

文章编号:1007-6735(2012)05-0499-06

半群的 Cwrpp 根和半 Cwrpp 半群

高振林, 宋土芳

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 引进 Cwrpp 根同余(集)、半 Cwrpp 半群的概念. 研究了 Cwrpp 根同余(集)的性质. 指出左 Cwrpp(右 Crpp)和完备 rpp 半群的 Cwrpp 根是强的, 并给出它们的 Cwrpp 根的性质. 证明了一个半群 S 是半 Cwrpp 的充分必要条件是 S 同构于一些 Cwrpp 半群的 0-子直积.

关键词: (强)Cwrpp 根同余(集); 半 Cwrpp 半群; 0-子直积

中图分类号: 20M15 **文献标志码:** A

Cwrpp Radicals of Semigroups and Semi-Cwrpp Smigroups

GAO Zhen-lin, SONG Tu-fang

(College of Science, University of Shanghai for Science and technology, Shanghai 20093, China)

Abstract: The concepts of Cwrpp radical congruences(or sets) and semi-Cwrpp semigroups were introduced. The properties of Cwrpp radical congruence(or set) were studied. It was shown that for left Cwrpp(or right Crpp) and perfect rpp semigroups, their Cwrpp radicals are strong. The characteristics of their Cwrpp radicals were presented and it was proven that a semigroup S is semi-Cwrpp if and only if S is isomorphic to a sub 0-direct product for some Cwrpp semigroups.

Key words: (strong) Cwrpp radical congruences (sets); semi-Cwrpp semigroups; sub 0-direct product

根据文献[1-2], 半群 S 是 rpp 半群的充分必要条件是对于 $\forall a \in S$, S 的主右理想 aS^1 作为右 S^1 -系是投射的. rpp 半群 S 是充足的, 如果 S 的每个 $\mathcal{L}^*$ -类 L_a^* ($a \in S$) 包含唯一的幂等元 a^+ 满足 $a = a^+ a$. rpp 半群 S 是 Crpp, 如果它的幂等元是 S 的中心元. 由文献[2]可知, 半群 S 是 Crpp 的充分必要条件为 S 是左可消么半群的(强)半格. Crpp 半群在半群理论中起着重要的作用.

文献[3]通过一种新的格林关系 $\mathcal{L}^{**}$ 研究 Cwrpp 半群, 给出了 wrpp 半群 S 是 Cwrpp 的充分

必要条件是 S 是 $\mathcal{R}$ -左可消么半群的(强)半格. 文献[4-7]研究了左 Cwrpp(Crpp)和完备 rpp 半群, 其研究成果推广了 Crpp 半群的相关内容.

本文考虑用 wrpp 半群 S 的某种子半群(如 Cwrpp 子半群)来刻画半 wrpp 半群 S 的结构.

首先介绍(强)Cwrpp(或 Crpp)根同余的概念; 然后讨论 Cwrpp 根的性质及其存在的条件, 证明了左 Cwrpp 半群、右 Crpp 半群和完备 rpp 半群的 Cwrpp(或 Crpp)根存在且是强的; 最后定义半 Cwrpp 半群和 0-子直积的概念, 证明了 S 是半

收稿日期: 2010-05-13

作者简介: 高振林(1949-), 男, 教授. 研究方向: 半群理论. E-mail: zlgao@sina.com

Cwrpp 半群的充分必要条件是 S 同构于一些 Cwrpp 半群的 0-子直积.

本文中半群 S 总是包含零元素的, 如果 S 没有 0, 那么, 用 S^* 表示 $S, S^1 = S \cup \{1\}$.

1 半群的(强)Cwrpp 根

对于半群 S , 关系 $\mathcal{L}^*$ 和关系 $\mathcal{L}^{**}$ 定义为

$$(\forall a, b \in S) a \mathcal{L}^* b \text{ 当且仅当 } \forall x, y \in S^1,$$

$$ax = ay \Leftrightarrow bx = by$$

$$(\forall a, b \in S) a \mathcal{L}^{**} b \text{ 当且仅当 } \forall x, y \in S^1,$$

$$(ax, ay) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow (bx, by) \in \mathcal{R}$$

这里, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in S \times S \mid aS^1 = bS^1\}$. 对于关系 $\mathcal{R}$, 如果对 $\forall a, b, c \in S$, 由 $(ca, cb) \in \mathcal{R}$ 可推得 $(a, b) \in \mathcal{R}$, 则称 S 为 $\mathcal{R}$ -左可消的. 称 S 是 wrpp 半群, 如果 S 的每一 $\mathcal{L}^{**}$ -类 L_a^{**} 至少包含 S 的一个幂等元, 且对于所有的 $e \in E(L_a^{**}), a = ea$, 这里 $E(L_a^{**})$ 是 L_a^{**} 幂等元集. 称 wrpp 半群 S 是充足的, 如果对于任意 $a \in S$, 存在唯一的幂等元, 记作 a^+ , 满足 $a^+ \in L_a^{**}$ 且 $a = a^+ a$. 称 wrpp 半群 S 是左 Cwrpp 半群, 如果对所有 $a \in S, aS \subseteq L^{**}(a)$, 这里 $L^{**}(a)$ 是由 a 生成的 S 的最小 $**$ -理想. 右 Crpp 半群和完备 rpp 半群的定义见文献[6-7].

由关系 $\mathcal{L}^*$ 和 $\mathcal{L}^{**}$, 定义以下关系:

$$\mathcal{D}^* = \mathcal{L}^* \vee \mathcal{R}^*, \quad \mathcal{H}^* = \mathcal{L}^* \wedge \mathcal{R}^*$$

$$\mathcal{J}^* = \{(a, b) \in S \times S \mid J^*(a) = J^*(b)\}$$

$$\mathcal{D}^{**} = \mathcal{L}^{**} \vee \mathcal{R}^{**}, \quad \mathcal{H}^{**} = \mathcal{L}^{**} \wedge \mathcal{R}^{**}$$

$$\mathcal{J}^{**} = \{(a, b) \in S \times S \mid J^{**}(a) = J^{**}(b)\}$$

由于 rpp 半群一定是 wrpp 半群; 反之, 不一定成立. 所以, 本文中对 wrpp 半群得到的所有结论, 对 rpp 半群类也有类似相关的结论.

引理 1 和引理 2 主要来自文献[2-3, 5-7].

引理 1 设 S^* 是无零元的半群, 则

a. $\mathcal{L}^{**}$ 是 S^* 上的右同余且 $\mathcal{L}^{**} \upharpoonright_{\text{Reg}(S^*)} = \mathcal{L} \upharpoonright_{\text{Reg}(S^*)}$, 这里 $\text{Reg}(S^*)$ 是 S^* 的所有正则元集.

b. $(a \in S^*, e \in E(S^*)) a \mathcal{L}^{**} e$ 当且仅当 $a = ae$ 且 $(ax, ay) \in \mathcal{R}$, 可推得 $(ex, ey) \in \mathcal{R} (\forall x, y \in S^{*-1})$.

c. S^* 是 Cwrpp 半群当且仅当 S^* 是 $\mathcal{R}$ -左可消子么半群 $L_e^{**} (e \in E(S^*))$ 的半格.

d. 下列条件在充足 wrpp 半群 S^* 上等价:

(a) $\mathcal{L}^{**} = \mathcal{J}^{**}$

(b) S^* 是 $\mathcal{R}$ -左可消卷积 $I_\alpha \times M_\alpha (\alpha \in Y)$ 的

半格(见文献[2]).

(c) $\mathcal{L}^{**}$ 是 S^* 上的半格同余.

(d) 关系

$$\xi = \{(x, y) \in S^* \times S^* \mid \exists f \in E(y^+), x = fy\} \quad (1)$$

是 S^* 的同余, 使得 S^*/ξ 是 Cwrpp 半群.

e. 若 S^* 是充足 rpp 半群, 则 S^* 是右 Crpp 半群当且仅当 S^* 是直积 $M_\alpha \times \Lambda_\alpha (\alpha \in Y)$ 的半格, 这里, M_α 是左可消么半群, Λ_α 是右零带.

f. 若 S^* 是充足 rpp 半群, 则 S^* 是完备 rpp 半群当且仅当 S^* 是 Crpp 半群和正规带的 spined 积.

引理 2 设 S^* 是无零元的半群, 则

a. $(e \in E(S^*)) L_e^{**}$ 是 $\mathcal{R}$ -左可消么半群当且仅当 $a = ea, \forall a \in L_e^{**}$.

b. 令 $T = \bigcup_{e \in I} L_e^{**}$, 那么, T 是 Cwrpp 的当且仅当幂等元集 I 是 $E(S^*)$ 的子半格, 且对于 $\forall e \in I, L_e^{**}$ 是 $\mathcal{R}$ -左可消么半群.

c. 如果 S^* 是 Cwrpp, 那么, $(ab)^+ = a^+ b^+, \forall a, b \in S^*$.

证明 a. 由文献[3]可知, 必要性是显然的. 现证充分性. 令 $a, b \in L_e^{**}$, 那么, $ab \mathcal{L}^{**} eb = b$, 且 $ab = abe$, 故 L_e^{**} 是么半群. 对 $\forall a, x, y \in L_e^{**}$, 若 $(ax, ay) \in \mathcal{R}$, 则由 $a \mathcal{L}^{**} e, x \mathcal{L}^{**} y \mathcal{L}^{**} e$, 得 $(x, y) = (ex, ey) \in \mathcal{R}$. 所以, L_e^{**} 是 $\mathcal{R}$ -左可消么半群, 且有唯一幂等元 e .

b. 由 a 和引理 1 的 c 得, 结论成立.

c. 由引理 1 中 d 的(c), 对 $a, b \in S^*, a \mathcal{L}^{**} a^+, b \mathcal{L}^{**} b^+$, 有 $ab \mathcal{L}^{**} a^+ b^+$. 因为, S^* 的所有幂等元是 S^* 的中心元, 所以, $a^+ b^+ \in E(S^*)$ 且 $(ab)(a^+ b^+) = ab$, 由 $(ab)^+$ 的唯一性, 得 $(ab)^+ = a^+ b^+$.

假设半群 S 有零元, 记 Cwrpp 半群 S 为 $S = \bigcup_{\alpha \in Y} M_\alpha$, 这里, Y 是有零元的半格, $M_\alpha (\alpha \neq 0)$ 是有单位元 1_α 的 $\mathcal{R}$ -左可消非零么半群.

定义 1 半群 S 上的同余 ρ 称为 S 上的 Cwrpp 同余, 如果 S/ρ 是 Cwrpp.

在定义 1 中, ρ 不必是 Rees 同余, 所以, ρ 不必是由 S 的理想生成. 如果 ρ 是 S 上的 Rees 同余, 称 ρ 是 S 上的 Cwrpp Rees 同余. 这时设 $\rho = (I \times I) \cup 1_S$, 那么, I 是 S 的理想, 称为 S 的 Cwrpp 理想(或 S 的 Cwrpp ρ -理想). S/ρ 同构于 Cwrpp 半群 $S \setminus I \cup \{0\}$.

令 ρ 是 S 上的(Cwrpp)同余, 如果存在 S 的子集 I 满足 $S = I \cup C$, 且 C 同构于 S/ρ , 那么, 称 I 是

S 的 (Cwrpp) ρ -集,由文献[8]可知,如果 ρ -集存在,则由同余 ρ 唯一确定,这时将 ρ 记作 ρ_I .

定义 2 设 S 为半群,如果 S 没有任何 Cwrpp 同余,那么,定义 S 上的 Cwrpp 根同余是关系 $S \times S$,这时称 S 是 Cwrpp 根半群;如果 S 至少有一个 Cwrpp 同余,那么,定义 S 上的 Cwrpp 根同余是所有 Cwrpp 同余 $\rho_\alpha (\alpha \in \omega)$ 的交集,记作 ρ_α ,即

$$\rho_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \omega} \{\rho_\alpha \mid \text{对于 } \forall \alpha \in \omega, \rho_\alpha \text{ 是 } S \text{ 上的 Cwrpp 同余}\} \quad (2)$$

对于 ρ_α ,如果也有 ρ_α -集,记为 $N(S)$ (此时有 $\rho_\alpha = \rho_{N(S)}$),称 $N(S)$ 为 S 的 Cwrpp 根集.显然, S 上的 Cwrpp 根同余 ρ_α 不必有 ρ_α -集,从而 S 的 Cwrpp 根集 $N(S)$ 不必存在.

一般地, ρ_α 不必是 S 的 Cwrpp 同余,当然,若 ρ_α 仍是 S 上的 Cwrpp 同余,也不必有 ρ_α -集.如果 ρ_α 仍是 S 上的 Cwrpp 同余,并且 $N(S)$ 存在,则称 $\rho_\alpha(N(S))$ 为 S 的强 Cwrpp 根同余 ($N(S)$ 为 S 的强 Cwrpp 根集).

假设 ρ_α 可表为

$$\rho_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \omega} \{\rho_\alpha \mid \text{对于 } \forall \alpha \in \omega, \rho_\alpha \text{ 是 } S \text{ 上的 Cwrpp 同余,且 } \rho_\alpha \text{ - 集存在}\}$$

则易证 ρ_α -集也存在,并且

$$N(S) = \bigcap_{\alpha \in \omega} \{I_\alpha \mid \text{对于 } \forall \alpha \in \omega, I_\alpha \text{ 是 } S \text{ 的 Cwrpp } \rho_\alpha \text{ - 集}\} \quad (3)$$

特别地,对 $\forall \alpha \in \omega$,如果 ρ_α 均为 Cwrpp Rees 同余,则 $N(S)$ 必存在.

例 1 设 S^* 是左 Cwrpp 半群,由引理 1, S^* 可表示成 $S^* = \bigcup_{\alpha \in Y} (I_\alpha \times M_\alpha)$,其中, Y 是没有零元的半格, I_α 是左零带, M_α 是 $\mathcal{R}$ -左可消么半群, $\alpha \in Y$. 由式(1)定义的 ξ 是 S^* 上的 Cwrpp 同余.这里设 Y 是一个三元全序半格,记 $Y = \{1, 2, 3\}$ 且有全序 $1 < 2 < 3$.注意 $(xE(S^*))E(S^*)x \subseteq M_1 \cup M_2$,其中, $x \notin (M_1 \cup M_2) \setminus \{1_1, 1_2\}$, 1_i 是 $M_i (i=1, 2)$ 的单位元,可定义关系:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \{(x, y) \in S^* \times S^* \mid \exists i \in Y, x, y \in I_i, \\ &\quad \text{或 } x, y \in M_1, \text{或 } x, y \in M_2\} \cup 1_s \\ \rho_2 &= \{(x, y) \in S^* \times S^* \mid \exists i \in Y, x, y \in I_i, \\ &\quad \text{或 } x, y \in M_1\} \cup 1_s \\ \rho_3 &= \{(x, y) \in S^* \times S^* \mid \exists i \in Y, \\ &\quad x, y \in I_i\} \cup 1_s \end{aligned}$$

易验证 $\rho_i (i=1, 2, 3)$ 是 S^* 上 Cwrpp 同余,使

得 S/ρ_i 分别同构于 C_i ,这里

$$\begin{aligned} C_1 &= M_3 \cup \{1_1\} \cup \{1_2\} \\ C_2 &= M_2 \cup M_3 \cup \{1_1\} \\ C_3 &= M_1 \cup M_2 \cup M_3. \end{aligned}$$

S 的 Cwrpp ρ_i -集 N_i 为

$$N_1 = E(S^*) \cup M_1 \cup M_2$$

$$N_2 = E(S^*) \cup M_1; N_3 = E(S^*)$$

使得 $S = N_i \cup C_i (i=1, 2, 3)$ 成立.因为, $\rho_1 \supset \rho_2 \supset \rho_3$,所以, S^* 的 Cwrpp 根 ρ_α 被 ρ_3 包含.因为, C_3 是 S^* 的最大 Cwrpp 子半群,所以,可推得 $\rho_\alpha = \rho_3$.在下面的引理 3 中将指出 $\rho_3 = \xi$.于是,由引理 1 的 d 可知, ρ_α 是强的.

性质 1 对半群 S ,下列命题成立:

a. S 是 Cwrpp 的当且仅当 $\rho_\alpha = 1_s$ 是 S 的强 Cwrpp 根同余,当且仅当 $\{0\}$ 是 S 的强 Cwrpp 根理想.

b. ρ_α (或 $N(S)$) 是 S 的强 Cwrpp 根 (或集) 当且仅当 ρ_α 是 S 的最小 Cwrpp 根同余且 ρ_α -集存在,当且仅当 C 是 S 的最大 Cwrpp 子半群,其中, C 满足 $S = N(S) \cup C$ 且 C 同构于 S/ρ_α .

c. 令 ρ 是 S 的 Cwrpp 同余,则 ρ/ρ_α 是 S/ρ_α 的 Cwrpp 同余.

d. 对于 S 的 Cwrpp 同余 ρ ,设 I 是 S 的 Cwrpp ρ -集,如果 $E(S) \subseteq I$,则 I 是 S 的子半群.

e. 令 $\bar{\rho}_{cr}$ 是 S/ρ_α 的 Cwrpp 根,则 $\bar{\rho}_{cr} = 1_{S/\rho_\alpha}$.

证明 a. 令 I 是 S 的 ρ_α -集,则由 ρ_α 和 I 的定义, $\rho_\alpha = 1_s$ 当且仅当 $I = \{0\}$,如果 S 是 Cwrpp 的,显然, $\{0\}$ 是 S 的 Cwrpp 理想.反之,由文献[9]的定理 2.36,如果 $\{0\}$ 是 S 的 Cwrpp 理想,那么, $S/\{0\} = S \setminus \{0\} \cup \{0\} = S$ 是 Cwrpp 半群.

b. 由 ρ_α 和商半群 S/ρ_α 的关系和文献[9]的定理 1.7,命题显然成立.

c. 由文献[10]的定理 5.6, S/ρ_α 同构于 $(S/\rho_\alpha)/(\rho/\rho_\alpha)$ 且 S/ρ 是 Cwrpp,所以, ρ/ρ_α 是 S/ρ_α 上的 Cwrpp 同余.

d. 令 $S = I \cup C$ 且 C 同构于 S/ρ_I ,设 $a, b \in I$,则 $a\rho_I, b\rho_I$ 是 S/ρ_I 的两个幂等元,所以, $(a\rho_I)(b\rho_I) = ab\rho_I$ 也是 S/ρ_I 的幂等元.如果 $ab \in C = \bigcup_{\alpha \in Y} M_\alpha$,这里 M_α 是 $\mathcal{R}$ -左可消么半群, $\alpha \in Y$ 且 Y 是半格,因为, C 同构于 S/ρ_I ,所以,对于 $\alpha \in Y$, $ab \in M_\alpha$,且 ab 是 M_α 的幂等元.因此, $ab \in M_\alpha \cap E(S)$,由 $E(S) \subseteq I$,有 $ab \in I$.

e. 由式(2), $\rho_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \omega} \rho_\alpha$,得

$$\bar{\rho}_{cr} = \bigcap_{\alpha \in \omega} (\rho_\alpha / \rho_\alpha) \subseteq \rho_\alpha / \rho_\alpha = \rho_\alpha / \rho_\alpha = 1_{S/\rho_\alpha}$$

引理 3 对于没有零元的左 Cwrpp 半群 S^* , 由式(1)定义的 ξ 是最小 Cwrpp 同余, 即 $\rho_\alpha = \xi$.

证明 设 ρ 是 S^* 上的 Cwrpp 同余, 令 $(x, y) \in \xi$, 则存在 $f \in B_\alpha = E(y^+)$ 使得 $x = fy$, $x\rho = (f\rho)(y\rho)$. 因为, $f\rho$ 是 S^*/ρ 的某个 $\mathcal{R}$ -左可消半群的单位元, 所以, 得到 $x\rho = y\rho$, 即 $(x, y) \in \rho$, 从而 $\xi \subseteq \rho$, 即 ξ 是 S^* 上的最小 Cwrpp 同余. 由性质 1, S 的 Cwrpp 根 ρ_α 是 ξ .

由引理 3 可知, 强 Cwrpp 根对一些半群类是存在的. 由引理 3, 可以进一步描述 ρ_α 的特征.

引理 4 设 S 是左 Cwrpp 半群, 这里 $S = S^* \cup \{0\}$ 且 $S^* = \bigcup_{\alpha \in Y} (I_\alpha \times 1_\alpha S_\alpha)$ 是左零带 I_α 和 $\mathcal{R}$ -左可消半群 $1_\alpha S_\alpha$ (有单位元 $1_\alpha, \alpha \in Y$) 的直积的半格, 则

a. ρ_α 是强的, 并可表为

$$\rho_\alpha = \{((e, x), (f, y)) \in S \times S \mid \exists \alpha \in \bar{Y}, ((e, x), (f, y)) \in (I_\alpha \times \{1_\alpha\}) \times (I_\alpha \times \{1_\alpha\})\} \cup 1_S$$

b. S/ρ_α 同构于 $C = \bigcup_{\alpha \in Y} (\{0\} \times 1_\alpha S_\alpha) \cup \{0\}$.

c. $N(S) = E(S)$ 是左零带的半格.

证明 a. 令

$$\rho = \{((e, x), (f, y)) \in S \times S \mid \exists \alpha \in \bar{Y}, ((e, x), (f, y)) \in (I_\alpha \times \{1_\alpha\}) \times (I_\alpha \times \{1_\alpha\})\}$$

则由文献[7]可知, ρ 是 S 上的同余. 令 $((e, x), (f, y)) \in \rho$, 则 $(e, f) \in I_\alpha \times I_\alpha$ 且 $x = y = 1_\alpha$ ($\exists \alpha \in \bar{Y}$). 因为, I_α 是左零带, 由 $e, f \in I_\alpha$ 所以, $e = ef$ 且 $e \in B_\alpha = E(f^+)$, 即 $((e, 1_\alpha), (f, 1_\alpha)) \in \xi$, 这里 ξ 由式(1)定义. 若 $(e, x) = (f, y)$, 显然, $e = f, x = y$. 相反地, 若 $((e, x), (f, y)) \in \xi$, 令 $(e, x) = (g, z)(f, y)$, 其中, $(g, z) \in B_\alpha = E((f, y)^+)$, 得 $(f, y) \in I_\alpha \times S_\alpha, z = 1_\alpha$. 由 $(e, x) = (g, z)(f, y)$, 得 $(e, x) \in I_\alpha \times S_\alpha$. 若 $(f, y) \in I_\alpha \times \{1_\alpha\}$, 则显然 $(e, x) \in I_\alpha \times \{1_\alpha\}$, 所以, $((e, x), (f, y)) \in \rho$. 若 $(f, y) \notin I_\alpha \times \{1_\alpha\}$, 则由 $z = 1_\alpha$, 得 $x = zy = 1_\alpha y = y \in 1_\alpha S_\alpha$. 因为, $I_\alpha \times \{1_\alpha\}$ 是左零带, 得 $e = gf = g$, 从而 $f = e$, 于是 $((e, x), (f, y)) \in 1_S$. 综合得, $((e, x), (f, y)) \in \rho$. 由性质 1, $\rho = \xi = \rho_\alpha$, 由定理 1 的 d, ρ_α 是强的.

b. 因为 $C = \bigcup_{\alpha \in Y} (\{0\} \times 1_\alpha S_\alpha) \cup \{0\}$ 是 S 的 Cwrpp 子半群且 $S = E(S) \cup C$, 令映射 $\phi: S/\rho_\alpha \rightarrow C$ 为

$$((e, x)\rho)\phi = \begin{cases} 0, & (e, x) = 0 \\ (0, 1_\alpha), & (e, x) \in I_\alpha \times \{1_\alpha\} (\forall \alpha \in Y) \\ (0, x), & (e, x) \notin I_\alpha \times \{1_\alpha\} (\forall \alpha \in Y) \end{cases}$$

经验证知 ϕ 是双射且保运算. 因此, ϕ 是同构映射, 即 S/ρ_α 同构于 C .

c. 由 b 和 ρ -集的定义, 知 $N(S) = E(S)$ 是左零带的半格.

由引理 4 和引理 1, 可得定理 1

定理 1 对于充足 wrpp 半群 S , 下列条件是等价的:

a. S 是左 Cwrpp;

b. Cwrpp 根 $\rho_\alpha = \xi$ 是强的, 且 $N(S) = E(S)$ 是左零带的半格.

根据引理 1 的 e 和 f, 没有零元的右 Crpp 半群 S_1 同构于一个右零带和一个 Crpp 半群的 spined 积; 一个完备 rpp 半群 S_2 同构于一个正规带和一个 Crpp 半群 spined 积. 类似于定理 1, 相应地, 可证右 Crpp 和完备 rpp 半群上相关结论. 下面的定理 2 和定理 3 的证明类似于定理 1.

定理 2 在有零元的充足 rpp 半群 S 上, 下列条件是等价的:

a. S 是右 Crpp;

b. $N(S) = E(S)$ 是右零带的半格, $\varphi = \{(x, y) \in S \times S \mid \exists f \in E(y^+), x = yf\} = \rho_\alpha$ 是强的.

定理 3 在没有零元的充足 rpp 半群 S 上, 下列条件是等价的:

a. S 是完备 rpp 半群;

b. $N(S) = E(S)$ 是正规带, 且

$\gamma = \{(x, y) \in S \times S \mid \exists e, f \in E(y^+), x = eyf\} = \rho_\alpha$ 是强的.

“ 1_s 是 S 上的 Cwrpp 同余”与“ $\rho_\alpha = 1_s$ ”是不相同的, 因为, 在 $\rho_\alpha = 1_s$ 中, ρ_α 不一定是 S 上的 Cwrpp 同余. 这就说明了定义 3 的必要性.

定义 3 对于半群 S , 如果 $\rho_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \omega} \rho_\alpha = 1_s$, 这里, 对 $\alpha \in \omega, \rho_\alpha$ 是 S 上的 Cwrpp Rees 同余, 则称 S 为半 Cwrpp 半群.

由性质 1 可知, 一个 Cwrpp 半群是半 Cwrpp; 对任意半群 $S, S/\rho_\alpha$ 总是半 Cwrpp.

2 半 Cwrpp 半群

根据文献[10]中的引理 5.11, 本文将从半群 $S_\alpha (\alpha \in \omega)$ 的 0-直积半群 S 的定义开始探讨, 即讨论 S 为 $S_\alpha (\alpha \in \omega)$ 的笛卡尔积关于笛卡尔乘法构成的半群. 为了简便, 将 S 记作 $S = \prod_{\alpha \in \omega} S_\alpha$, 对 $x, y \in S$, 记 $x = \times_{\alpha \in \omega} x_\alpha, y = \times_{\alpha \in \omega} y_\alpha$, 则 $xy = \times_{\alpha \in \omega} x_\alpha y_\alpha$, S 的零

元记作 $0 = \times_{\alpha \in \omega} 0_\alpha$, 这里, 0_α 是 S_α 的零元. S 的元 $x = \times_{\alpha \in \omega} x_\alpha$ 是非零的, 若至少存在一个 $\alpha \in \omega$ 满足 $x_\alpha \neq 0$. 一般地, S_α 与 $S_\beta (\alpha \neq \beta)$ 之间不必有乘法.

令 B 是 0 -直积 $S = \prod_{\alpha \in \omega} S_\alpha$ 的子半群, 现引进 0 -子直积半群的概念.

定义 4 若 B 满足条件 (M), 则称 B 为 $S_\alpha (\alpha \in \omega)$ 的 0 -子直积半群.

(M) $(\forall \alpha \in \omega)$ 存在满同态映射 $\varphi_\alpha: B \rightarrow S_\alpha$ (φ_α 称为 α -射影).

引理 5 对于 $S_\alpha (\alpha \in \omega)$ 的 0 -子直积 B , 令 φ_α 是 α -射影, 则

a. 存在 B 上的 Rees 同余 ρ_α 满足 $B/\rho_\alpha \cong S_\alpha$.

b. 对 $b, t \in B$, 若对 $\forall \alpha \in \omega, b\varphi_\alpha = t\varphi_\alpha$, 则 $b = t$.

证明 a. 记 $\rho_\alpha = \{(x, y) \in B \times B \mid x\varphi_\alpha = y\varphi_\alpha\}$, 显然, ρ_α 是 B 上的同余. 令 ϕ 为 B/ρ_α 到 S_α 上的映射, 使得 $(x\varphi_\alpha)\phi = x\varphi_\alpha$. 因为, φ_α 是 α -射影, 所以, $B\varphi_\alpha = S_\alpha$. 因此, 对 $\forall s_\alpha \in S_\alpha$, 存在 $x \in B$ 满足 $x\varphi_\alpha = s_\alpha$. 因此, 存在 $x\varphi_\alpha \in B/\rho_\alpha$ 满足 $(x\varphi_\alpha)\phi = x\varphi_\alpha = s_\alpha$. 因此, ϕ 是满射. 如果 $x\varphi_\alpha = y\varphi_\alpha$, 那么 $(x, y) \in \rho_\alpha$. $(x\varphi_\alpha)\phi = \bar{0} = (y\varphi_\alpha)\phi$, 所以, ϕ 是单射. 因此, ϕ 是双射. 显然, 对 $x\varphi_\alpha, y\varphi_\alpha \in B/\rho_\alpha$, $((x\varphi_\alpha)(y\varphi_\alpha))\phi = ((xy)\varphi_\alpha)\phi = (xy)\varphi_\alpha = x\varphi_\alpha \cdot y\varphi_\alpha = (x\varphi_\alpha)\phi \cdot (y\varphi_\alpha)\phi$, 推得 ϕ 是 B/ρ_α 到 S_α 上的同构映射. 令 $I_\alpha = \text{Ker } \varphi_\alpha$, 则 I_α 是 B 的理想, 满足 $\rho_\alpha = (I_\alpha \times I_\alpha) \cup 1_s$, 因此, ρ_α 是 B 上的 Rees 同余.

b. 由文献[10]中的定理 5.7, 结论显然成立.

推论 1 对于 $S_\alpha (\alpha \in \omega)$ 的 0 -子直积 B , 令 φ_α 是 α -射影, 则存在 B 的理想 I_α , 使得 B/I_α 同构于 S_α .

定理 4 设 $I_\alpha (\alpha \in \omega)$ 是半群 B 的理想, 则 B 同构于半群 $A_\alpha = B/I_\alpha$ 的 0 -子直积的充分必要条件是 $\bigcap_{\alpha \in \omega} I_\alpha = \{0\}$.

证明 $\Rightarrow$ 设 B 同构于 $A_\alpha (\alpha \in \omega)$ 的 0 -子直积, 则 $B\varphi_\alpha = A_\alpha$, 这里 φ_α 是 α -射影, 得 $I_\alpha = \{b \in B \mid b\varphi_\alpha = \bar{0}\}$. 考虑 $I = \bigcap_{\alpha \in \omega} I_\alpha$, 如果 $x \in I$, 则 $x \in I_\alpha (\alpha \in \omega)$ 且 $x\varphi_\alpha = \bar{0}, \alpha \in \omega$, 因为, 对于 $\alpha \in \omega, \varphi_\alpha$ 是 α -射影, 故 $x = 0$, 因此, $I = \{0\}$.

$\Leftarrow$ 若 $I = \bigcap_{\alpha \in \omega} I_\alpha = \{0\}$, 令 φ_α 是 B 到 Rees 商半群 $A_\alpha = B/I_\alpha (\alpha \in \omega)$ 的自然同态, 把 $A_\alpha (\alpha \in \omega)$ 的 0 -直积记作 $A = \times_{\alpha \in \omega} A_\alpha$, B 到 A 的映射 φ 为

$$\varphi: B \rightarrow A; b \mapsto b\varphi_\alpha$$

那么, 易证 φ 是 B 到 A 的单同态:

对于 $x, y \in B, (xy)\varphi = (xy)\varphi_\alpha = x\varphi_\alpha \cdot y\varphi_\alpha = x\varphi \cdot y\varphi$. 若 $b \in B$ 满足 $b\varphi = \bar{0}$, 则 $b\varphi_\alpha = \bar{0} (\alpha \in \omega)$, 所以, 对于所有 $\alpha \in \omega$, 必有 $b \in I_\alpha$. 由 $I = \{0\}$, 得 $b = 0$, 因此, φ 是 B 到 A 的单同态, 且 $B \cong B\varphi \subseteq A$.

因为, 对于 A 的子半群 $B\varphi, \varphi_\alpha$ 是 $B\varphi$ 到 A_α 的 α -射影, $\alpha \in \omega$, 所以, 由定义 4, $B\varphi$ 是 $A_\alpha (\alpha \in \omega)$ 的一个 0 -子直积. 因为, $B \cong B\varphi$, 所以, B 同构于 $A_\alpha (\alpha \in \omega)$ 的一个 0 -子直积 $B\varphi$.

推论 2 设 $\{\rho_\alpha \mid \alpha \in \omega\}$ 是半群 B 上的 Rees 同余的簇, 则 B 同构于 $A_\alpha = B/\rho_\alpha (\alpha \in \omega)$ 的一个 0 -子直积的充分必要条件是 $\bigcap_{\alpha \in \omega} \rho_\alpha = 1_s$.

0 -子直积的一个特殊情况是有零元的 spined 积. 半群 S 可能同构于各种不同形式的 0 -子直积的形式.

例 2 设 Z 是整数半群, 令 $J_n = Zp_n Z, J_n$ 是由正素数 $p_n (n \in N^+, N^+$ 是正整数集) 生成的理想, 因为, $\bigcap_{n \in N^+} J_n = \{0\}$, 故由定理 4, Z 同构于 $Z_{p_n} = Z/J_n (n \in N^+)$ 的 0 -子直积.

如果固定正素数 p , 令 $I_n = Zp^n Z (n \in N^+)$, 类似地, $\bigcap_{n \in N^+} I_n = \{0\}$, 因此, 由定理 4, 有 Z 同构于 $Z_{p^n} = Z/I_n (n \in N^+)$ 的 0 -子直积. 上面的 $Z_{p^n} (n \in N^+)$ 是群, 但对于 $n \in N^+$ 且 $n > 1$, 这里的 Z_{p^n} 是一个有真零因子的半群.

定理 5 S 是半 Cwrpp 半群的充分必要条件是 S 同构于 Cwrpp 半群的一个 0 -子直积.

证明 $\Rightarrow$ 由定义 3 可知, S 的 Cwrpp 根同余 $\rho_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \omega} \rho_\alpha = \{0\}$, 这里 $\rho_\alpha (\alpha \in \omega)$ 是 S 的任意 Cwrpp Rees 同余. 由推论 2, S 同构于 $S/\rho_\alpha (\alpha \in \omega)$ 的 0 -子直积. 由定义 1, $S/\rho_\alpha (\alpha \in \omega)$ 是 Cwrpp 半群.

$\Leftarrow$ 若 S 是一些 Cwrpp 半群 $S_\alpha (\alpha \in \omega)$ 的一个 0 -子直积, 那么, 由定义 4, 对 $\forall \alpha \in \omega$, 有一个 α -射影满足 $S\varphi_\alpha = S_\alpha$, 由推论 1, 存在 S 的理想 I_α 满足 $S/I_\alpha \cong S_\alpha$. 因为, S/I_α 是 Cwrpp 半群, 对于 $\forall \alpha \in \omega, I_\alpha$ 是 S 的 Cwrpp 理想, 因此, 由定理 4 可知, S 存在 Cwrpp 根集 $N(S) \subseteq \bigcap_{\alpha \in \omega} I_\alpha = \{0\}$. 由定义 3 可知, S 是半 Cwrpp 半群.

由定理 5 可知, 一个半 Cwrpp 半群 S 可表示成一些 Cwrpp 半群的 0 -子直积, 并在同构意义上这种表示是唯一的. 显然, 由定理 5, 一些 Cwrpp 半群的 0 -子直积是半 Cwrpp 半群.

推论 3 半群 S 是半 Clifford (或半 Crpp) 的充

分必要条件是 S 同构于一些 Clifford(或 Crpp)半群的 0-子直积.

现举例阐述定理 5 的应用.

例 3 根据文献[10], 令 $S = \langle a \rangle \cup \{0\}$ 是有零元的无限单演半群, 那么, 对于任意的正整数 $n \in N^+$, 有

$$\rho_n = \{(a^p, a^q) \mid p \equiv q \pmod{n}\} \quad (4)$$

是 $S^* = S \setminus \{0\}$ 上群同余. 当然, ρ_n 也是 S 上的 Cwrpp 同余. 相反地, 对 S^* 上的任意群同余 ρ , 存在 $n = \min\{|r-s| \mid (a^r, a^s) \in \rho \setminus 1_s\}$ 满足 $\rho = \rho_n$, 即 S 上的所有群同余可由 $\rho_n (n \in N^+)$ 表示. 因此, 推得 $\bigcap_{n \in N^+} \rho_n = 1_s$. 设 ρ_α 是 S 的 Cwrpp 根同余, 则显然, $\rho_\alpha \subseteq \bigcap_{n \in N^+} \rho_n$. 故可知 S 是半 Cwrpp 半群. 由定理 5, S 同构于群 $S/\rho_n (n \in N^+)$ 的 0-子直积. 显然, S 不是 wrpp 但它是半 Cwrpp 半群.

现设 ω 是非空指标集, 对 $\forall \alpha \in \omega$ 有 $S_\alpha = \langle a_\alpha \rangle \cup \{0\}$ 是有零元的无限单演半群. 在 0-直并半群 $S = \bigcup_{\alpha \in \omega} S_\alpha$ 上定义关系: 对所有 $n \in N^+$, 有

$$\sigma_n = \{(x, y) \in S \times S \mid \exists \alpha \in \omega, (x, y) \in \rho_n^\alpha\}$$

其中, ρ_n^α 如式(4)定义, $\rho_n^\alpha (\forall n \in N^+)$ 是 S_α^* 上的群同余, 由 ρ_n^α 的性质, 易得 σ_n 是 S 上的同余. 特别地, 令 ω 是半格, 定义 S_α 与 $S_\beta (\alpha, \beta \in \omega)$ 的乘法如下:

$$\text{对 } \forall a_\alpha^p \in S_\alpha, a_\beta^q \in S_\beta$$

$$a_\alpha^p \cdot a_\beta^q = a_{\alpha\beta}^{p+q} \in S_{\alpha\beta}$$

$$0 \cdot a_\beta^q = a_\alpha^p \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$$

那么, $S = \bigcup_{\alpha \in \omega} S_\alpha$ 是 $S_\alpha (\alpha \in \omega)$ 的半格. 易验证 $S/\sigma_n \cong T = \bigcup_{\alpha \in \omega} G_\alpha \cup \{0\}$, 其中, T 是群 $G_\alpha (\alpha \in \omega)$ 的半格, 由文献[10]的定义 2.1, S/σ_n 是 Clifford 半群. 因此, σ_n 是 S 上的 Cwrpp 同余. 由 $\bigcap_{n \in N^+} \rho_n^\alpha = 1_{S_\alpha} (\forall \alpha \in \omega)$, 易看出 $\bigcap_{n \in N^+} \sigma_n = 1_s$, 且 $\rho_\alpha \subseteq \bigcap_{n \in N^+} \sigma_n$, 即 S 是半 Cwrpp

半群. 由定理 5, S 同构于 Clifford 半群 $S/\sigma_n (n \in N^+)$ 的 0-子直积.

显然, 在例 3 中, 因为, $S_\alpha (\alpha \in \omega)$ 不是 wrpp 半群, 所以, S 也不是 wrpp 半群. 这个例子说明了半 Cwrpp 半群的概念拓宽了研究半群的范围. 最后得出, 如果 $\mathcal{V}$ 是半群的簇, 那么, $\mathcal{V}$ 里的两个半群的 spined 积一定是包含在 $\mathcal{V}$ 里. 但对于 0-子直积一般没有这样的性质.

参考文献:

- [1] Fountain J B. Right pp monoids with central idempotents[J]. Semigroup Forum, 1977, 13(1): 229-237.
- [2] Fountain J B. Abundant semigroups[J]. Proc London Math Soc, 1982, 44(3): 103-123.
- [3] Tang X D. On a theorem of C-wrpp semigroups[J]. Comm Algebra, 1997, 25(5): 1499-1504.
- [4] Guo Y Q, Shum K P, Zhu P Y. The structure of left C-rpp semigroups[J]. Semigroup Forum, 1995, 50(1): 4-23.
- [5] Du L, Shum K P. On left C-wrpp semigroups[J]. Semigroup Forum, 2003, 67(3): 373-387.
- [6] Shum K P, Ren X M. The structure of right C-rpp semigroups[J]. Semigroup Forum, 2004, 68(2): 280-292.
- [7] Guo X J, Shum K P, Guo Y Q. Perfect rpp semigroups[J]. Comm in Algebra, 2001, 29(6): 2447-2459.
- [8] Gao Z L. On the least property of the semilattice congruences on po-semigroups[J]. Semigroup Forum, 1998, 56(3): 323-333.
- [9] Clifford A H, Preston G. B. The algebraic theory of semigroups[M]. Washington: American Math Soc, 1961.
- [10] Howie J M. An introduction to semigroup theory[M]. London: Academic Press, 1976.