+B-1) = (A-3)(B-1)$$

综合以上 3 种子情形, 有

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_k^3} \gamma(F) - \sum_{F' \in \mathcal{F}_k^3} \gamma(F') = \sum_{F \in \mathcal{F}_k^3} 12(A-1)(B-1)$$

情形 3 $F \in \mathcal{F}_k^4$

子情形 a $E(F) \cap E(B_1) = \{um\} \cup \{uz\} \cup \{uw\}$

$$\gamma(F) - \gamma(F') = (A+1)B - (A+B) = A(B-1)$$

子情形 b $E(F) \cap E(B_1) = \{vz\} \cup \{vm\} \cup \{vw\}$

$$\gamma(F) - \gamma(F') = A(B+1) - 2(A+B-1) = (A-2)(B-1)$$

综合以上 2 种子情形, 有

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_k^4} \gamma(F) - \sum_{F' \in \mathcal{F}_k^4} \gamma(F') = \sum_{F \in \mathcal{F}_k^4} 6(A-1)(B-1)$$

情形 4 $F \in \mathcal{F}_k^5$

$$\gamma(F) - \gamma(F') = AB - (A+B-1) = (A-1)(B-1)$$

则

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_k^5} \gamma(F) - \sum_{F' \in \mathcal{F}_k^5} \gamma(F') = \sum_{F \in \mathcal{F}_k^5} (A-1)(B-1)$$

又

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_k^1} \gamma(F) - \sum_{F' \in \mathcal{F}_k^1} \gamma(F') = 0$$

综上所述, 有

$$c_{n-k}(G) - c_{n-k}(G') = \sum_{F \in \mathcal{F}_k} \gamma(F) - \sum_{F' \in \mathcal{F}_k} \gamma(F') = \sum_{i=1}^5 \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_k^i} \gamma(F) - \sum_{F' \in \mathcal{F}_k^i} \gamma(F') \right) > 0$$

因此, 引理 4 得证.

综合引理 1, 3 和 4, 可以得到推论 1.

推论 1 设 $G \in \mathcal{BB}_3(n) \setminus \{B\}$, 且 $\hat{G} = B(P_3, P_3, P_3)$, 则对任意 $0 \leq k \leq n$, 有

$$c_k(G) \geq c_k(B)$$

等号成立当且仅当 $k \in \{0, 1, n-1, n\}$.

记 $B_2 = B(P_4, P_4, P_2)$, 设 $V(B_2) = \{u, v, w, z, m, x\}$, 其中, 定义图 $B_2(a, b; c, d, e, f)$ 如图 4 所示, 记 $G_2 = B_2(n-6, 0; 0, 0, 0, 0)$, 从而可得引理 5.

引理 5 若 $a \neq n-6$, 则对 $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, 有

$$c_k(B_2(a, b; c, d, e, f)) \geq c_k(G_2)$$

等式成立当且仅当 $k \in \{0, 1, n-1, n\}$.

推论 2 设 $G \in \mathcal{BB}_3(n) \setminus \{G_2\}$, 且 $\hat{G} = B(P_4, P_4, P_2)$, 则对任意 $0 \leq k \leq n$, 有

$$c_k(G) \geq c_k(G_2)$$

等号成立当且仅当 $k \in \{0, 1, n-1, n\}$.

记 $B_3 = B(4, 4)$, 设 $V(B_3) = \{u, v, w, z, m, x, l\}$. 定义图 $B_3(a; b, c, d, e, f, g)$ 如图 5 所示, 记 $G_3 = B_3(n-7; 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. 与引理 5 的证明类似, 有引理 6 成立.

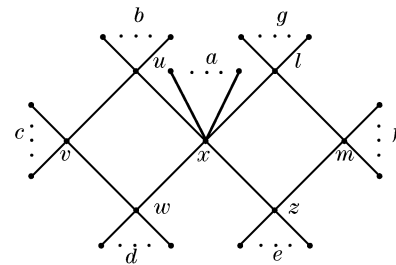


图 5 $B_3(a; b, c, d, e, f, g)$

Fig. 5 $B_3(a; b, c, d, e, f, g)$

引理 6 若 $a \neq n-7$, 则对 $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, 有

$c_k(B_3(a; b, c, d, e, f, g)) \geq c_k(G_3)$
等式成立当且仅当 $k \in \{0, 1, n-1, n\}$.

推论 3 设 $G \in \mathcal{BB}_1(n) \setminus \{G_3\}$, 且 $\hat{G} = B(4, 4)$, 则对任意 $0 \leq k \leq n$, 有

$$c_k(G) \geq c_k(G_3)$$

等号成立当且仅当 $k \in \{0, 1, n-1, n\}$.

若 k 是一个整数, n 为自然数, 约定:

a. 当 $k=0$ 时, $C_n^k=1$;

b. 当 $k < 0$ 或 $k > n$ 时, $C_n^k=0$.

引理 7 设 B, G_3 是如引理 6 定义的 $n (n \geq 5)$ 阶二部双圈图, 则对任意 $0 \leq k \leq n$, 有

$$c_k(B) \leq c_k(G_3)$$

等号成立当且仅当 $k \in \{0, 1, n\}$.

证明 由引理 2 可知

$$P(B; x) = x(x-1)^{n-6}(x-2)^2 \cdot$$

$$[x^3 - (n+4)x^2 + (5n-2)x - 3n]$$

$$P(G_3; x) = x(x-1)^{n-8}(x-2)^2(x^2-4x+2) \cdot$$

$$[x^3 - (n+2)x^2 + (4n-6)x - 2n]$$

故

$$P(G_3; x) - P(B; x) = x(x-1)^{n-8}(x-2)^2 \cdot$$

$$[(n-3)x^3 - (6n-20)x^2 + (5n-10)x - n] =$$

$$x(x-1)^{n-8}[(n-3)x^5 -$$

$$(10n-32)x^4 + (33n-102)x^3 -$$

$$(45n-120)x^2 + (24n-40)x - 4n]$$

从而有

$$c_k(G_3) - c_k(B) = (n-3)C_{n-8}^{n-k-6} +$$

$$(10n-32)C_{n-8}^{n-k-5} + (33n-102)C_{n-8}^{n-k-4} +$$

$$(45n-120)C_{n-8}^{n-k-3} + (24n-40)C_{n-8}^{n-k-2} +$$

$$4nC_{n-8}^{n-k-1} > 0$$

从而, 当 $2 \leq k \leq n-2$ 时, $c_k(G_3) - c_k(B) > 0$, 当 $k \in \{0, 1, n\}$ 时, $c_k(G_3) - c_k(B) = 0$.

因此, 引理 7 得证.

类似可证引理 8.

引理 8 设 B, G_2 如引理 6 所定义, 对任意 $0 \leq k \leq n$, 有

$$c_k(B) \leq c_k(G_2)$$

等号成立当且仅当 $k \in \{0, 1, n\}$.

定理 2 设 $G \in \mathcal{BB}(n) \setminus \{B\}$, 则有

$$c_k(G) \geq c_k(B)$$

其中, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

a. 若 $\hat{G} = B(P_3, P_3, P_3)$, 则等号成立当且仅当 $k \in \{0, 1, n-1, n\}$.

b. 若 $\hat{G} \neq B(P_3, P_3, P_3)$, 则等号成立当且仅当 $k \in \{0, 1, n\}$.

证明 对任意 $G \in \mathcal{BB}(n)$, 由引理 1 可知, 存在 $G' \in \mathcal{BB}(n)$ 满足条件:

a. $\hat{G}' \in \{B(4, 4), B(P_3, P_3, P_3), B(P_4, P_4, P_2)\}$;

b. $c_k(G) \geq c_k(G')$.

现分 3 种情形来考虑.

情形 1 $\hat{G}' = B(P_3, P_3, P_3)$

由推论 1 可知, $c_k(G') \geq c_k(B)$, 从而

$$c_k(G) \geq c_k(B)$$

若 $\hat{G} = B(P_3, P_3, P_3)$, 则等号成立当且仅当 $k \in \{0, 1, n-1, n\}$.

若 $\hat{G} \neq B(P_3, P_3, P_3)$, 则等号成立当且仅当 $k \in \{0, 1, n\}$.

情形 2 $\hat{G}' = B(P_4, P_4, P_2)$

由推论 2 及引理 8 可知, $c_k(G') \geq c_k(G_2) \geq c_k(B)$, 从而

$$c_k(G) \geq c_k(B)$$

情形 3 $\hat{G}' = B(4, 4)$

由推论 3 及引理 7 可知, $c_k(G') \geq c_k(G_3) \geq c_k(B)$, 从而

$$c_k(G) \geq c_k(B)$$

参考文献:

- [1] Kelmans A K, Chelnokov V M. A certain polynomial of a graph and graphs with extremal number of trees[J]. J Combin Theory, Ser B, 1974, 16(3): 197-214.
- [2] Gutman I, Pavlovic' L. On the coefficients of the laplacian characteristic polynomial of trees [J]. Bulletin Acad Serbe Sci Arts, 2003, 127(28): 31-40.
- [3] Mohar B. On the Laplacian coefficients of acyclic graphs[J]. Linear Algebra Applications, 2007, 422(2/3): 736-741.
- [4] Mohar B. Problems: laplacian coefficients of trees[EB/OL]. [2006-11-27]. <http://www.fmf.unilj.si/mohar/>.
- [5] Ilic' A. On the ordering of trees by the Laplacian coefficients[J]. Linear Algebra and its Applications, 2009, 431(11): 2203-2212.
- [6] Stevanovic' D, Ilic' A. On the laplacian coefficients of unicyclic graphs [J]. Linear Algebra and its Applications, 2009, 430(8/9): 2290-2300.
- [7] He C X, Shan H Y. On the laplacian coefficients of bicyclic graphs[J]. Discrete Mathematics, 2010, 310(23): 3404-3412.
- [8] He C X, Shao J Y, He J L. On the Laplacian spectral radii of bicyclic graphs [J]. Discrete Mathematics, 2008, 308(24): 5981-5995.