

文章编号:1007-6735(2012)06-0598-06

# 加权 Sobolev 空间中奇异拟线性椭圆方程共振问题

赵美玲, 贾 高  
(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

**摘要:** 通过将拟线性算子  $\mathcal{M}$  与线性算子  $\mathcal{L}$  之间建立一种关系, 在加权 Sobolev 空间针对算子  $\mathcal{M}$  的高阶特征值, 利用 Galerkin 方法、推广的 Brouwer 定理以及由 Shapiro 建立的新型加权 Sobolev 紧嵌入定理, 并对非线性项进行合理假设, 研究了一类奇异拟线性椭圆方程共振问题, 得到其弱解的存在性.

**关键词:** 加权 Sobolev 空间; 奇异拟线性椭圆方程; near-相关

**中图分类号:** O 175      **文献标志码:** A

## Resonance Problem of A Singular Quasilinear Elliptic Equation in Weighted Sobolev Space

ZHAO Mei-ling, JIA Gao  
(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

**Abstract:** By establishing a relationship between the quasilinear operator  $\mathcal{M}$  and the linear operator  $\mathcal{L}$ , and making reasonable assumptions about nonlinear terms, the existence of a nontrivial solution for a class of quasilinear elliptic equations with high eigenvalues in a weighted Sobolev space was proved. The proof relies on the Galerkin method, the Brouwer's theorem and a new weighted compact Sobolev-type embedding theorem established by Shapiro.

**Key words:** *weighted Sobolev space; singular quasilinear elliptic equation; near-related*

### 1 问题的提出

本文考虑加权 Sobolev 空间中奇异拟线性椭圆方程

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{M}u &= \lambda_J u \rho + b(x, u) u^{-\rho} + \\ &\quad f(x, u) \rho - G \\ u &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &\in \Omega \\ x &\in \partial\Omega \end{aligned} \quad (1)$$

弱解的存在性, 其中  $\mathcal{M}$  是非线性算子

$$\mathcal{M}u = - \sum_{i,j=1}^N D_i (p_i^{\frac{1}{p}} p_j^{\frac{1}{p}} \sigma_j^{\frac{1}{p}}(u) \sigma_i^{\frac{1}{p}}(u) a_{ij} D_j u) + a_0 \sigma_0 q u \tag{2}$$

$\lambda_J$  为式(2)的第  $J$  个 ( $J_1$  重) near-特征值. 问题(1)具有奇异性, 因为  $p_i(x)$  在  $\Omega$  及其边界区域上的某些点可能趋于零或无穷.

关于 Sobolev 空间中线性或拟线性椭圆方程的研究已经有了很多非常好的成果, 主要的研究方法

收稿日期: 2011-08-25  
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11171220)  
作者简介: 赵美玲(1985-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 非线性分析及应用. E-mail: zhaomeiling0@126.com

是变分法.但是,在加权 Sobolev 空间<sup>[1]</sup>中,对此类问题的研究相对较少.2001 年,Shapiro 在文献[2]中,通过建立一个新的 Sobolev 嵌入定理,讨论了一系列加权拟线性椭圆型方程及抛物型方程解的存在性问题.另外,文献[3-8]都是在加权 Sobolev 空间中,针对线性或拟线性椭圆方程共振问题进行的研究.本文利用 Galerkin 方法<sup>[9]</sup>及推广的 Brouwer 定理<sup>[10]</sup>等理论和方法,针对式(2)的第  $J$  个( $J_1$  重) near-特征值,在  $H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$  空间研究问题(1)弱解的存在性,此问题的研究更具有一般性.

## 2 相关假设与基本引理

设  $\Omega$  是  $R^N$  ( $N \geq 1$ ) 中的有界区域,  $p_i(x)$ ,  $\rho(x) \in C^0(\Omega)$  为正函数,  $q(x) \in C^0(\Omega)$  是非负函数,且满足下列性质

$$\int_{\Omega} q(x) dx < \infty, \int_{\Omega} \rho(x) dx < \infty, \\ \int_{\Omega} p_i(x) dx < \infty, i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

$\Gamma \subset \partial\Omega$  为一闭集,  $q(x)$  可以恒为 0,  $\Gamma$  也可以是空集,  $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . 考虑如下准 Hilbert

空间,  $C_{\rho}^0(\Omega) = \{u \in C^0(\Omega) \mid \int_{\Omega} |u|^2 \rho dx < \infty\}$ ,

内积定义为  $\langle u, v \rangle_{\rho} = \int_{\Omega} uv \rho dx$ ,  $\forall u, v \in C_{\rho}^0(\Omega)$

以及

$$C_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma) = \\ \{u \in C^0(\Omega) \cap C^2(\Omega) \mid u(x) = 0, \forall x \in \Gamma; \\ \int_{\Omega} [\sum_{i=1}^N |D_i u|^2 p_i + u^2(q + \rho)] dx < \infty\},$$

内积定义为

$$\langle u, v \rangle_{p,q,\rho} = \int_{\Omega} [\sum_{i=1}^N p_i D_i u D_i v + \\ (q + \rho) uv] dx. \quad (4)$$

$L_{\rho}^2(\Omega)$  为  $C_{\rho}^0(\Omega)$  按范数  $\|u\|_{\rho} = \langle u, u \rangle_{\rho}^{\frac{1}{2}}$  的完备化空间,  $H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$  表示  $C_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$  按范数  $\|u\|_{p,q,\rho} = \langle u, u \rangle_{p,q,\rho}^{\frac{1}{2}}$  的完备化空间. 显然,  $H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$  为加权 Sobolev 空间. 类似地, 还可以定义空间  $L_{p_i}^2(\Omega)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), 以及空间  $L_q^2(\Omega)$ . 因此式(4)可以表示为

$$\langle u, v \rangle_{p,q,\rho} = \sum_{i=1}^N \langle D_i u, D_i v \rangle_{p_i} +$$

$$\langle u, v \rangle_{\rho} + \langle u, v \rangle_q \quad (5)$$

假设 1  $\sigma_i(u)$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) 满足条件:

- $\sigma_i: H_{p,q,\rho}^1 \rightarrow R$  是弱序列连续的;
- 存在  $\eta_1, \eta_2 > 0$ , 使得  $\eta_1 \leq \sigma_i(u) \leq \eta_2, \forall u \in H_{p,q,\rho}^1$ ;
- $\lim_{\|u\|_{\rho} \rightarrow \infty} \sigma_i(u) = 1$ , 其中  $\|u\|_{\rho}^2 = \langle u, u \rangle_{\rho}$ .

假设 2  $a_{ij}(x), a_0(x)$  满足条件:

- $a_{ij}(x), a_0(x)$  是  $L^{\infty}(\Omega)$  中的函数,  $a_{ij}(x) = a_{ji}(x), i, j = 1, 2, \dots, N$ ;
- $a_0(x) \geq \varepsilon_0 > 0, x \in \Omega$ ;
- 存在常数  $c_0 > 0$ , 使得对所有  $x \in \Omega, \xi \in R^N$ , 有  $\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq c_0 |\xi|^2$ .

假设 3  $f(x, s)$  满足条件:

- $f(x, s)$  满足 Caratheodory 条件<sup>[11]</sup>;
- 对任意  $s \in R, \gamma > 0$ , 存在非负函数  $f_0(x) \in L_{\rho}^2$ , 使得  $|f(x, s) - \gamma s| \leq \gamma |s| + f_0(x)$ ,
- a.  $x \in \Omega$ ;
- 任意  $s \in R$ , 存在非负函数  $h(x) \in L_{\rho}^2(\Omega)$ , 使得  $|f(x, s)| \leq h(x), a. e. x \in \Omega$ .

记

$$f^+(x) = \liminf_{s \rightarrow +\infty} f(x, s) \\ f^-(x) = \liminf_{s \rightarrow -\infty} f(x, s) \quad (6)$$

假设 4  $b(x, s)$  满足条件:

- $b(x, s)$  满足 Caratheodory 条件;
- 存在  $\delta > 0$ , 使得

$$|b(x, s)| \leq \begin{cases} \delta |s|, & |s| \leq \gamma_0 \\ \frac{\delta \gamma_0}{(|s| + 1 - \gamma_0)^m}, & |s| > \gamma_0 \end{cases}$$

其中,  $\gamma_0 = (\lambda_{J+J_1} - \lambda_J)/4, m > 1, 0 < \gamma_0 < 1$ .

本文中  $u^-$  为  $u$  的负部, 即  $u^- = \max\{-u, 0\}$ .  $G \in (H_{p,q,\rho}^1)^*$ ,  $(H_{p,q,\rho}^1)^*$  为  $H_{p,q,\rho}^1$  的对偶空间, 即  $G: H_{p,q,\rho}^1 \rightarrow R$  是线性的, 对于  $\forall u \in H_{p,q,\rho}^1$ , 存在常数  $K$  使得  $|G(u)| \leq K \|u\|_{p,q,\rho}$ .

定义 1 线性算子  $\mathcal{L}$  如式

$$\mathcal{L}u = - \sum_{i,j=1}^N D_i (p_i^{\frac{1}{2}} p_j^{\frac{1}{2}} a_{ij} D_j u) + a_0 u q \quad (7)$$

则对  $\forall u, v \in H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$ , 算子  $\mathcal{L}$  的双线性形式为

$$\mathcal{L}(u, v) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} p_i^{\frac{1}{2}} p_j^{\frac{1}{2}} a_{ij}(x) D_j u D_i v + \langle a_0 u, v \rangle_q \quad (8)$$

假设 5 算子  $\mathcal{L}$  满足  $V_L(\Omega, \Gamma)$  条件, 即满足

- 存在一列完备标准正交系  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_{\rho}^2$ , 且

对任意  $n, \varphi_n \in H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma) \cap C^2(\Omega)$ ;

b. 关于算子  $\mathcal{L}$ , 存在特征值序列  $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ , 满足  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ , 对任意的  $v \in H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$ , 成立  $\mathcal{L}(\varphi_n, v) = \lambda_n \langle \varphi_n, v \rangle_\rho$ .

定义2 拟线性算子  $\mathcal{M}$  的半线性形式为

$$\mathcal{M}(u, v) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} [p_i^{\frac{1}{2}} p_j^{\frac{1}{2}} \sigma_i^{\frac{1}{2}}(u) \sigma_j^{\frac{1}{2}}(u) a_{ij} D_j u D_i v] dx + \langle \sigma_0(u) a_0 u, v \rangle_q, \forall u, v \in H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma) \quad (9)$$

定义3 称算子  $\mathcal{M}$  与算子  $\mathcal{L}$  near-相关, 即满足

$$\lim_{\|u\|_{p,q,\rho} \rightarrow \infty} \frac{|\mathcal{L}(u, v) - \mathcal{M}(u, v)|}{\|u\|_{p,q,\rho}} = 0, \quad \forall v \in H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$$

并且称线性算子  $\mathcal{L}$  的特征值  $\lambda_n$  为拟线性算子  $\mathcal{M}$  的 near-特征值.

引理1 假设算子  $\mathcal{L}$  如式(7), 假设2中的条件 a-c 成立, 满足  $V_L(\Omega, \Gamma)$  条件, 若  $v \in L_\rho^2(\Omega)$ , 令  $\hat{v}(n) = \langle v, \varphi_n \rangle_\rho, n = 1, 2, \dots$ , 则  $v \in H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$  的充分必要条件是  $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n |\hat{v}(n)|^2 < \infty$ . 进一步地, 当  $v \in H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$  时, 成立  $\mathcal{L}(v, v) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n |\hat{v}(n)|^2$ .

引理2 假设算子  $\mathcal{L}$  如式(7), 假设2中的条件 a-c 成立, 令  $\mathcal{L}_1(u, v) = \mathcal{L}(u, v) + \langle u, v \rangle_\rho$ , 则对  $\forall u \in H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$ , 存在常数  $K_1, K_2 > 0$ , 满足

$$K_1 \|u\|_{p,q,\rho}^2 \leq \mathcal{L}_1(u, u) \leq K_2 \|u\|_{p,q,\rho}^2$$

引理3 假设算子  $\mathcal{L}$  如式(7), 假设2中的条件 a-c 成立, 且满足  $V_L(\Omega, \Gamma)$  条件, 则  $H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$  紧嵌入到  $L_\rho^2(\Omega)$ .

引理1和引理3的证明参见文献[5], 引理2的证明参见文献[6].

### 3 主要结果及其证明

问题(1)弱解的存在性的证明, 将分成3部分来完成. 首先, 在有限维空间  $S_n$  中 (其中  $S_n$  是  $H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$  空间的由算子  $\mathcal{L}$  的特征函数张成的子空间) 证明存在  $u_n$  使得结论成立; 其次, 证明所得到的这个函数列  $\{u_n^*\}$  在  $H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$  范数意义下一致有界; 最后, 利用相关定理, 将上面所得到的结论推广到无限维空间  $H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$  上.

需要说明, 在本文中, 不同式子中常数  $K$  值的

大小可能不同.

定理1 设  $\Omega$  是  $R^N (N \geq 1)$  中的有界区域,  $p_i(x), \rho(x) \in C^0(\Omega)$  为正函数,  $q(x) \in C^0(\Omega)$  是非负函数 ( $q$  可以恒为0), 且满足式(3),  $\Gamma \subset \partial\Omega$ , 为一闭集 ( $\Gamma$  可以为空集). 算子  $\mathcal{L}$  如式(7)所示, 满足  $V_L(\Omega, \Gamma)$  条件, 假设2中的条件 a-c 成立. 算子  $\mathcal{M}$  如式(2)所示, 假设1中的条件 a-c 成立.  $b(x, s)$  满足假设4,  $f(x, u)$  满足假设3中条件 a 和条件 b,  $G \in (H_{p,q,\rho}^1)^*$ . 则当  $n \geq n_0 = J + J_1$  时, 存在  $u_n^* \in S_n$ , 使得对  $\forall v \in S_n$ , 成立

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(u_n^*, v) &= (\lambda_J + \gamma_0 n^{-1}) \langle u_n^*, v \rangle_\rho + \\ &\quad \langle b(x, u_n^*)(u_n^*)^-, v \rangle_\rho + \\ &\quad (1 - n^{-1}) \langle f(x, u_n^*), v \rangle_\rho - G(v) \end{aligned} \quad (10)$$

证明 不失一般性, 只考虑当  $J > 1$  的情况. 取

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k, \tilde{u} = \sum_{k=1}^n \delta_k \alpha_k \varphi_k \\ \delta_k &= \begin{cases} -1, k = 1, \dots, J + J_1 - 1 \\ 1, k = J + J_1, J + J_1 + 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $n \geq n_0$ , 而  $n_0 = J + J_1$ . 对于  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n$ , 由式(11)知  $\|u\|_\rho^2 = \|\tilde{u}\|_\rho^2 = |\alpha|^2$  成立. 定义

$$\begin{aligned} F_k(\alpha) &= \mathcal{M}(u, \delta_k \varphi_k) - (\lambda_J + \gamma_0 n^{-1}) \langle u, \delta_k \varphi_k \rangle_\rho - \\ &\quad \langle b(x, u) u^-, \delta_k \varphi_k \rangle_\rho - (1 - n^{-1}) \cdot \\ &\quad \langle f(x, u), \delta_k \varphi_k \rangle_\rho + G(\delta_k \varphi_k) \end{aligned} \quad (12)$$

对上式两边同乘  $\alpha_k$ , 关于  $k$  求和, 再由式(11)得到

$$\sum_{k=1}^n F_k(\alpha) \alpha_k = I(\alpha) + II(\alpha) \quad (13)$$

其中,  $II(\alpha) = \mathcal{M}(u, \tilde{u}) - \mathcal{L}(u, \tilde{u})$ ,

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \mathcal{L}(u, \tilde{u}) - (\lambda_J + \gamma_0) \langle u, \tilde{u} \rangle_\rho - (1 - n^{-1}) \cdot \\ &\quad \langle f(x, u) - \gamma_0 u, \tilde{u} \rangle_\rho - \langle b(x, u) u^-, \tilde{u} \rangle_\rho + G(\tilde{u}) \end{aligned}$$

对于  $I(\alpha)$ , 首先, 由于  $\gamma_0 = \frac{(\lambda_{J+J_1} - \lambda_J)}{4}$ ,

$$|\alpha|^2 = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2, \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u, \tilde{u}) - (\lambda_J + \gamma_0) \langle u, \tilde{u} \rangle_\rho &> \gamma_0 \sum_{k=1}^{J+J_1-1} \alpha_k^2 + \\ &\quad \gamma_0 \sum_{k=J+J_1}^n \alpha_k^2 = \gamma_0 |\alpha|^2 \end{aligned} \quad (14)$$

其次, 由假设4的条件 b 得到

$$\begin{aligned} \langle b(x, u) u^-, \tilde{u} \rangle_\rho &\leq \delta \gamma_0^2 |\Omega| \|\tilde{u}\|_\rho + \\ &\quad \delta \gamma_0 |\Omega| \|\tilde{u}\|_\rho \leq c(\delta, \gamma_0, |\Omega|) |\alpha| \end{aligned} \quad (15)$$

再次, 由假设3的条件 b, Hölder 不等式和 Minkowski 不等式, 得到

$$\langle f(x, u) - \gamma_0 u, \tilde{u} \rangle_\rho \leq \gamma_0 |\alpha|^2 + K |\alpha| \quad (16)$$

利用引理 2,  $G \in (H_{p,q,\rho}^1)^*$ , 对固定的  $n$  有

$$|G(\tilde{u})| \leq K \|\tilde{u}\|_{p,q,\rho} \leq K_3 \|u\|_\rho \quad (17)$$

最后, 根据式(14)~(17)得到

$$I(\alpha) > n^{-1} \gamma_0 |\alpha|^2 + n^{-1} K |\alpha| - (K + c + K_3) |\alpha| \quad (18)$$

对于  $II(\alpha)$ , 因为

$$II(\alpha) \leq \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega |p_i^{\frac{1}{2}} p_j^{\frac{1}{2}} [\sigma_i^{\frac{1}{2}}(u) \sigma_j^{\frac{1}{2}}(u) - 1] a_{ij} D_j u D_i \tilde{u}| + \int_\Omega |[\sigma_0(u) - 1] a_0 u \tilde{u} q|$$

由于假设 2 中的条件 a 和  $a_0(x) \in L^\infty(\Omega)$ , 又因为  $\sigma_0(u)$  是泛函, 所以

$$\int_\Omega |[\sigma_0(u) - 1] a_0 u \tilde{u} q| \leq K |\sigma_0(u) - 1| |\alpha|^2 \quad (19)$$

同样由假设 2 中条件 a, 得到

$$\int_\Omega |p_i^{\frac{1}{2}} p_j^{\frac{1}{2}} [\sigma_i^{\frac{1}{2}}(u) \sigma_j^{\frac{1}{2}}(u) - 1] a_{ij} D_j u D_i \tilde{u}| \leq K |\sigma_i^{\frac{1}{2}}(u) \sigma_j^{\frac{1}{2}}(u) - 1| |\alpha|^2 \quad (20)$$

据式(19)、式(20)、假设 1 中条件 c 及  $\|u\|_\rho^2 = \|\tilde{u}\|_\rho^2 = |\alpha|^2$ , 得到

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \frac{|II(\alpha)|}{|\alpha|^2} = \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \frac{[\mathcal{M}(u, \tilde{u}) - \mathcal{L}(u, \tilde{u})]}{|\alpha|^2} = 0 \quad (21)$$

综上, 由式(13)、式(18)和式(21)知,  $\exists t > t_0 > 0$ , 当  $|\alpha| \geq t$  时,  $\sum_{k=1}^n F_k(\alpha) \alpha_k > 0$ , 根据推广 Brouwer 定理<sup>[10]</sup>得到,  $\exists \alpha^* = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*)$ , 满足  $F_k(\alpha^*) = 0, k = 1, 2, \dots, n$ . 因此, 只要取  $u_n^* = \sum_{k=1}^n \alpha_k^* \varphi_k$ , 再由式(11)及  $S_n$  的定义知定理 1 得证.

**定理 2** 假设定理 1 中的条件都满足, 假设 3 的条件 c 成立, 算子  $\mathcal{M}$  与算子  $\mathcal{L}$  near-相关, 且满足

$$G(w) < \int_{\Omega_1} f^+(x) w(x) \rho + \int_{\Omega_2} f^-(x) w(x) \rho \quad (22)$$

其中  $w$  是对应算子  $\mathcal{L}$  的特征值  $\lambda_J$  的某一个特征函数, 则定理 1 所得到的序列  $\{u_n^*\}$  在  $H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$  范数意义下一致有界.

**证明** 由定理 1 得知, 对于上述  $u_n^* \in S_n$  (为方

便起见, 将序列  $\{u_n^*\}_{n \geq n_0}$  简记为  $\{u_n\}_{n \geq n_0}$ ),  $\forall v \in S_n$ , 成立

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(u_n, v) &= (\lambda_J + \gamma_0 n^{-1}) \cdot \\ &\langle u_n, v \rangle_\rho + \langle b(x, u_n)(u_n)^-, v \rangle_\rho + \\ &(1 - n^{-1}) \langle f(x, u_n), v \rangle_\rho - G(v) \end{aligned} \quad (23)$$

为了证明定理 2, 只要证明存在常数  $K$ , 使得对任意  $n \geq n_0$ , 对上述  $u_n \in S_n$ , 成立

$$\|u_n\|_{p,q,\rho} \leq K \quad (24)$$

假设式(24)不成立, 则存在子列 (为方便起见, 不妨仍然记为  $\{u_n\}$ ), 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{p,q,\rho} = \infty \quad (25)$$

由式(9)、假设 2 中条件 a-c 和假设 1 中条件 b 有

$$\mathcal{M}(u_n, u_n) \geq c_0 \eta_1 \sum_{i=1}^N \|D_i u_n\|_{p_i}^2 + \epsilon_0 \eta_1 \|u_n\|_q^2,$$

$\forall n \geq n_0$ , 由假设 4 的条件 b, 得到

$$\begin{aligned} \langle b(x, u_n)(u_n)^-, u_n \rangle_\rho &\leq \\ c_2^*(\delta, \gamma_0, |\Omega|) \|u_n\|_\rho^{2-m} &+ c_3^*(\delta, \gamma_0, |\Omega|) \end{aligned} \quad (26)$$

在式(23)中令  $v = u_n$ , 根据式(16)的证明方法及式(26), 得到

$$\begin{aligned} c_1 \|u_n\|_{p,q,\rho}^2 &\leq K_4 \|u_n\|_\rho^2 + K \|u_n\|_{p,q,\rho} + \\ c_2^*(\delta, \gamma_0, |\Omega|) \|u_n\|_\rho^{2-m} &+ c_3^*(\delta, \gamma_0, |\Omega|) \end{aligned}$$

其中  $K_4 = (\lambda_J + 2\gamma_0 + c_1)$ ,  $\alpha > 1$ , 将上不等式两端同时除以  $\|u_n\|_{p,q,\rho}^2$ , 再由式(25)得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_\rho = \infty \quad (27)$$

且当  $n \geq n_1$  时, 存在常数  $K > 0$ , 使得

$$\|u_n\|_{p,q,\rho} \leq K \|u_n\|_\rho \quad (28)$$

记  $u_n = u_{n1} + u_{n2} + u_{n3}$ ,  $\tilde{u}_n = -u_{n1} - u_{n2} + u_{n3}$ ,

$$u_{n1} = \sum_{k=1}^{J-1} \hat{u}_n(k) \varphi_k, u_{n2} = \sum_{k=J}^{J+J_1-1} \hat{u}_n(k) \varphi_k,$$

$$u_{n3} = \sum_{k=J+J_1}^n \hat{u}_n(k) \varphi_k \quad (29)$$

首先, 对于  $\forall n \geq n_1$ , 可以证明下列结论

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\|u_{n1}\|_{p,q,\rho} + \|u_{n3}\|_{p,q,\rho}]}{\|u_n\|_\rho} = 0 \quad (30)$$

在式(23)中令  $v = \tilde{u}_n$ , 得到

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{J+J_1-1} (\lambda_J + \gamma_0 - \lambda_k) |\hat{u}_n(k)|^2 + \\ &\sum_{k=J+J_1}^n (\lambda_k - \lambda_J - \gamma_0) |\hat{u}_n(k)|^2 = \\ &\langle b(x, u_n)(u_n)^-, \tilde{u}_n \rangle_\rho + (1 - n^{-1}) \cdot \\ &\langle f(x, u_n) - \gamma_0 u_n, \tilde{u}_n \rangle_\rho - G(\tilde{u}_n) + \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(u_n, \tilde{u}_n) - \mathcal{M}(u_n, \tilde{u}_n) \quad (31)$$

对于式(31),由式(15)和式(16)的证明方法,便可得到

$$\begin{aligned} & \gamma_0 \|u_n\|_\rho^2 + \sum_{k=1}^{J-1} (\lambda_J - \lambda_k) |\hat{u}_n(k)|^2 + \\ & \sum_{k=J+J_1}^n (\lambda_k - \lambda_J - 2\gamma_0) |\hat{u}_n(k)|^2 \leq \\ & \gamma_0 \|u_n\|_\rho^2 + c^*(\delta, \gamma_0, |\Omega|, K) \|u_n\|_\rho + \\ & \mathcal{L}(u_n, \tilde{u}_n) - \mathcal{M}(u_n, \tilde{u}_n) \end{aligned} \quad (32)$$

对固定的  $n$ , 可以找到一个  $\gamma' > 0$ , 使得

$$\begin{aligned} \gamma'(1 + \lambda_k) & \leq \lambda_J - \lambda_k, k = 1, \dots, J-1 \\ \gamma'(1 + \lambda_k) & \leq \lambda_k - \lambda_J - 2\gamma_0, k \geq J + J_1 \end{aligned}$$

因为  $\mathcal{L}_1(u_n, u_n) = \sum_{k=1}^n (1 + \lambda_k) |\hat{u}_n(k)|^2$ , 所以由式(32)及上式知,  $\exists \gamma^* > 0$ , 使

$$\gamma^* [\|u_{n1}\|_{p,q,\rho}^2 + \|u_{n3}\|_{p,q,\rho}^2] \leq$$

$$c^* \|u_n\|_\rho + \mathcal{L}(u_n, \tilde{u}_n) - \mathcal{M}(u_n, \tilde{u}_n)$$

成立, 上式两边同时除以  $\|u_n\|_\rho^2$ , 并令  $n \rightarrow \infty$ , 由式(27)及 near- 相关得到式(30)成立.

接下来利用式(29)中的记号, 令  $w_n = \frac{u_{n2}}{\|u_n\|_\rho}$ , 根据式(28)和式(30)得到  $\|w_n\|_{p,q,\rho} \leq K$ . 则存在一个子列(为方便起见不妨仍记为  $\{w_n\}$ ) 和一个  $w$  ( $w$  为特征值  $\lambda_J$  对应的一个特征函数), 使得下面结论成立:

$$\left. \begin{aligned} & \text{a. } \exists w^* \in L_\rho^2, \text{ 使得 } |w_n(x)| \leq w^*(x), \\ & \text{a.e. } x \in \Omega \\ & \text{b. } \lim_{n \rightarrow \infty} w_n(x) = w(x), \text{ a.e. } x \in \Omega \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

在式(23)中令  $v = u_{n2}$ , 再由假设 5 中的条件 b 知, 对于  $\forall n \geq n_1$ , 有

$$\begin{aligned} & (1 - n^{-1}) \langle f(x, u_n), u_{n2} \rangle_\rho - G(u_{n2}) + \\ & \mathcal{L}(u_n, u_{n2}) - \mathcal{M}(u_n, u_{n2}) \leq \\ & |\langle b(x, u_n)(u_n)^-, u_{n2} \rangle_\rho| \end{aligned} \quad (34)$$

对于不等式(34)的右边有

$$\begin{aligned} & |\langle b(x, u_n)(u_n)^-, u_{n2} \rangle_\rho| \leq \int_\Omega |b(x, u_n)| |u_n|^2 \rho + \\ & \int_\Omega |b(x, u_n)| |u_n| |u_{n1} + u_{n3}| \rho \end{aligned} \quad (35)$$

由假设 4 的条件 b 以及式(26)的计算方法可以得到

$$\begin{aligned} & \int_\Omega b(x, u_n)^2 (u_n)^2 \rho \leq \delta \gamma_0^4 |\Omega| + (\delta \gamma_0)^2 |\Omega| = \\ & c_4(\delta, \gamma_0, |\Omega|) \end{aligned} \quad (36)$$

所以, 由式(36), 可得到

$$\int_\Omega |b(x, u_n)| |u_n| |u_{n1} + u_{n3}| \rho \leq$$

$$c_4^*(\delta, \gamma_0, \Omega) \|u_{n1} + u_{n3}\|_\rho \quad (37)$$

由式(35)、式(26)、式(37), 将式(34)整理, 得到

$$\begin{aligned} & (1 - n^{-1}) \langle f(x, u_n), u_{n2} \rangle_\rho - G(u_{n2}) + \\ & \mathcal{L}(u_n, u_{n2}) - \mathcal{M}(u_n, u_{n2}) \leq \\ & c_2^*(\delta, \gamma_0, |\Omega|) \|u_n\|_\rho^{2-m} + c_3^*(\delta, \gamma_0, |\Omega|) + \\ & c_4^*(\delta, \gamma_0, |\Omega|) \|u_{n1} + u_{n3}\|_\rho \end{aligned} \quad (38)$$

将式(38)两端同时除以  $\|u_n\|_\rho$ , 得到

$$\begin{aligned} & (1 - n^{-1}) \langle f(x, u_n), w_n \rangle_\rho - G(w_n) + \\ & \frac{(\mathcal{L}(u_n, u_{n2}) - \mathcal{M}(u_n, u_{n2}))}{\|u_n\|_\rho} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c_2^*(\delta, \gamma_0, |\Omega|) \|u_n\|_\rho^{1-m} + \frac{c_3^*(\delta, \gamma_0, |\Omega|)}{\|u_n\|_\rho} + \\ & c_4^*(\delta, \gamma_0, |\Omega|) \frac{\|u_{n1} + u_{n3}\|_\rho}{\|u_n\|_\rho} \end{aligned} \quad (39)$$

又因为假设 3 的条件 c 及式(33)的结论 a, 得到

$$\int_\Omega f(x, u_n) w_n \rho \leq$$

$$\|h(x)\|_\rho \|w^*(x)\|_\rho \leq K \quad (40)$$

算子  $\mathcal{M}$  与算子  $\mathcal{L}$  near- 相关, 根据式(27)和式(28)有

$$\lim_{\|u_n\|_\rho \rightarrow \infty} \frac{|\mathcal{L}(u_n, u_{n2}) - \mathcal{M}(u_n, u_{n2})|}{\|u_n\|_\rho} = 0 \quad (41)$$

在式(39)中, 令  $n \rightarrow \infty$ , 根据式(27)、式(30)、式(40)、式(41)和式(33)的结论 b, 以及  $\alpha > 1$ , 得到

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega f(x, u_n) w_n \rho \leq G(w) \quad (42)$$

令  $\Omega_1 = \{x \in \Omega: w(x) > 0\}$ ,  $\Omega_2 = \{x \in \Omega: w(x) < 0\}$ , 由式(40)和式(42)得到

$$\begin{aligned} & \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_1} f(x, u_n) w_n \rho + \\ & \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_2} f(x, u_n) w_n \rho \leq G(w) \end{aligned} \quad (43)$$

又因为式(6)和式(33)的结论 a, 所以有

$$\left. \begin{aligned} & f^+ w \rho = \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x, u_n) w_n \rho, \text{ a.e. } x \in \Omega_1 \\ & f^- w \rho = \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x, u_n) w_n \rho, \text{ a.e. } x \in \Omega_2 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

再由式(43), 式(44)和 Fatou's 引理<sup>[12]</sup>得到  $\int_{\Omega_1} f^+(x) w(x) \rho + \int_{\Omega_2} f^-(x) w(x) \rho \leq G(w)$ . 显然, 不等式与式(22)矛盾, 因此式(24)成立, 定理 2 成立.

**定理 3** 如果定理 1 和定理 2 中的假设都成立, 则问题(1)至少存在一个弱解, 即

$$\exists u^* \in H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$$

对  $\forall v \in H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$  有

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(u^*, v) & = \lambda_J \langle u^*, v \rangle_\rho + \langle b(x, u^*)(u^*)^-, v \rangle_\rho + \\ & \langle f(x, u^*), v \rangle_\rho - G(v) \end{aligned} \quad (45)$$

**证明** 因为  $H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$  是可分的 Hilbert 空间,由式(24)和引理 3 知,上述  $\{u_n\}$  是  $H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$  中的有界点列,故存在收敛子列(不妨仍记为  $\{u_n\}$ )及函数  $u^* \in H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$ ,使得下面结论成立:

$$\left. \begin{aligned} \text{a. } \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u^*\|_\rho &= 0; \\ \text{b. } \exists k(x) \in L_\rho^2, \text{ 使得 } |u_n(x)| &\leq k(x), \text{ a.e. } x \in \Omega; \\ \text{c. } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) &= u^*(x), \text{ a.e. } x \in \Omega; \\ \text{d. } \lim_{n \rightarrow \infty} \langle D_i u_n, v \rangle_{p_i} &= \langle D_i u^*, v \rangle_{p_i}, \\ &\quad \forall v \in L_{p_i}^2, i = 1, \dots, N; \\ \text{e. } \lim_{n \rightarrow \infty} \langle a_0 u_n, v \rangle_q &= \langle a_0 u^*, v \rangle_q, \forall v \in L_q^2 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

由于  $\sigma_i(u)$  满足假设 1 的条件 a, 所以有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_i(u_n) = \sigma_i(u^*)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ , 利用此极限和式(9), 式(46)的结论 a、结论 d、结论 e, 对于式(23)左端, 当  $v_j \in S_j (j \geq n_0)$  时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{M}(u_n, v_j) = \mathcal{M}(u^*, v_j) \quad (47)$$

由假设 3 的条件 a、条件 c 和式(46)的结论 b、结论 c 及勒贝格控制收敛定理<sup>[13]</sup>, 得到

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(x, u_n), v_j \rangle_\rho &= \\ \langle f(x, u^*), v_j \rangle_\rho, \text{ a.e. } x \in \Omega \end{aligned} \quad (48)$$

由假设 4 的条件 a、条件 b 和式(46)的结论 b、结论 c 及勒贝格控制收敛定理, 得到

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle b(x, u_n)(u_n)^-, v_j \rangle_\rho &= \\ \langle b(x, u^*)(u^*)^-, v_j \rangle_\rho, \\ \text{a.e. } x \in \Omega \end{aligned} \quad (49)$$

将式(23)中的  $v$  用  $v_j$  替代, 并在等式两端令  $n \rightarrow \infty$ , 再由式(47)~(49), 得到

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(u^*, v_j) &= \lambda_J \langle u^*, v_j \rangle_\rho + \langle b(x, u^*)(u^*)^-, v_j \rangle_\rho + \\ &\quad \langle f(x, u^*), v_j \rangle_\rho - G(v_j) \end{aligned} \quad (50)$$

对  $v \in H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$ , 令  $P_j v = \sum_{k=1}^j \hat{v}(k) \varphi_k$ , 那么  $P_j v \in S_j$ , 在式(23)中令  $v_j = P_j v$ , 则有

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(u^*, P_j v) &= \lambda_J \langle u^*, P_j v \rangle_\rho + \langle b(x, u^*)(u^*)^-, P_j v \rangle_\rho + \\ &\quad \langle f(x, u^*), P_j v \rangle_\rho - G(P_j v) \end{aligned} \quad (51)$$

由引理 1 和引理 2 得,  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|P_j v - v\|_{p,q,\rho} = 0$ ,  $\forall v \in H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$ . 因此有

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{M}(u^*, P_j v) &= \mathcal{M}(u^*, v) \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \langle u^*, P_j v \rangle_\rho &= \langle u^*, v \rangle_\rho \end{aligned}$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} G(P_j v) = G(v)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle f(x, u^*), P_j v \rangle_\rho = \langle f(x, u^*), v \rangle_\rho$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle b(x, u^*)(u^*)^-, P_j v \rangle_\rho = \langle b(x, u^*)(u^*)^-, v \rangle_\rho$$

所以, 对式(51)两边关于  $j$  取极限, 得到

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(u^*, v) &= \lambda_J \langle u^*, v \rangle_\rho + \langle b(x, u^*)(u^*)^-, v \rangle_\rho + \\ &\quad \langle f(x, u^*), v \rangle_\rho - G(v) \end{aligned}$$

定理 3 得证.

#### 参考文献:

- [1] Alois K. Weighted Sobolev spaces [M]. New York: John Wiley & Sons, 1985.
- [2] Shapiro V L. Singular quasilinearity and higher eigenvalues [M]. Providence: American Mathematical Society, 2001.
- [3] Rumbos A, Shapiro V L. Jumping nonlinearities and weighted Sobolev spaces [J]. Journal of Differential Equations, 2005, 214 (2): 326 - 357.
- [4] Shapiro V L. Resonance, distributions and semilinear elliptic partial differential equations [J]. Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, 1984, 8(3): 857 - 871.
- [5] Shapiro V L. Special functions and singular quasilinear partial differential equations [J]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1991, 22(5): 1411 - 1429.
- [6] Jia G, Sun D. Existence of solutions for a class of singular quasilinear elliptic resonance problems [J]. Nonlinear Analysis, 2011, 74(10): 3055 - 3064.
- [7] Jia G, Zhao Q. Existence results in weighted Sobolev spaces for some singular quasilinear elliptic equations [J]. Acta Appl Math, 2010, 109(2): 599 - 607.
- [8] 戴春艳, 贾高. 加权空间中一类奇异拟线性椭圆方程解得存在性[J]. 上海理工大学学报, 2010, 32(1): 65 - 68.
- [9] 陆文端. 微分方程中的变分法 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [10] Kesavan S. Topics in functional analysis and applications [M]. New York: John Wiley & Sons, 1989.
- [11] 宣本金. 变分法: 理论与应用 [M]. 合肥: 中国科技大学出版社, 2006.
- [12] Elliott H L, Michael L. Analysis [M]. 2nd ed. Providence: American Mathematical Society, 2001.
- [13] Rouden H L. Real analysis [M]. 3th ed. New York: Macmillan Publishing Company, 1988.