

文章编号:1007-6735(2012)06-0604-04

半群的 Cwrpp Rees 根的扩张结构

高振林, 许成苏

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要:借助于半群的理想扩张理论,研究了半群的 Cwrpp Rees 根的扩张结构,证明了 Cwrpp Rees 根的扩张半群的结构特征,即 S 是 Cwrpp Rees 根的扩张半群当且仅当 S 是有强 Cwrpp Rees 根的 wrpp 半群.同时给出了半群的 Cwrpp Rees 根的几种扩张结构,并通过例子表明 Cwrpp Rees 根的扩张半群有其独特意义.

关键词:Cwrpp 半群; Cwrpp 根; 强 Cwrpp Rees 根; Cwrpp 根扩张

中图分类号:O 152.7 **文献标志码:**A

On the Extension Structure of Cwrpp Rees Radical of Semigroups

GAO Zhen-lin, XU Cheng-su

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: With the help of ideal extension theory of semigroup, the extension structure of Cwrpp Rees radical of semigroup was studied and the structure characteristics of extension semigroup of Cwrpp Rees radical were proved. In other word, S is an extension semigroup of Cwrpp Rees radical if and only if S is a wrpp semigroup which has strong Cwrpp Rees radical. At the same time some kinds of extension structures of Cwrpp Rees radical were given and through an example the special significance of the extension semigroup was illustrated.

Key words: Cwrpp semigroups; Cwrpp radical; strong Cwrpp Rees radical; Cwrpp radical extend.

1 预备知识

定义 1^[1] 半群 S 上的 Green's 关系 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{R}$ 定义为

$$\mathcal{L} = \{(a, b) \in S \times S \mid S^1 a = S^1 b\}$$

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in S \times S \mid a S^1 = b S^1\}$$

Fountain^[2]将 Green's 关系推广,定义 Green's $*$ 关系 $\mathcal{L}^*$ 和 $\mathcal{R}^*$ 为:

$$(a, b) \in \mathcal{L}^* \text{ 当且仅当对 } \forall x, y \in S^1 \text{ 有 } ax =$$

$$ay \Leftrightarrow bx = by$$

$$(a, b) \in \mathcal{R}^* \text{ 当且仅当对 } \forall x, y \in S^1 \text{ 有 } xa = ya \Leftrightarrow xb = yb$$

文献[3]对 Green's $*$ - 关系做了进一步推广,定义 Green's $*$ $*$ 关系 $\mathcal{L}^{**}$ 和 $\mathcal{R}^{**}$ 为

$$(a, b) \in \mathcal{L}^{**} \text{ 当且仅当对 } \forall x, y \in S^1 \text{ 有 } (ax, ay) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow (bx, by) \in \mathcal{R}$$

$$(a, b) \in \mathcal{R}^{**} \text{ 当且仅当对 } \forall x, y \in S^1 \text{ 有 } (ax, ay) \in \mathcal{L} \Leftrightarrow (bx, by) \in \mathcal{L}$$

定义 2^[4] 半群 S 如果满足下列条件:

a. S 的每个 $\mathcal{L}^{**}$ - 类至少含有一个幂等元;

收稿日期:2011-06-10

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11201299)

作者简介:高振林(1949-),男,教授.研究方向:半群理论. E-mail:zlgao@sina.com

b. 对 $\forall a \in S, \forall e \in E(L_a^{**})$ 有 $a = ae$, 其中 $E(L_a^{**})$ 为 L_a^{**} 的幂等元集合, 则称 S 为 wrpp 半群; 若 wrpp 半群 S 还满足 $E(S) \subseteq C(S)$, 即 S 的幂等元在 S 的中心 $C(S)$ 中, 则称 S 为 Cwrpp 半群.

定义 3^[5] 半群 S 上的同余 ρ 称为 Cwrpp 同余, 如果 S/ρ 是 Cwrpp 半群. 此时如果 ρ 还是 S 上的 Rees 同余, 称 ρ 是 Cwrpp Rees 同余.

定义 4^[5] 对半群 S 上的 Cwrpp 同余 ρ , 如果存在 S 的子集 I 和 Cwrpp 子半群使得

$$S = I \cup C \text{ (不必是不交并) 且 } C \cong S/\rho$$

则称 I 是 S 的 (Cwrpp) ρ -集, 这时将 ρ 记作 ρ_I .

由文献[5]知, 若 (Cwrpp) ρ -集存在, 则由 ρ 唯一确定. 另外, 若 ρ 是 Cwrpp Rees 同余, 则 (Cwrpp) ρ -集 I 必存在, 且 I 是半群 S 的理想, 称 I 为 S 的 Cwrpp ρ -理想.

定义 5^[5] 对半群 S , 如果 S 无任何 Cwrpp 同余, 那么定义 S 的 Cwrpp 根同余是泛关系 $S \times S$, 且称 S 是 Cwrpp 根半群; 如果 S 至少有一个 Cwrpp 同余, 那么定义 S 上的 Cwrpp 根同余是所有 Cwrpp 同余 $\rho_\alpha (\alpha \in w)$ 的交, 记作 ρ_{cr} . 即

$$\rho_{cr} = \bigcap_{\alpha \in w} \{ \rho_\alpha \mid \text{对于 } \forall \alpha \in w, \rho_\alpha \text{ 是 } S \text{ 上的 Cwrpp 同余} \} \quad (1)$$

如果 ρ_{cr} 也有 ρ_{cr} -集, 则将其记为 $N(S)$. 即 $\rho_{cr} = \rho_{N(S)}$. 称 $N(S)$ 为 S 的 Cwrpp 根集. 对于 Cwrpp 根同余 ρ_{cr} 和 Cwrpp 根集 $N(S)$, 有时统称它们为 S 的 Cwrpp 根.

由定义 5 知, 对任一半群 S , ρ_{cr} 总是存在的. 一般地, ρ_{cr} 不必仍是 S 的 Cwrpp 同余. 当然, 若 ρ_{cr} 仍是 S 上的 Cwrpp 同余, 那么 ρ_{cr} 是 S 上的最小 Cwrpp 同余.

定义 6^[5] 称半群 S 的 Cwrpp 根同余 ρ_{cr} 是强 Cwrpp 根, 若 ρ_{cr} 仍是 S 上的 Cwrpp 同余, 且 $N(S)$ 存在. 若 S 的强 Cwrpp 根同余 ρ_{cr} 还是 Rees 同余, 即 $N(S)$ 是 S 的理想, 则称 S 为有强 Cwrpp Rees 根的 wrpp 半群.

设半群 S 的 Cwrpp 根同余 ρ_{cr} 是强 Cwrpp 根, 由文献[5]知

$$N(S) = \bigcap_{\alpha \in w} \{ I_\alpha \mid \text{对于 } \forall \alpha \in w, I_\alpha \text{ 是 } S \text{ 上的 Cwrpp } \rho_\alpha \text{-集} \} \quad (2)$$

定义 7^[4] 称半群 S 为 (右) 左 ($\mathcal{L}$) $\mathcal{R}$ -可消的, 若 $\forall a, b, c \in S$ 有 $((ba, ca) \in \mathcal{L} \Rightarrow (b, c) \in \mathcal{L})(ab, ac) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, c) \in \mathcal{R}$.

定义 8 假设 N, T^* 是不相交半群, $T = T^* \cup$

$\{0\}$ 有零元 0. 称半群 S 是由 T 关于 N 的一个 (理想) 扩张, 如果 $S = N \dot{\cup} T^*$ (不交并) 且 N 是 S 的一个理想使得 $S/N \cong T$. T 关于 N 的一个 (理想) 扩张 S 称为 Cwrpp Rees 根的扩张, 若 T 是 Cwrpp 半群且 $N(S) = N$ 是 wrpp 半群.

文献[5]解决了有强 Cwrpp 根且 $N(S) = E(S)$ 是带的 wrpp 半群 S (即 SBCRW-半群) 的结构刻画. 本文继文献[5]的工作, 用半群的理想扩张基本理论证明 Cwrpp Rees 根的扩张半群的结构特征, 给出半群 Cwrpp Rees 根的几种扩张结构.

2 基本性质

由文献[1,3]得以下性质:

性质 1 a. $(\mathcal{R}^{**} \text{-关系}) \mathcal{L}^{**} \text{-关系}$ 为任意半群 S 上的 (左同余) 右同余, 且在 S 上有 $(\mathcal{R}^* \subseteq \mathcal{R}^{**}, \mathcal{R}^{**} \mid_{E(S)} = \mathcal{R}) \mathcal{L}^* \subseteq \mathcal{L}^{**}, \mathcal{L}^{**} \mid_{E(S)} = \mathcal{L}$;

b. 设 U 是半群 S 的子半群, 则 $\mathcal{L}^U \subseteq \mathcal{L}^S \cap (U \times U), \mathcal{R}^U \subseteq \mathcal{R}^S \cap (U \times U)$.

由定义 3, 4, 8 易得以下引理 1, 2 与性质 2.

引理 1 若 ρ 是半群 S 上的 Cwrpp Rees 同余, 则必有 S 的 Cwrpp ρ -理想 I 使得 $\rho = (I \times I) \cup 1_S$ 且 S/ρ 同构于 Cwrpp 半群 $S \setminus I \cup \{0\}$.

引理 2 半群 S 的 Cwrpp 根同余 ρ_{cr} 是强 Cwrpp Rees 根同余的充分必要条件为:

a. ρ_{cr} 是 Cwrpp 同余;

b. $N(S)$ 存在且 $N(S)$ 是 S 的理想.

性质 2 设 S 是有强 Cwrpp Rees 根的 wrpp 半群, 则

a. $N(S)$ 是 Cwrpp 根半群;

b. 如果 I 既是 S 的 Cwrpp 理想, 又是 Cwrpp 根半群, 那么 $I = N(S)$;

c. S 是 Cwrpp Rees 根的扩张半群.

证明 只要证明 c. 设 S 满足题设要求, $N = N(S)$ 是 S 的 Cwrpp Rees 根, 由引理 1, 知

$C = \bigcup_{\alpha \in Y} M_\alpha \cup \{0\}, S/N \cong S \setminus N \cup \{0\} = C$ 是 Cwrpp 半群. 依定义 8, S 是 Cwrpp Rees 根的扩张半群. 证毕.

性质 3^[3] 有零元的 Cwrpp 半群 $C = C^* \cup \{0\}$ 有半格分解表示

$$C^* = \bigcup_{\alpha \in Y} L_\alpha^{**} = \bigwedge_{\alpha \in Y} M_\alpha E(C) = E(C^*) \cup \{0\} = \{1_\alpha\}_{\alpha \in Y} \cup \{0\} \quad (3)$$

其中对任意的 $L_\alpha^{**} (\alpha \in Y)$ 是左 $\mathcal{R}$ -可消幺半群.

性质 4^[3] 设 S 是有强 Cwrpp Rees 根的 wrpp 半群. 若 $E(S)$ 是带, 则存在半格 Y 使得 $E(N(S))$ 包含子带

$$E^0 = \{e1_\alpha = e_\alpha \mid \forall e \in E(N(S)), \alpha \in Y\} \quad (4)$$

证明 由题设条件和引理 2 得, $S/N(S) \cong S \setminus N(S) \cup \{0\}$ 是 Cwrpp 半群, 由性质 3, 设 $S \setminus N(S) \cup \{0\} = \bigcup_{\alpha \in Y} L_{1_\alpha}^{**}$ 是左 $\mathcal{R}$ -可消么半群 $L_{1_\alpha}^{**}$ ($\alpha \in Y$) 的半格, 这里 Y 是半格, 1_α 是 $L_{1_\alpha}^{**}$ ($\alpha \in Y$) 的恒等元. 因为 $E(S) = E(N(S)) \cup \{1_\alpha\}_{\alpha \in Y}$ 是带, $N(S)$ 是 S 的理想, 故对 $e \in E(N(S))$, $1_\alpha \in C^*$, $e1_\alpha, 1_\alpha e \in E(N(S))$, 于是 $e1_\alpha \cdot e1_\alpha = e1_\alpha = e_\alpha$, $e1_\alpha f \in E(N(S))$. 则对 $\forall e_\alpha, f_\beta \in E^0$ (由式(4)定义), $e_\alpha \cdot f_\beta = e1_\alpha \cdot f1_\beta = h1_\beta = h_\beta \in E^0$ ($h = e1_\alpha f$). 即 E^0 是 $E(N(S))$ 的子带. 证毕.

性质 5 Cwrpp Rees 根的扩张半群 S 是有强 Cwrpp Rees 根的 wrpp 半群.

证明 只要证 S 是 wrpp 半群, 则由定义 8 即知 S 是有强 Cwrpp Rees 根的 wrpp 半群. 设 $a \in S = N \cup C$, 这里 C 是 Cwrpp 半群且 $N(S) = N$ 是 wrpp 半群. 往证定义 2 中 a 与 b.

若 $a \in N$, 因 N 是 wrpp 半群, 故有幂等元 $e \in E(N)$, $\exists e \in \mathcal{L}^{**} a$ 且对 $\forall f \in E(L_a^{**}(N))$ 有 $a = af$. 由定义 1, 对

$$\forall x, y \in N, (ax, ay) \in \mathcal{R}^N \Leftrightarrow (ex, ey) \in \mathcal{R}^N$$

设 $x, y \in S$, $(ax, ay) \in \mathcal{R}^S = \mathcal{R}$, 则有 $x', y' \in S$, $ax = ayy'$, $ay = axx'$. 于是

$axN = ayy'N \subseteq ayN$, $ayN = axx'N \subseteq axN$ 从而 $axN = ayN$, 即 $(ax, ay) \in \mathcal{R}^N$. 由上式推得 $(ex, ey) \in \mathcal{R}^N$, 再由性质 1 得 $(ex, ey) \in \mathcal{R}^S$. 同理可证 $(ex, ey) \in \mathcal{R}^S \Rightarrow (ax, ay) \in \mathcal{R}^S$. 综合得 $(a, e) \in \mathcal{L}^{**} S$. 设 $\forall f \in E(L_a^{**}(S))$, 因

$$E(S) \setminus \{0\} = E(N) \cup E(C^*), C^* = C \setminus \{0\}$$

若 $f \in E(L_a^{**}(N))$, 由上知 $a = af$; 若 $f = 1_\alpha \in E(C^*)$ ($\exists \alpha \in Y$), 由 $(f, e) \in \mathcal{L}^{**} S$ 和性质 1 得 $eS^1 = fS^1$. 因为 $e \in N$, $f \in C^*$ 且 N 是 S 的理想, 故 $eS^1 \subseteq N$, $fS^1 \cap C^* \neq \emptyset$. 从而 $eS^1 = fS^1$.

这表明不存在 $\alpha \in Y$, $f = 1_\alpha \in E(C^*) \in f \in E(L_a^{**}(S))$. 故对 $\alpha \in N$ 定义 2 中 a 与 b 成立.

对 $\alpha \in C$ 用以上相同方法可得定义 2 中 a 与 b 成立. 证毕.

由性质 2 与性质 5 得:

定理 1 设 S 为半群, 以下两条等价.

a. S 是 Cwrpp Rees 根扩张半群;

b. S 是有强 Cwrpp Rees 根的 wrpp 半群.

引理 3^[6] 设半群 C 与 I 满足以下两条, 则 C 关于 I 的扩张总是存在的.

a. C 无真零因子;

b. I 至少有一个幂等元.

3 半群的 Cwrpp Rees 根的扩张结构

用半群的理想扩张基本理论, 给出半群的几种 Cwrpp Rees 根的扩张结构定理.

首先 $C = C^* \cup \{0\}$ 是由式(3)给定的有零元的 Cwrpp 半群, N 是与 C^* 不相交的 Cwrpp 根 wrpp 半群. $E(N)$ 包含由 Y 决定的半格

$$E_1 = \{e_\alpha \in E(N) \mid \text{对 } \forall \alpha, \beta \in Y \text{ 有 } e_\alpha \cdot e_\beta = e_{\alpha\beta}\} \quad (5)$$

定理 2 从 $C^* = \bigcup_{\alpha \in Y} M_\alpha$ 到 N 的映射 θ 定为

$$\theta: C^* \rightarrow N, x_\alpha \theta = e_\alpha \quad (6)$$

则以下结论成立:

a. θ 是一个局部同态映射^[6];

b. 令 $S = N \dot{\cup} C^*$ 为不交并, 在 S 上定义由 (a) - (d) 决定的运算“ $\circ$ ”.

(a) $\forall x, y \in C^*, x \circ y = xy$ 在 C^* 中;

(b) $\forall x \in C^*, n \in N, x \circ n = x\theta \cdot n$ 在 N 中;

(c) $\forall x \in C^*, n \in N, n \circ x = n \cdot x\theta$ 在 N 中;

(d) $\forall n, m \in M, n \circ m = nm$ 在 N 中.

则 S 构成一个 Cwrpp Rees 根的扩张半群.

证明 a. 首先指出 θ 是 C^* 到 N 的局部同态. 只需证明对任意的 $x_\alpha \in M_\alpha, y_\beta \in M_\beta$ 有 $(x_\alpha y_\beta) \theta = x_\alpha \theta y_\beta \theta$ 成立. 由 θ 的定义知, 存在 $e_\alpha, e_\beta \in E_1$ 使得 $x_\alpha \theta = e_\alpha, y_\beta \theta = e_\beta$. 因 C^* 是 Cwrpp 半群, E_1 是由 Y 决定的半格, 故有

$$(x_\alpha y_\beta) \theta = (z_{\alpha\beta}) \theta = e_{\alpha\beta} = e_\alpha e_\beta = x_\alpha \theta y_\beta \theta$$

b. 由文献[6]知, S 是 θ 决定的 C 关于 N 的扩张. 因为 N 是 Cwrpp 根 wrpp 半群, C 是 Cwrpp 半群, $S = N \dot{\cup} C^*$, 故 N 是 S 的最小 Cwrpp 理想, 所以 $N = N(S)$. 即 S 构成 Cwrpp Rees 根的扩张半群. 证毕.

由文献[4-5], 性质 3 和定理 2 得以下推论:

推论 1 设 C 是由式(3)给出的 Cwrpp (Crpp) 半群, N 是 Cwrpp 根 wrpp 半群且有半格分解 $N = \bigcup_{\alpha \in Y} L_\alpha^{**}$. 若 $N \cap C^* = \emptyset$, 则

a. $E(N)$ 是带且包含子半格 E_1 (式(5)定义);

b. 从 C^* 到 N 可由式(6)定义局部同态映射 θ ,

通过(M1) – (M4)决定 C 关于 N 的 Cwrpp(Crpp) Rees 根扩张半群 S ,使得 N 是 S 的强 Cwrpp(或 Crpp)Rees 根.

以上推论的一个特别情形是下面的结论:

推论 2 设 C 为式(3)给出的 Cwrpp(Crpp)半群, N 是有零元的左(右)正则带.若 $N \cap C^* = \emptyset$,则

a. N 是包含子半格 E_1 (如式(5)定义)的 Cwrpp 根 wrpp 半群;

b. 从 C^* 到 N 可由式(6)定义局部同态映射 θ , 通过(a) – (d)决定 C 关于 N 的 Cwrpp(Crpp) Rees 根扩张半群 S ,使得 N 是 S 的强 Cwrpp(或 Crpp) Rees 根.

由性质 4, Cwrpp 根 wrpp 半群 N 的幂等元集 $E(N)$ 不必包含子半格 E_1 . 但只要 $E(N)$ 非空,由引理 3 知, N 的 Cwrpp Rees 根扩张总是存在的.因此类似定理 2 的证明,易证下列更一般的 Cwrpp 根扩张定理.这里省略其证明.

定理 3 设 N 是有零元的 Cwrpp 根 wrpp 半群, Cwrpp 半群 C 由式(3)给出, $S = N \cup C^*$ 是不交并.若有 $e \in E(N)$,则映射 $\theta: \forall x \in C^*, x\theta = e$ 是局部同态映射,且 S 关于运算“.”(由(a) – (d)给出)构成 C 关于 N 的 Cwrpp Rees 根扩张半群.

对 $E(N)$ 中两个不同的幂等元,由定理 3 可以得到两个 C 关于 N 的 Cwrpp Rees 根扩张.两者之间的关系由文献[6]给出:

定理 4 半群 N, C 如定理 3 所设.若有 $e, f \in E(N), e \neq f$,则

a. 可确定两个 C^* 到 N 的局部同态映射 θ, θ' 为 $\forall x \in C^* x\theta = e; x\theta' = f$

由 θ, θ' 可分别决定 N 的两个 Cwrpp Rees 根扩张半群 S, S' ;

b. S 和 S' 是等价扩张(见文献[6])当且仅当存在 N 的自同构 φ 和 C 的自同构 φ_1 ,使得 $\theta\varphi = \varphi_1\theta'$, 其中 $\varphi_1 = \varphi|_{C^*}$.

4 例子

最后用下例结束本文,该例指出 Cwrpp Rees 根的扩张半群(即有强 Cwrpp Rees 根的 wrpp 半群)有其独特意义.

例 1 设 C 是有零元的 Cwrpp 半群, C 的半格分解表示由式(4)给出.取 $N = Y = E_1$ (见式(5)),则 N 为半格,对任意的 $x \in C^*$,存在 $\alpha \in Y$ 使得 $x =$

$x_\alpha \in M_\alpha$.可定义映射

$$\theta: C^* \rightarrow N, x_\alpha \rightarrow \alpha$$

下证 θ 为 C^* 到 N 上的局部同态映射.

对 $x, y \in C^*$,则存在 $\alpha, \beta \in N$ 使得 $x \in M_\alpha, y \in M_\beta$,因此不妨记 $x = x_\alpha, y = y_\beta$.则存在 $z_{\alpha\beta} \in M_{\alpha\beta}$,使得

$$(x_\alpha \cdot y_\beta)\theta = (z_{\alpha\beta})\theta = \alpha\beta = (x_\alpha\theta) \cdot (y_\beta\theta)$$

故 θ 为 C^* 到 N 的局部同态映射.又对 $\alpha \in N, \exists x_\alpha \in M_\alpha, \exists x_\alpha\theta = \alpha$,即 θ 为 C^* 到 N 上的局部同态映射.令 $S = C^* \cup N$ 为不交并, S 上的运算“.”由(a) – (d)给出,即

$$\forall x, y \in C^*, x \circ y = xy \text{ 在 } C^* \text{ 中}$$

$$\forall x \in C^*, \beta \in N, x \circ \beta = x\theta \cdot \beta = \alpha\beta \text{ 在 } N \text{ 中}$$

$$\forall x \in C^*, \beta \in N, \beta \circ x = \beta \cdot x\theta = \beta\alpha \text{ 在 } N \text{ 中}$$

$$\forall \alpha, \beta \in N, \alpha \circ \beta = \alpha\beta \text{ 在 } N \text{ 中}$$

由定理 2 知, S 是一个 Cwrpp Rees 根的扩张半群.它是有强 Cwrpp Rees 根 N 的 wrpp 半群.

由于 $E(S) = E(N) \cup \{1_\alpha\}_{\alpha \in Y} = N \cup \{1_\alpha\}_{\alpha \in Y}$,按以上“.”运算定义有

$$\forall e, f \in E(S), e \circ f = f \circ e$$

即 $E(S)$ 为半格.由于 $E(S) \neq N(S) = N$,故 S 不是文献[5]中的 SBCRW – 半群.由文献[5]知,左 Cwrpp(右 Cwrpp),完备 rpp 半群(见文献[4,7])均是 SBCRW – 半群,故 S 不是这几类半群中的任何一类.

参考文献:

- [1] Howie J M. An introduction to semigroup theory[M]. London: Academic Press, 1976.
- [2] Fountain J B. Abundant semigroups [J]. American Mathematical Society, 1982, 44(3): 103 – 129.
- [3] Tang X D. On a theorem of C-wrpp semigroups [J]. Communications in Algebra, 1997, 25 (5): 1499 – 1504.
- [4] Lan Du, Shum K P. On left C-wrpp semigroups [J]. Semigroup Form, 2003, 67(3): 373 – 387.
- [5] 高振林, 宋土芳. 半群的 C-wrpp 根和半 C-wrpp 半群 [J]. 上海理工大学学报, 2012, 34(5): 499 – 504.
- [6] Clifford A H, Preston G B. The algebraic theory of semigroups [M]. Providence: American Mathematical Society, 1961.
- [7] Guo X J, Shum K P, Guo Y Q. Perfect rpp semigroups [J]. Communications in Algebra, 2001, 29 (6): 2447 – 2459.