

文章编号:1007-6735(2012)06-0593-05

带有导数项非线性 Schrödinger 方程 行波解的存在性

杨林林, 孙宗玉, 魏公明
(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 研究了一类带有一阶导数摄动项的非线性 Schrödinger 方程行波解的性质, 利用 Lyapunov-Schmidt 方法及压缩映射原理, 证明了非线性 Schrödinger 方程行波解的存在性和集中性质, 即相当于 Planck 常数的摄动参数趋于零时, 证明了该非线性 Schrödinger 方程的行波解的存在性, 且这些解集中在其势函数的非退化临界点处.

关键词: 非线性 Schrödinger 方程; Lyapunov-Schmidt 方法; 压缩映射
中图分类号: O 175.2 **文献标志码:** A

Existence of Standing Waves for a Class of Nonlinear Schrödinger Equations with Derivative Terms

YANG Lin-lin, SUN Zong-yu, WEI Gong-ming
(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The existence and concentration of standing waves were studied for a class of nonlinear Schrödinger equations with first order derivative terms. Precisely, as the small parameter (which corresponds to Planck constant) approaches to zero, the standing waves of these nonlinear Schrödinger equations concentrate at the non-degenerate critical points of potentials. The paper concerns the singular perturbation of elliptic equations with first order derivative terms and this is also a new feature of the paper.

Key words: nonlinear Schrödinger equations; Lyapunov-Schmidt method; contraction mapping

近年来,许多学者对非线性 Schrödinger 方程行波解的性质进行了研究. 如 Floer 等^[1] 利用 Lyapunov-Schmidt 方法对一维不含导数项的非线性 Schrödinger 方程行波解的存在性进行了研究, 随后 Oh^[2-5] 将其结论推广到高维情况; Ding 等^[6-7] 和 Rabinowitz^[8] 用变分法及山路引理证明了一类不含

导数项的非线性 Schrödinger 方程行波解的存在性, Wang^[9] 进一步证明了这些行波解的集中性. 本文推广了 Floer 等^[1] 的结论, 证明了含一阶导数摄动项的非线性 Schrödinger 方程

$$ih\varphi_t = -\frac{h^2}{2m}\varphi_{xx} + V\varphi - \gamma|\varphi|^2\varphi + ha(x)\varphi_x \quad (1)$$

收稿日期: 2011-12-22

作者简介: 杨林林(1987-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 偏微分方程. E-mail: yanglin198754@126.com
魏公明(联系人), 男, 副教授. 研究方向: 偏微分方程. E-mail: gmweixy@163.com

行波解的存在性和集中性,其中 $V, a(x)$ 满足条件:

a. V 是 R 上的连续有界函数;

b. $a(x)$ 是 R 上收敛于 0 的连续有界函数且 $a(x) \in C^2(R)$;

c. $a(0) = a'(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} a(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} a'(x) = 0$.

对方程 (1), 找其形式为 $\varphi(x, t) = \exp(-iEt/h)v(x)$ 的解, 其中 v 是实函数, 函数 V, E 满足 $V - E > 0$. 将 $\varphi(x, t)$ 代入式 (1), 得

$$-\frac{h^2}{2m}v'' + Vv - \gamma v^3 + ha(x)v' = Ev$$

不失一般性, 假设 $\gamma = m = 1$, 则

$$-\frac{h^2}{2}v'' + Vv - v^3 + ha(x)v' = Ev \quad (2)$$

主要结论:

定理 1 设 x_0 是函数 V 的非退化临界点, $V, a(x)$ 满足上面的条件, 则存在 $h_0 > 0$ 使得对满足 $0 < h < h_0$ 的 h , 方程 (2) 有非零解; 当 $h \rightarrow 0$ 时, 这些解关于 x_0 越来越集中.

文中所使用的一些记号:

$H = H^2(R, R), L = L^2(R, R)$ (H^2, L^2 均为 Sobolev 空间); $(\cdot)$ 为 L^2 内积; $\|f\| = \|f\|_2 = (\int f^2)^{\frac{1}{2}}; \|f\|_H = \|f\| + \|f'\| + \|f''\| = \|f\|_2 + \|f'\|_2 + \|f''\|_2; H_h = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2} + V_h; D(H_h) = \left\{ u \in L^2 \mid \int \left[\left(\frac{d^2 u}{dy^2} \right)^2 + (V_h u)^2 \right] dy < \infty \right\}$.

1 线性估计

受文献 [1] 启发, 引入变量 $y = \frac{x}{h}$, 定义函数 u 为 $u(y) = v(hy)$. 不失一般性, 假设 0 是 V 的临界点, 则方程 (2) 可化为

$$-\frac{1}{2}u'' + (V_h - V(0))u - \lambda u - u^3 + a(hy)u' = 0 \quad (3)$$

其中, $\lambda = E - V(0), V_h = V_h(y) = V(hy)$, 令

$$S_h(u) = -\frac{1}{2}u'' + (V_h - V(0))u - \lambda u - u^3 + a(hy)u', \text{ 则式 (3) 化为}$$

$$S_h(u) = 0 \quad (4)$$

易知, 当 $h \rightarrow 0$ 时, $a(hy) \rightarrow a(0) = 0$ 且 $V_h - V(0)$ 在 R 的紧子集上一致收敛于 0. 对式 (4) 两端取极限, 得其形式极限为

$$S_0(u) = -\frac{1}{2}u'' - \lambda u - u^3 = 0 \quad (5)$$

所以, $S_h(u)$ 是 $S_0(u)$ 的一个摄动, 且 $S_0(u) = 0$ 有两个解

$$u_0 = \sqrt{-2\lambda} \operatorname{sech}(\sqrt{-2\lambda}y)$$

$$u_1 = -\sqrt{-2\lambda} \operatorname{sech}(\sqrt{-2\lambda}y)$$

易知^[10] $S'_0(u_0) = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2} - \lambda - 3u_0^2$ 有一维的核 $\ker S'_0(u_0) = \operatorname{span}\{u'_0\}$.

采用 Lyapunov-Schmidt 方法, 定义 $u_{z,h}(y) =$

$u_0(y - \frac{z}{h})(z \in R, h > 0)$, 对足够小的 $h > 0$, 找式

(4) 形式为 $u_{z,h} + \phi$ 的解. 由 Taylor's 展式知

$$S_h(u_{z,h} + \phi) = S_h(u_{z,h}) + S'_h(u_{z,h})\phi + N_{z,h}(\phi) \quad (6)$$

其中, $N_{z,h}(\phi) = -(3u_{z,h}\phi^2 + \phi^3)$

若 $u_{z,h} + \phi$ 是式 (4) 的解, 则 $S_h(u_{z,h} + \phi) = 0$. 由式 (6) 知 $S'_h(u_{z,h})\phi = -S_h(u_{z,h}) - N_{z,h}(\phi)$, 只需证明 ϕ 为 $-S'^{-1}_h(u_{z,h})(S_h(u_{z,h}) + N_{z,h}(\phi))$ 的不动点即可.

下面给出几个重要引理和定理:

引理 1^[1] 对任意的 $h > 0$, 函数 S_h 是光滑映射, 且其 Fréchet 导数为

$$S'_h(u) = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2} + a(hy)\frac{d}{dy} + (V_h - V_0 - \lambda) - 3u^2$$

证明 由 H^1 嵌入到 H, H 嵌入到 L^6 (Sobolev 空间) 为连续嵌入及 H 和 L 的定义, 引理得证.

记 $S'_0(u_{z,h})$ 的核为 $K_{z,h}$, 则 $K_{z,h} = \operatorname{span}\{u'_{z,h}\}$. 记 $K_{z,h}^\perp$ 为 $K_{z,h}$ 在 H 上的 L 正交补, 对于 $\phi_{z,h} \in K_{z,h}^\perp \cap H$, 定义 $\pi_{z,h}^\perp: L \rightarrow K_{z,h}^\perp, L_{z,h} = \pi_{z,h}^\perp S'_h(u_{z,h})|_{K_{z,h}^\perp \cap H}$.

引理 2^[2] 存在 $b > 0$, 对任意满足 $V - E > b > 0$ 的 E 及 $u \in D(H_h)$, 有

$$\left\| \left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2} + (V_h - E) \right] u \right\| \geq k_1 \|u\|_H$$

定理 2 存在正实数 γ, α_1, h_1 , 使得当 $|z| < \alpha_1, 0 < h < h_1$ 及 $\phi \in K_{z,h}^\perp \cap H$ 时, 有

$$\|L_{z,h}\phi\| \geq \gamma \|\phi\|_H$$

证明 采用文献 [11-12] 的方法, 假设定理结论不成立, 则存在收敛于 $(0, 0)$ 的序列 $(z_i, h_i) \in R \times R^+$ 及序列 $\phi_i \in K_{z_i,h_i}^\perp \cap H$, 对每个 i , 有

$$\|\phi_i\|_H = 1 \quad (7)$$

$$\|L_{z_i,h_i}\phi_i\| \rightarrow 0 (i \rightarrow \infty) \quad (8)$$

考虑 H 中的序列

$$\phi_i(y) = \phi_i(y + \frac{z_i}{h_i}) \quad (9)$$

对每个 i , 由式(7)及式(9)知 $\|\phi_i\|_H = \|\psi_i\|_H = 1$, 则可在 H 中选出子序列仍记为 ϕ_i , 使得 ϕ_i 弱收敛于 ψ_∞ . 又 $(\phi_i, u'_0) = 0$, 故 $(\psi_\infty, u'_0) = 0$.

下证 $\psi_\infty = 0$. 定义线性算子

$$L_i = \pi_0^\perp \left[-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} + (V_i - E) + a_i \frac{d}{dy} - 3u_0^2 \right] \quad (10)$$

其中, $V_i(y) = V_{h_i}(y + \frac{z_i}{h_i}) = V(h_i y + z_i)$,

$a_i(y) = a_{h_i}(y + \frac{z_i}{h_i}) = a(h_i y + z_i)$, $\pi_0^\perp$ 为 $\ker L_0$

在 L^2 上的正交投影的补.

对 R 上的任意有界区间 Ω , 定义 $\|f\|_{2,\Omega} = \int_\Omega |f|^2 dx$, 则

$$\begin{aligned} \|L_0 \phi_i\|_{2,\Omega} &= \left\| \pi_0^\perp \left[-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} + (V(0) - E) - 3u_0^2 \right] \phi_i \right\|_{2,\Omega} = \\ &= \left\| L_i \phi_i - \pi_0^\perp [(V_i - V(0)) + a_i \frac{d}{dy}] \phi_i \right\|_{2,\Omega} \leq \\ &= \|L_i \phi_i\| + \max_{y \in \Omega} |V_i - V(0)| \|\phi_i\| + \left\| a_i \frac{d}{dy} \phi_i \right\| \end{aligned}$$

从而对任意的 Ω , 有 $\lim_{i \rightarrow \infty} \|L_0 \phi_i\|_{2,\Omega} = 0$. 因 ϕ_i 在 H 中弱收敛于 ψ_∞ , 则 $L_0 \phi_i$ 在 L 中弱收敛于 $L_0 \psi_\infty$. 故 $\|L_0 \psi_\infty\|_{2,\Omega} = 0 \Rightarrow L_0 \psi_\infty = 0$, 即 $\psi_\infty \in \ker L_0$. 又 $(\psi_\infty, u'_0) = 0$, 所以 $\psi_\infty = 0$.

由于 $3u_0^2(x) \rightarrow 0$, 所以在 L 中 $3u_0^2 \phi_i \rightarrow 0 (i \rightarrow \infty)$. 由式(8)和式(10), 得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\pi_0^\perp B_i \phi_i\| = 0$$

其中, $B_i = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} + (V_i - E) + a_i \frac{d}{dy}$

对于 $B_i u$, 有

$$\begin{aligned} \|B_i u\| &= \left\| \left[-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} + (V_h - E) - a_i \frac{d}{dy} \right] u \right\| \geq \\ &= \left\| -\frac{1}{2} u'' + (V_h - E) u \right\| - \|a_i u'\| \geq k_1 \|u\|_H - \\ &= \|a_i u'\| \geq k_1 \|u\|_H - \max |a_i| \|u'\| = (k_1 - \max |a_i|) \|u'\| + k_1 \|u''\| + k_1 \|u'\|. \\ (k_1 - \max |a_i| > 0) &\geq k_2 \|u\|_H \end{aligned} \quad (11)$$

其中, $k_2 = k_1 - \max |a_i|$. 则 $\|B_i \phi_i\| \geq k_2$, 所以

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(u'_0, B_i \phi_i)}{\|u'_0\| \|B_i \phi_i\|} = 1 \quad (12)$$

由 $H_h - E$ 的自共轭性及 $S'_0(u_0)u'_0 = 0$ 知

$$(H_h - E)u'_0 = \left[-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} + V_h - V(0) + V(0) - \right.$$

$$E - 3u_0^2 + 3u_0^2 \left. \right] u'_0 = (V_h - V_0)u'_0 + 3u_0^2 u'_0$$

所以

$$\begin{aligned} (u'_0, B_i \phi_i) &= (u'_0, (H_h - E + a_i \frac{d}{dy}) \phi_i) = \\ &= ((H_h - E)u'_0, \phi_i) + (u'_0, a_i \frac{d}{dy} \phi_i) = \\ &= ((V_i - V(0))u'_0, \phi_i) + (3u_0^2 u'_0, \phi_i) + \\ &= (u'_0, a_i \frac{d}{dy} \phi_i) \end{aligned}$$

由 $(V_i - V_0)u'_0$ 在 R 上一致收敛于 0 及 $\|\phi_i\|_2$ 的

有界性知 $((V_i - V(0))u'_0, \phi_i) \rightarrow 0 (i \rightarrow \infty)$. 由 ϕ_i

弱收敛于 0 知 $(3u_0^2 u'_0, \phi_i) \rightarrow 0 (i \rightarrow \infty)$. 由 $\|\phi_i\|_2$

的有界性及 $a_i \rightarrow 0 (i \rightarrow \infty)$, 得 $(u'_0, a_i \frac{d}{dy} \phi_i) \rightarrow$

$0 (i \rightarrow \infty)$. 所以 $\lim_{i \rightarrow \infty} (u'_0, B_i \phi_i) = 0$, 与式(12)矛盾.

定理得证.

2 非线性估计

本部分主要证明, 对 $z \in R$ 和足够小的 $h > 0$, 存在 $\phi_{z,h} \in K_{z,h}^\perp$, 使得

$$\pi_{z,h}^\perp S_h(u_{z,h} + \phi_{z,h}) = 0 \quad (13)$$

记 $S_{z,h}^\perp = \pi_{z,h}^\perp S_h(u_{z,h})$, $N_{z,h}^\perp = \pi_{z,h}^\perp N_{z,h}$. 定义

$$F_{z,h}(\phi) = -L_{z,h}^{-1} [N_{z,h}^\perp(\phi) + S_{z,h}^\perp] \quad (14)$$

由式(6)可知, 式(13)等价于 $\phi_{z,h}$ 是 $F_{z,h}(\phi_{z,h})$ 的不动点.

下证 $F_{z,h}(\phi)$ 在 0 的一个适当的小邻域内是一个压缩映射, 由定理 2 知 $\|L_{z,h}^{-1}\| \leq \gamma^{-1}$, 所以还需对 $N_{z,h}^\perp$ 和 $S_{z,h}^\perp$ 作估计.

引理 3^[1] 存在不依赖 z 和 h 的正数 C, δ , 对 $\phi, \phi' \in H$, 当 $\|\phi\|_H \leq \delta, \|\phi'\|_H \leq \delta$ 时, 有

$$\|N_{z,h}(\phi)\| \leq C \|\phi\|_H^2 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \|N_{z,h}(\phi') - N_{z,h}(\phi)\| &\leq \\ C \max(\|\phi'\|_H, \|\phi\|_H) \|\phi' - \phi\|_H & \quad (16) \end{aligned}$$

定理 3 对于 $0 < \rho < \frac{1}{h}$, 有

$$\begin{aligned} \|S_h(u_{z,h})\|^2 &\leq k_3 (e^{-v_1 \rho} + \sup_{|y| < \rho} |V(hy + z) - \\ &= V(0)|^2 + \sup_{|y| < \rho} |a(hy + z)|^2) \end{aligned}$$

其中, v_1, k_3 与 h 无关. 特别地, $\|S_h(u_{z,h})\| \rightarrow 0 ((z, h) \rightarrow (0, 0))$.

证明 由 $S_0(u_{z,h}) = 0$ 可得, $S_h(u_{z,h}) = (V_h - V(0))u_{z,h} + a(hy)u'_{z,h}$. 由

$$\begin{aligned}
& \int (V_h - V(0))^2 u_{z,h}^2 dy = \\
& \int (V(hy + z) - V(0))^2 u_0^2 dy = \\
& \int_{B_\rho} (V(hy + z) - V(0))^2 u_0^2 dy + \\
& \sup_{x \in R} |V(hy + z) - V(0)|^2 \int_{R \setminus B_\rho} u_0^2 dy \leq \\
& \sup_{|y| < \rho} |V(hy + z) - V(0)|^2 \|u_0\|^2 + \\
& \sup_{|y| < \rho} |V(hy + z) - V(0)|^2 e^{-v_1 \rho} \quad (17)
\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
& \int a^2(hy) u_{z,h}'^2(y) dy = \int_R u_0'^2(y) a^2(hy + z) dy = \\
& \int_{B_\rho} a^2(hy + z) u_0'^2(y) dy + \sup_{x \in R} |a(hy + z)|^2 \cdot \\
& \int_{R \setminus B_\rho} u_0'^2(y) dy \leq \sup_{|y| \leq \rho} a^2(hy + z) \|u_0'\|^2 + \\
& M^2 e^{-v_1 \rho} \quad (\text{其中}, |a(x)| \leq M) \quad (18)
\end{aligned}$$

可得 $\|S_h(u_{z,h})\|^2 \leq k_3 (e^{-v_1 \rho} + \sup_{|y| < \rho} |V(hy + z) - V(0)|^2 + \sup_{|y| < \rho} |a(hy + z)|^2)$. 若取 $\rho = \frac{1}{\sqrt{h}} < \frac{1}{h}$ ($h < 1$), 则

$$\|S_h(u_{z,h})\| \rightarrow 0 ((z, h) \rightarrow (0, 0))$$

定理 4 存在正常数 D, α_0, h_0 , 使得对满足 $|z| < \alpha_0, 0 < h < h_0$ 的 z 和 h , 有唯一的 $\phi_{z,h} \in K_{z,h}^\perp \cap H$, 使得

$$S_h(u_{z,h} + \phi_{z,h}) \in K_{z,h} \quad (19)$$

及

$$\|\phi_{z,h}\|_H \leq D \|S_h(u_{z,h})\| \quad (20)$$

特别地, $\|\phi_{z,h}\|_H \rightarrow 0 ((z, h) \rightarrow (0, 0))$.

证明 令 $R = \min(\frac{\gamma}{2C}, \delta)$, $B_R^\perp = B_R(0) \cap K_{z,h}^\perp$. 根据定理 2, 选取满足 $h_0 \leq h_1, \alpha_0 \leq \alpha_1$ 的 h_0, α_0 , 使得 $\|S_{z,h}^\perp\|_2 \leq \frac{1}{2} R\gamma$. 当 $|z| \leq \alpha_0, 0 < h < h_0$ 时, 下证 $F_{z,h}(\phi)$ 是从 $B_R^\perp$ 到 $B_R^\perp$ 的压缩映射, 对 $\phi \in B_R^\perp$, 易知 $F_{z,h}(\phi) \in K_{z,h}^\perp$ 且

$$\begin{aligned}
& \|F_{z,h}(\phi)\|_H \leq \frac{1}{\gamma} \|N_{z,h}^\perp(\phi) + S_{z,h}^\perp\| \leq \\
& \frac{1}{\gamma} (C \|\phi\|_H^2 + \|S_{z,h}^\perp\|) \leq \\
& \frac{1}{\gamma} (CR^2 + \frac{1}{2} R\gamma) \leq R
\end{aligned}$$

即 $F_{z,h}(\phi)$ 是从 $B_R^\perp$ 到 $B_R^\perp$ 的映射. 对于 $\phi, \phi' \in B_R^\perp$, 有

$$\|F_{z,h}(\phi) - F_{z,h}(\phi')\|_H =$$

$$\|L_{z,h}^{-1}(N_{z,h}^\perp(\phi) - N_{z,h}^\perp(\phi'))\|_H \leq$$

$$\frac{CR}{\gamma} \|\phi - \phi'\|_H \leq \frac{1}{2} \|\phi - \phi'\|_H$$

综上, $F_{z,h}(\phi)$ 是从 $B_R^\perp$ 到 $B_R^\perp$ 的压缩映射. 又

$$\|F_{z,h}(0) - 0\|_H = \|L_{z,h}^{-1} S_{z,h}^\perp\|_H \leq \frac{1}{\gamma} \|S_h(u_{z,h})\|$$

所以, $\|\phi_{z,h}\|_H \leq D \|S_h(u_{z,h})\|$ 其中, $D = \frac{2}{\gamma}$, 即证.

3 主要结果的证明

定义函数 $s_h: (-\alpha_0, \alpha_0) \rightarrow R$ 为

$$s_h(z) = \frac{1}{h} (S_h(u_{z,h} + \phi_{z,h}), u_{z,h}') \quad (21)$$

考虑线性函数 $v_0(z) = -\frac{1}{2} \|u_0\|^2 V''(0)z$ 及定义在 $[-1, 1]$ 上函数

$$v_h(z) = h^{-v} s_h(h^v z) \quad (22)$$

其中, $h \leq \min(h_0, \alpha_0^{\frac{1}{v}})$, v 是一个确定的数且满足 $1 < v < 2$.

定理 5 函数 v_h 在 $[-1, 1]$ 上一致收敛到 v_0 .

证明 由式(22)得

$$\begin{aligned}
& h s_h(z) = (u_{z,h}', S_h(u_{z,h} + \phi_{z,h})) = \\
& (u_{z,h}', S_h(u_{z,h})) + (u_{z,h}', S_h(\phi_{z,h})) + \\
& (u_{z,h}', N_{z,h}(\phi_{z,h})) = \underbrace{(u_{z,h}', (V_h - V(0))u_{z,h})}_{e_1} + \\
& \underbrace{(u_{z,h}', a(hy)u_{z,h}')}_{e_2} + \underbrace{(u_{z,h}', S_h(u_{z,h}')\phi_{z,h})}_{e_3} + \\
& \underbrace{(u_{z,h}', N_{z,h}(\phi_{z,h}))}_{e_4}
\end{aligned}$$

下面, 对 e_1, e_2, e_3, e_4 进行估计.

由于 $e_1 = (u_{z,h}', (V_h - V(0))u_{z,h}) = -(u_{z,h}, V_h' u_{z,h}) - (u_{z,h}, (V_h - V(0))u_{z,h}')$, 所以

$$e_1 = -\frac{1}{2} (u_{z,h}, V_h' u_{z,h}) = -\frac{1}{2} \int V_h'(y)$$

$\left|u_0(y - \frac{z}{h})\right|^2 dy = -\frac{1}{2} h \int V'(z + hy) |u_0(y)|^2 dy$, 故

$$\frac{e_1}{h} v_0(z) = \frac{1}{2} \int [V''(0)z - V'(z + hy)] \cdot$$

$$|u_0(y)|^2 dy = \frac{1}{2} \int [V''(0)(z + hy) - V'(z + hy)] \cdot$$

$$|u_0(y)|^2 dy \leq C_1 \int (z + hy)^2 |u_0(y)|^2 dy \leq$$

$$C_2 [(|z| + \rho h)^2 + e^{-\rho^2}]$$

$$|e_2| = (u_{z,h}', a(hy)u_{z,h}') =$$

$$\int a(hy) |u'_{z,h}|^2 dy = \int_{B_\rho} a(hy) u_0'^2(y) dy + \int_{R \setminus B_\rho} a(hy) u_0'^2(y) dy$$

由 $S'_h(u_{z,h}) u'_{z,h} = (V_h - V(0) + a(hy) \frac{d}{dy})$

$u'_{z,h}$ 及 $H_h - V(0) - \lambda - 3u_{z,h}^2$ 的自共轭性知.

$$|e_3| = (u'_{z,h}, S_h(u'_{z,h}) \phi_{z,h}) = (u'_{z,h}, a(hy) \cdot$$

$$\frac{d}{dy} \phi_{z,h}) + ((-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} + V_h - V(0) - \lambda - 3u_{z,h}^2) \cdot$$

$$u'_{z,h}, \phi_{z,h}) = (u'_{z,h}, a(hy) \frac{d}{dy} \phi_{z,h}) +$$

$$((V_h - V(0)) u'_{z,h}, \phi_{z,h}) \leq (\int (a(hy) u'_{z,h})^2 dy)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$(\int (\frac{d}{dy} \phi_{z,h})^2 dy)^{\frac{1}{2}} + C_3 \|(V_h - V(0)) u'_{z,h}\| \cdot$$

$$\|S_h(u_{z,h})\| \leq C_4 \|\phi_{z,h}\|_H + C_3 \|(V_h - V(0)) u'_{z,h}\| \cdot$$

$$\|S_h(u_{z,h})\| \leq C_5 \|S_h(u_{z,h})\| + C_3 \|(V_h - V(0)) u'_{z,h}\| \cdot$$

$$\|S_h(u_{z,h})\|$$

对 e_4 , 有 $\|e_4\| \leq C_6 \|\phi_{z,h}\|_H^2 \leq C_7 \|S_h(u_{z,h})\|^2$.

综上所述 $|e_2 + e_3 + e_4| \leq k_4 (e^{-v_1 \rho} + \sup_{|y| \leq \rho} |V(hy + z) - V(0)|^2 + \sup_{|y| \leq \rho} |a(hy + z)|^2)$. 由于 $a(hy + z)$ 满足 $a(hy + z) = a(0) + a'(0) \cdot (hy + z) + a''(0) \frac{(hy + z)^2}{2} + o((hy + z)^2)$. 所以

$$|v_h(z) - v_0(z)| = |h^{-v}(s_h(h^v z) - v_0(h^v z))| \leq h^{-v} \left\{ C_2(h^v |z| + \rho h)^2 + e^{-\rho} + C_8 h^{-1} [(h^v \cdot \right.$$

对 $|z| \leq 1$, 选取 $\rho = h^{-\varepsilon}$, 其中 $\varepsilon > 0$, 则

$$|v_h(z) - v_0(z)| \leq h^{-v} C_2(h^v + h^{1-\varepsilon})^2 + e^{-\rho} + C_8 h^{-1-v} [(h^v + h^{1-\varepsilon})^4 + e^{-v_1 h^{-\varepsilon}} + (h^v + h^{1-\varepsilon})^4]$$

由于 $v < 2$, 可选取足够小的 ε , 使得当 $h \rightarrow 0$, 所有项趋于 0, 定理得证.

定理 1 的证明 由定理 5 知, 对足够小的 $h > 0$, v_h 在 $(-1, 1)$ 上必有一零解. 由 v_h 的定义知 $(S_h(u_{z,h} + \phi_{z,h}), u'_{z,h}) = 0$. 由定理 4 知 $S_h(u_{z,h} + \phi_{z,h}) \in K_{z,h} = \text{span}\{u'_{z,h}\}$. 综上, 当 $-h^z < z < h^v$ 时, $S_h(u_{z,h} + \phi_{z,h}) = 0$, 故 $u_{z,h} + \phi_{z,h}$ 是式(3)的解. 由构造过程知 $u(y) = v(hy)$, $u_{z,h}(y) = u_0(y - \frac{z}{h})$ 且 $S_h(u_{z,h} + \phi_{z,h}) = 0$, $\|\phi_{z,h}\|_H \rightarrow 0((z, h) \rightarrow (0, 0))$, 其中 $z \in (-h^{-v}, h^v)$, 易知

$u_{z,h} + \phi_{z,h}$ 在平移量不超过 h^{v-1} 的 u_0 附近, 故方程(2)的解 $v(x) = u_0(\frac{x-z}{h}) + \phi_{z,h}(\frac{x}{h})$ 集中在平移量及其微小的 u_0 附近.

参考文献:

- [1] Floer A, Weinstein A. Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equation with a bounded Potential[J]. Jour Funct Anal, 1986, 69(3): 397 - 408.
- [2] Oh Y G. Existence of semi-classical bound states for nonlinear Schrödinger equation with potential of the class $(V)_a$ [J]. Commun Part Diff Eq, 1988, 13(12): 1499 - 1519.
- [3] Oh Y G. Correction to "Existence of Semi-classical bound state of nonlinear Schrödinger equations with potential of the class $(V)_a$ " [J]. Commun Part Diff Eq, 1989, 14(6): 833 - 834.
- [4] Oh Y G. On positive multi-lump bound states of nonlinear Schrödinger equations under multiple well potential [J]. Commun Math Phys, 1990, 131(2): 223 - 253.
- [5] Oh Y G. Stability of Semi-classical bound states of nonlinear Schrödinger equations with potentials [J]. Commun Math Phys, 1989, 121(1): 11 - 33.
- [6] Ding Y H, Szulkin A. Existence and number of solutions for a class of semilinear Schrödinger equations [J]. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, 2006, 66: 221 - 231.
- [7] Ding W Y, Ni W M. On the existence of positive entire solutions of a semilinear elliptic equation [J]. Arch Rat Mech Anal, 1986, 91(4): 283 - 308.
- [8] Rabinowitz P H. On a class of nonlinear Schrödinger equations [J]. Zeits Angew Math Phys, 1992, 43(2): 270 - 291.
- [9] Wang X F. On a concentration of positive bound states of nonlinear Schrödinger equations [J]. Commun Math Phys, 1993, 153(2): 223 - 243.
- [10] Weinstein M I. Modulational stability of ground states of nonlinear Schrödinger equations [J]. SIAM J Math Anal, 1985, 16(3): 472 - 491.
- [11] Taubes C. Self-dual yang-mills connections on non-self-dual 4-manifolds [J]. J Diff Geom, 1982, 17(1): 139 - 170.
- [12] Cantor M. Some problems of global analysis on asymptotically simple manifolds [J]. Compositio Math, 1979, 38(1): 3 - 35.