

文章编号:1007-6735(2012)06-0613-06

有强 Cwrpp Rees 根的本原 wrpp 半群

高振林, 李海沙

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 引进半群(强)Cwrpp Rees 根, 有强 Cwrpp Rees 根的本原 wrpp 半群等概念, 研究本原半群类的一个子类, 即有强 Cwrpp Rees 根的本原 wrpp 半群. 利用这类半群的强 Cwrpp Rees 根性质, 本原性质和理想扩张手段刻画它的结构特征, 并给出这类半群的一个例子, 说明它不是文献[1]中所研究的半群类, 具有其独特的意义.

关键词: Cwrpp 半群; 本原半群; 理想扩张; 0-极小左理想; 左 $0-J^{**}$ -单子半群
中图分类号: O 152.7 **文献标志码:** A

Primitive Wrpp Semigroups with Strong Cwrpp Rees Radicals

GAO Zhen-lin, LI Hai-sha

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The concepts of strong Cwrpp Rees radicals and primitive wrpp semigroup were introduced. A subclass of primitive semigroup, namely the primitive wrpp semigroup with strong Cwrpp Rees radicals was studied. Using the nature of strong Cwrpp Rees radicals, the property of primitive and the approach of ideal expansion to describe its structure, an example of this kind of semigroup, was presented and it is shown that it is not the same kind of semigroup as that given out in the article [1] and is of unique significance.

Key words: Cwrpp semigroup; primitive semigroup; ideal expansion; 0-minimal left ideal; left $0-J^{**}$ -simple subsemigroup.

1 相关概念和问题

首先, 给出涉及到的已有概念.

定义 1^[2] 半群 S 上的 Green 关系 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{R}$ 定义为

$$\mathcal{L} = \{(a, b) \in S \times S \mid S^1 a = S^1 b\}$$

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in S \times S \mid a S^1 = b S^1\}$$

定义 2^[3] 半群 S 上的 Green ** -关系 $\mathcal{L}^{**}$ 和 $\mathcal{R}^{**}$ 定义为

$$(a, b) \in \mathcal{L}^{**} \text{ 当且仅当对 } \forall x, y \in S^1 (ax, ay) \in \mathcal{R} \Rightarrow (bx, by) \in \mathcal{R}$$

$$(a, b) \in \mathcal{R}^{**} \text{ 当且仅当对 } \forall x, y \in S^1 (xa, ya) \in \mathcal{L} \Rightarrow (xb, yb) \in \mathcal{L} \text{ 令}$$

$$J^{**}(a) = \bigcup \{J(x) \mid x \in J^{**}(a)\} \text{ 其中, } J(x) \text{ 是由 } x \text{ 生成的主理想;}$$

收稿日期: 2011-06-27

作者简介: 高振林(1949-), 男, 教授. 研究方向: (序)半群理论. E-mail: zlgao@sina.com

$L^{**}(a) = \bigcup \{L(x) \mid x \in \mathcal{L}^{**}(a)\}$ 其中, $\mathcal{L}(x)$ 是由 x 生成的主理想.

称 $J^{**}(a)(L^{**}(a))$ 为由元 a 生成的 ** -主理想(** -主左理想), 用它引进的 J^{**} -关系为

$$\mathcal{J}^{**} = \{(a, b) \in S \times S \mid J^{**}(a) = J^{**}(b)\}$$

定义 3^[4] 半群 S 的非零幂等元 e 称为本原幂等元, 若 e 是非零幂等元集中关于自然序的极小元.

定义 4^[4] 如果半群 S 的所有幂等元都是本原的, 则称 S 是本原半群.

定义 5^[4] 设 I 为 S 的非零左理想, 则称其为 S 的 0-极小左理想, 如果对 S 的任意非零左理想 $A \subseteq I$, 有 $A = I$ 并且 I 含零元.

定义 6^[1] 称 S 为 wrpp 半群, 如果 S 满足下列条件:

a. S 的每个 $\mathcal{L}^{**}$ -类至少含有 S 的一个幂等元;

b. 对 $\forall a \in S, \forall e \in E(L_a^{**})$ 有 $a = ae$, 其中 $E(L_a^{**})$ 为 L_a^{**} 的幂等元集.

称 wrpp 半群 S 为 Cwrpp 半群, 若 $E(S) \subseteq C(S)$, 其中 $E(S)$ 是 S 的幂等元集, $C(S)$ 是 S 的中心. 称 wrpp 半群 S 为充足的, 若对 $\forall a \in S, \exists a^+ \in E(L_a^{**})$ 使得 $a = a^+a$. 称充足 wrpp 半群 S 为左 Cwrpp 半群, 若 $E(S)$ 是左正则带且 $\mathcal{L}^{**}$ 是同余. 本文引进以下概念:

定义 7 半群 S 上的同余 ρ 称为 S 上的 Cwrpp 同余. 如果 S/ρ 是 Cwrpp 半群; 令 ρ 是 S 上 (Cwrpp) 同余, 如果存在 S 的子集 I 满足 $S = I \cup C$, 且 C 同构于 S/ρ 则称 I 是 S 的 (Cwrpp) ρ -集, 这时将 ρ 记作 ρ_I .

定义 8 S 为半群, 如果 S 不包含任何 Cwrpp 同余, 那么定义 S 的 Cwrpp 根同余是泛关系 $S \times S$, 且称 S 是 Cwrpp 根半群; 如果 S 至少包含任何一个 Cwrpp 同余, 那么定义 S 上的 Cwrpp 根同余是所有 Cwrpp 同余 $\rho_\alpha (\alpha \in \omega)$ 的交集, 记作 ρ_{cr} , 即 $\rho_{cr} = \bigcap_{\alpha \in \omega} \{\rho_\alpha \mid \forall \alpha \in \omega, \rho_\alpha \text{ 是 } S \text{ 上的 Cwrpp 同余}\}$. 如果 ρ_{cr} 也有 ρ_{cr} -集, 记为 $N(S)$, 所以 $\rho_{cr} = \rho_{N(S)}$. 称 $N(S)$ 为 S 的 Cwrpp 根; 称半群 S 的 Cwrpp 根同余 ρ_{cr} 是强 Cwrpp 根, 若 ρ_{cr} 仍是 S 的 Cwrpp 同余, 且 $N(S)$ 存在. 此时

$$N(S) = \bigcap_{\alpha \in \omega} \{I_\alpha \mid \forall \alpha \in \omega, I_\alpha \text{ 是 } S \text{ 的 Cwrpp } \rho_\alpha \text{-集}\}$$

定义 9^[5] 假设 N, T^* 是不相交半群, T 有零元 0, $T = T^* \cup \{0\}$ 称半群 S 是由 T 关于 N 的一个 (理想) 扩张, 如果 N 是 S 的一个理想, 且 $S/N \cong T$.

定义 10 称 I 为半群 S 的 $(0-)^{**}$ -左(右)理想, 若 I 为 S 的左(右)理想且对

$$\forall a \in I \text{ 有 } L_a^{**} \subseteq I (R_a^{**} \subseteq I)$$

这里 $L_a^{**} (R_a^{**})$ 是包含 $a \in S$ 的 $\mathcal{L}^{**} (\mathcal{R}^{**})$ -类; 称 S 的子集 I 为 S 的 $(0-)^{**}$ -理想, 若 I 既为 S 的 ** -左理想又为 S 的 ** -右理想; 称 S 的子集 I 为理想 $(0-)^{**}$ -左(右)理想, 如果 I 既是理想又是 $(0-)^{**}$ -左(右)理想.

定义 11 有零元的半群 S 称为左 $0-^{**}$ -单的, 如果 S 的理想 ** -左理想只有 S 或 $\{0\}$ 且 $S^2 \neq \{0\}$; 无零元的半群 S^* 称为左 ** -单的, 如果它没有真理想 ** -左理想.

定义 12 设 S 是 wrpp 半群, 如果 $\rho_{N(S)}$ 是强的且 $N(S)$ 是理想, 那么称 S 为有强 Cwrpp Rees 根的 wrpp 半群; 若 S 还是本原半群, 则称其为有强 Cwrpp Rees 根的本原 wrpp 半群.

引理 1^[4] 一个 0-单半群是完全 0-单半群, 当且仅当它至少有一个本原幂等元.

引理 2^[4] 设 e 为半群 S 的本原幂等元, 则 Se 是 S 的一个 0-极小左理想.

引理 3^[4] S 是单 0-半群, L 是 S 的 0-极小左理想, 那么 $L \setminus \{0\}$ 是 S 中极小非零 $\mathcal{L}$ -类.

定理 1^[4] 若 S 是有零元的本原正则半群, 那么 S 是完全 0-单半群的 0-直并.

由定义 11 易得以下结论.

引理 4 在有零元的半群 S 上, 下列命题成立:

a. S^* 是左 ** -单的, 当且仅当 $\mathcal{J}^{**}$ 是 S 上的泛关系;

b. S 是左 $0-^{**}$ -单的, 当且仅当 $S^2 \neq \{0\}$ 且 $\{0\}, L \setminus \{0\}$ 是 S 的仅有 $\mathcal{J}^{**}$ -类.

引理 5^[4] 以下结论成立:

a. $(\mathcal{R}^{**} \text{-关系}) \mathcal{L}^{**} \text{-关系}$ 为任意半群 S 上的 (左同余) 右同余且在 S 上有下列式子成立:

$$(\mathcal{R}^* \subseteq \mathcal{R}^{**}, \mathcal{R}^{**} \upharpoonright_{E(S)} = \mathcal{R}) \mathcal{L}^* \subseteq \mathcal{L}^{**}, \mathcal{L}^{**} \upharpoonright_{E(S)} = \mathcal{L} (\forall a, b \in S) a \mathcal{L}^* b \Leftrightarrow L^{**}(a) = L^{**}(b)$$

b. 设 U 是半群 S 的子半群, 则 $L^U \subseteq L^S \cap (U \times U); R^U \subseteq R^S \cap (U \times U)$.

引理 6 下列命题成立:

a. ^[3] 有零元的 Cwrpp 半群 C 有半格分解表示

$$C = C^* \cup \{0\}, C^* = \bigcup_{\alpha \in Y} L_\alpha^{**} = \bigwedge_{\alpha \in Y} M_\alpha \quad (1)$$

其中, $L_\alpha^{**} (\alpha \in Y)$ 是左 R -可消么半群.

b. ^[1] 在有零元的左 Cwrpp 半群 S 上, $\mathcal{L}^{**} = \mathcal{J}^{**}$ 是 S 上半格同余.

引理 7 设 S 为有强 Cwrpp Rees 根的 wrpp 半群,则

- $N(S)$ 是 wrpp 半群;
- $N(S) = \bigcap_{\alpha \in \omega} \{I_\alpha \mid \text{对于 } \forall \alpha \in \omega, I_\alpha \text{ 是 } S \text{ 的 wrpp 子半群, Cwrpp 理想}\}$;
- 设 $a \in S$, 则 J_a^{**} 有幂等元且 $J^{**}(a)$ 是 S 的 wrpp 理想 ** -左理想.

证明 因 S 为有强 Cwrpp Rees 根的 wrpp 半群,所以

a. 设 $a \in N(S) \subseteq S$, 因 S 是 wrpp 半群,故有 $e \in E(L_a^{**})$, 使得 $a = ae$. 因 $N(S)$ 是 S 的理想, $e \in E(L_a^{**}) \subseteq L_a^{**} \subseteq L^{**}(a) \subseteq N(S)$, 故 $\exists e \in E(N(S))$ 使得 $a \mathcal{L}^{**} N(S)$, $a = ae$ 成立. 故 $N(S)$ 为 wrpp 半群.

b. 由定义 8 知 $N(S) = \bigcap_{\alpha \in \omega} \{I_\alpha \mid \forall \alpha \in \omega, I_\alpha \text{ 是 } S \text{ 的 Cwrpp } \rho_\alpha\text{-集}\}$. 因 $N(S)$ 是 S 的理想, 故 $N(S)$ 是 S 的最小 Cwrpp 理想. 而命题 b 右边的集合显然也是 S 的最小 Cwrpp 理想, 故它必等于 $N(S)$.

c. 由于 S 是 wrpp 半群, 所以 $\exists e \in E(S)$ 使得 $L_a^{**} = L_e^{**}$, 于是 $e \in L_e^{**} = L_a^{**} \subseteq J_a^{**}$. 再证 $J^{**}(a)$ 是 S 的 wrpp 理想 ** -左理想: 由于 $J^{**}(a)$ 是由元 a 生成的 ** -主理想, 故 $J^{**}(a)$ 既是 S 的理想又是其 ** -左理想, 故 $J^{**}(a)$ 是 S 的理想 ** -左理想. 又由 a 的证明过程可知, $J^{**}(a)$ 是 wrpp 半群. 综上, $J^{**}(a)$ 是 S 的 wrpp 理想 ** -左理想.

基于以上定义和结论, 我们应用有零元的 Cwrpp 半群 C 有半格分解表示 (即式 (1)), 强 Cwrpp Rees 根性质和本原性质, 用理想扩张的手段来刻画有强 Cwrpp Rees 根的本原 wrpp 半群的结构特征.

2 有强 Cwrpp Rees 根的 wrpp 半群的性质

以下若不特别声明, S 总表示有强 Cwrpp Rees 根的 wrpp 半群.

性质 1 设 S 是本原的, 则

- S 的任一子半群是本原的;
- 对 $0 \neq e \in E(S)$, $a \in S$, $a \mathcal{L}^{**} e$ 当且仅当 $a \neq 0$ 且 $a \in Se$.

证明 结论 b 的证明类似于文献 [6] 中推论 3.2 的证明, 这里省略, 只证结论 a.

设 $T \leq S$, S 是本原的, 即 $\forall e \in E(S)$, e 在 S 上

是本原的, 由于 $E(T)$ 上自然序 $\leq_n^{E(T)} = \leq_n^{E(S)}|_{E(T)}$, 所以 $\forall e \in E(T)$, e 在 T 上也是本原的, 故 T 是本原的.

性质 2 设 $a \in S$, 若 $J^{**}(a)$ 是非零主理想 ** -左理想集合中极小元, 则 $J^{**}(a) = J_a^{**} \cup \{0\}$.

证明 显然 $J_a^{**} \subseteq J^{**}(a)$. 反之, 设 $0 \neq x \in J^{**}(a)$, 显然 $J^{**}(x) \subseteq J^{**}(a)$, 由 $J^{**}(a)$ 是非零主理想 ** -左理想集合中的极小元和引理 7 推出 $J^{**}(x) = J^{**}(a)$, 即 $x \in J_a^{**}$. 因此 $J^{**}(a) = J_a^{**} \cup \{0\}$.

性质 3 下列结论成立:

- 对 $\forall a \in S$, $J^{**}(a) = \bigcup \{J_e \mid e \in E(J_a^{**})\}$;
- 对 $\forall a \in S$, $L^{**}(a) = \bigcup \{L_e \mid e \in E(L_a^{**})\}$;
- S 的理想 ** -左 (右) 理想 I 可表为 $I = \bigcup_{e \in E(I)} J^{**}(e)$.

证明 S 是有强 Cwrpp Rees 根的 wrpp 半群, 所以

a. 由 $J^{**}(a)$ 定义: $\forall e \in E(J_a^{**})$, 有 $J_e \subseteq J^{**}(a)$, 故 $\bigcup \{J_e \mid e \in E(J_a^{**})\} \subseteq J^{**}(a)$, 另一方面, 设 $0 \neq x \in J^{**}(a)$, 由引理 5、引理 7, 得

$$\exists e \in E(J_x^{**}), \text{ 使得 } x \in J_x^{**} =$$

$$J_e^{**} \subseteq \bigcup \{J_y \mid y \in E(J_e^{**})\} \subseteq \bigcup \{J_\lambda \mid \lambda \in E(J_a^{**})\}$$

所以, $J^{**}(a) = \bigcup \{J_e \mid e \in E(J_a^{**})\}$

b. 显然 $\bigcup \{L_e \mid e \in E(L_a^{**})\} \subseteq L^{**}(a)$. 另一方面, 设 $0 \neq x \in L^{**}(a)$, S 是 wrpp 半群, 故 $\exists e \in E(L_x^{**})$ 使得 $x \in L_x^{**} = L_e^{**} \subseteq \bigcup \{L_y \mid y \in E(L_e^{**})\} \subseteq \bigcup \{L_\lambda \mid \lambda \in E(L_a^{**})\}$ 所以, $L^{**}(a) \subseteq \bigcup \{L_e \mid e \in E(L_a^{**})\}$. 因此 $L^{**}(a) = \bigcup \{L_e \mid e \in E(L_a^{**})\}$.

c. 设 $T = \bigcup_{e \in E(I)} J^{**}(e)$, 可证 T 是 S 的理想. 为此先证 T 为 S 的子半群

$\forall a, b \in T \exists e, f \in E(I)$ 使得 $a \in J^{**}(e)$, $b \in J^{**}(f)$ 而 $J^{**}(e)$ 是 S 的理想, 所以有 $ab \in J^{**}(e) \subseteq T$. 故 T 为 S 的子半群. 又 $\forall a \in T$, $\exists f \in E(I)$ 使得 $a \in J^{**}(f)$, 由于 $J^{**}(f)$ 为 S 的理想, 故有 $\forall s \in S$, $as \in J^{**}(f) \subseteq T$, $sa \in J^{**}(f) \subseteq T$, 故 T 为 S 的理想.

再证 T 是 S 的 ** -左理想: 对 $a \in T$, 存在 $f \in E(I)$, 使得 $a \in J^{**}(f)$ 由于 $J^{**}(f)$ 是 S 的理想 ** -左理想, 则 $L_a^{**} \subseteq J^{**}(f)$, 当然有 $L_a^{**} \subseteq T$, 所以 T 是 S 的 ** -左理想. 综上, T 是 S 的理想 ** -左理想.

最后证 $I = T$ 成立: 由于 I 是 S 的理想 ** -左理想, 对 $\forall e \in E(I), J^{**}(e) \subseteq I$, 所以有 $T \subseteq I$; 设 $a \in I$ 则存在 $e \in E(I)$ 使得 $a \in L_e^{**}$, 即有 $L_e^{**} = L_a^{**}$. 又 T 是 S 的理想 ** -左理想, 故有 $L_e^{**} = L_a^{**} \subseteq T$, 因此 $a \in T$, 所以 $I \subseteq T$. 综上, $I = T$.

性质 4 对 $0 \neq e \in E(S)$, 以下各条件等价:

(a) $S^1 e$ 是非零幂等元生成主左理想集合中的极小元;

(b) e 是本原幂等元;

(c) $S^1 e$ 是 0 -极小 ** -左理想;

(d) $S^1 e S^1$ 是非零幂等元生成主理想集合中的极小元;

(e) $S^1 e S^1$ 是左 0 - ** -单的.

证明 (a) $\Rightarrow$ (c) 由非零幂等元生成主 ** -左理想集合被非零幂等元生成主左理想集合包含, 即得该结论成立.

(c) $\Rightarrow$ (a) 设 $S^1 e$ 是 0 -极小 ** -左理想. 若有 $f \in E(S)$ 使得 $S^1 f \subseteq S^1 e$, 往证 $S^1 f$ 也是 0 - ** -左理想: 首先 $S^1 f$ 是 S 的左理想, 其次由于 S 是 wrpp 半群, 那么 $\forall a \in S^1 f \subseteq S$ 有 $h \in E(L_a^{**}), L_a^{**} = L_h^{**}, a = ah \in S^1 h$ 从而 $S^1 f \subseteq S^1 h$ 同理可证 $S^1 h \subseteq S^1 f$ 故 $S^1 h = S^1 f$ 于是有 $L_a^{**} = L_h^{**} = L_f^{**} \subseteq S^1 f$, 由定义 10, $S^1 f$ 是 0 - ** -左理想. 由 $S^1 e$ 是 0 -极小 ** -左理想得 $S^1 f = S^1 e$. 从而结论 (a) 成立.

(b) $\Rightarrow$ (a) 设 e 是 S 的本原幂等元, 如果 $0 \neq f \in E(S)$, $S^1 f \subseteq S^1 e$ 那么 $f = fe$, 因此 $efef = eff = ef$, $efe = ef = eef$, 即 $ef \in E(S)$, $ef \leq e$. 从而 $ef = 0$ 或 $ef = e$. 若 $ef = 0$, 则 $efe = ef = 0$ 从而推得 $f = f^2 = fefe = f \cdot 0 = 0$ 这与 $0 \neq f \in E(S)$ 矛盾. 因此 $ef = e$, $S^1 f = S^1 e$. 即 (a) 成立.

(a) $\Rightarrow$ (b) 如果 (a) 成立, 设 $f \in E(S)$ 使得 $f \leq e$, 那么 $ef = fe = f$, $S^1 f \subseteq S^1 e$. 因为 $S^1 e$ 是非零幂等元生成主左理想集合中的极小元, 所以 $S^1 f = S^1 e$. 故 $e \in S^1 f$, $e = ef = f$ 成立. 即 (b) 成立.

(b) $\Rightarrow$ (d) 设 e 是本原幂等元, 假定, 对 $0 \neq f \in E(S)$ 有 $S^1 f S^1 \subseteq S^1 e S^1$, 则有 $u, v \in S$ 使得 $f = uev$. 取元素 $g = evfue$, 则 g 有性质

$$\begin{aligned} g^2 &= evfue^2 vfue = evf^3 ue = evfue = g \\ eg &= eevfue = evfue = g, ge = evfuee = \\ evfue &= g \text{ 即 } eg = ge = g \end{aligned}$$

$$ugv = uevfuev = uevff = uevf = ff = f$$

因此 g 是非零幂等元且 $g \leq e$. 由于 e 是本原的, 有 $g = e$. 因为 $f = ugv$, $g = evfue$, 所以 $S^1 f S^1 = S^1 g S^1 =$

$S^1 e S^1$. 因此 (d) 成立.

(d) $\Rightarrow$ (b) 假定对某个 $0 \neq f \in E(S)$, $f \leq e$ 成立. 由 $ef = fe = f$ 推出 $S^1 f \subseteq S^1 e$, 从而, $S^1 f S^1 \subseteq S^1 e S^1$. 由于 $S^1 e S^1$ 是非零幂等元生成主理想集合中的极小元, 因此 $S^1 f S^1 = S^1 e S^1$, 从而对 $e \in S^1$ 有 $S^1 fe = S^1 ee$ 所以 $S^1 f = S^1 e$ 从而 $f = e$. (b) 成立.

(d) $\Rightarrow$ (e) 显然 $(S^1 e S^1)^2 \neq \{0\}$, 设 $\{0\} \neq A$ 是 $S^1 e S^1$ 的理想 ** -左理想, 下证 $A = S^1 e S^1$. 由性质 3 知, 在 $S^1 e S^1$ 上, 将 A 表示为 $A = \bigcup_{f \in E(A)} J^{**}(f)$. 因 $A \neq \{0\}$, 由 A 的表示, 故 $E(A) \neq \{0\}$, 取 $0 \neq f \in E(A)$, 则 $J(f) = S^1 f S^1 \subseteq A \subseteq S^1 e S^1$, 由 $S^1 e S^1$ 是非零幂等元生成主理想集合中的极小元得, $A = S^1 f S^1 = S^1 e S^1$, 由定义 11 知 $S^1 e S^1$ 是左 0 - ** -单的.

(e) $\Rightarrow$ (d) 设 $S^1 e S^1$ 是左 0 - ** -单的, 则 $S^1 e S^1$ 的理想 ** -左理想只有 $\{0\}$ 和 $S^1 e S^1$, 因此, 由非零幂等元生成的主理想 ** -左理想集合中只有 $S^1 e S^1$. 假定对 $0 \neq f \in E(S)$ 有 $S^1 f S^1 \subseteq S^1 e S^1$, 则 $S^1 f S^1$ 是 $S^1 e S^1$ 的另一个非零理想 ** -左理想, 这与 $S^1 e S^1$ 是左 0 - ** -单的矛盾, 即 (d) 成立.

性质 5 S 是由它的某个 Cwrpp 子半群 C 关于 Cwrpp 根 $N(S)$ 理想扩张, 得到

$$\begin{aligned} S &= N(S) \dot{\cup} C^* \text{ (不交并) } C = \\ &C^* \cup \{0\} \cong S/N(S) \end{aligned}$$

且当 S 是本原半群时, 有

- C^* 有依赖于本原半格 Y 的分解式 (1);
- $N(S)$ 是 S 的理想 ** -左理想且有不相并表示

$$N(S) = \bigcup_{e \in \bigcap_{\alpha \in \omega} E(I_\alpha)} J^{**}(e) \quad (2)$$

其中, $J^{**}(e) (\forall e \in \bigcap_{\alpha \in \omega} E(I_\alpha))$ 是 S 的左 0 - ** -单子半群.

证明 由定义 11 和定义 12 知, 只要证当 S 是本原半群时结论 a, b 成立.

a. 由引理 6 知, C^* 有半格分解式 (1), 由于 S 是本原的, 由性质 1 知, C^* 也是本原的, 即 $\forall e \in E(C^*) = \{1_\alpha\}_{\alpha \in Y}$, e 是本原的, 故 Y 为本原半格, 因此 C^* 有依赖于本原半格的分解式 (1).

b. 先证 $N(S)$ 是 S 的理想 ** -左理想, 这只要证 $N(S)$ 是 S 的 ** -左理想: 设 $a \in N(S)$, 由引理 5 知, $N(S)$ 是 S 的理想得 $L_a^{**} \subseteq L^{**}(a) \subseteq N(S)$, 即 $N(S)$ 是 S 的 ** -左理想.

再证式 (2) 成立: 由于 $N(S)$ 是 S 的理想 ** -左理想, 由性质 3 知, $N(S)$ 可表示为 $N(S) = \bigcup_{e \in E(N(S))} J^{**}(e)$, 由引理 7 知, $N(S) = \bigcap_{\alpha \in \omega} I_\alpha$,

所以

$$E(N(S)) = E(\bigcap_{\alpha \in \omega} I_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in \omega} E(I_\alpha)$$

故式(2)成立.

最后证 $J^{**}(e)(\forall e \in \bigcap_{\alpha \in \omega} E(I_\alpha))$ 是 S 的左 $0-^{**}$ -单子半群: 设 $\{0\} \neq A$ 是 $J^{**}(e)$ 的一个非零理想 ** -左理想, 由引理 7, $J^{**}(e)$ 是 wrpp 半群, 故

$$\exists 0 \neq f \in E(J^{**}(e))$$

$$\text{使得 } S^1 f S^1 \subseteq A \subseteq S^1 e S^1 \subseteq J^{**}(e)$$

应用性质 4(b) $\Rightarrow$ (d) 的证明得 $e = f \in A$. 因 $\{0\} \neq A$ 是 $J^{**}(e)$ 的一个非零理想 ** -左理想, 由 $e = f \in A$ 得 $A = J^{**}(e)$, 即 $J^{**}(e)$ 是左 $0-^{**}$ -单的.

3 有强 Cwrpp Rees 根的本原 wrpp 半群的结构特征

下面给出有强 Cwrpp Rees 根的本原 wrpp 半群的一个结构特征, 并用实例说明这类半群具有其独特意义.

定理 2 对于有强 Cwrpp Rees 根的 wrpp 半群 S , 以下条件等价:

(a) S 是本原的;

(b) S 是 Cwrpp 半群 C 关于 $N(S)$ 的理想扩张, 其中 $N(S)$ 和 C 满足条件:

(1) $N(S)$ 是本原 wrpp 左 $0-^{**}$ -单子半群的 0 -直并;

(2) C 是本原 wrpp 左 $0-^{**}$ -单子半群的 0 -直并.

(c) S 是本原 wrpp 左 $0-^{**}$ -单子半群的 0 -直并.

证明 (a) $\Rightarrow$ (b) 由性质 5, 设本原半群 S 是它的某个 Cwrpp 子半群 C 关于 $N(S)$ 的理想扩张. 只需证(1)(2)成立, 现证(1). 由性质 5 知, $J^{**}(e)$ 是左 $0-^{**}$ -单的 ($\forall e \in \bigcap_{\alpha \in \omega} E(I_\alpha)$). 下证 $N(S)$ 是 $J^{**}(e)(\forall e \in \bigcap_{\alpha \in \omega} E(I_\alpha))$ 的 0 -直并. 由于对 $\forall e, f \in \bigcap_{\alpha \in \omega} E(I_\alpha)$

$$J^{**}(e) \cap J^{**}(f) = \begin{cases} J^{**}(e), & \text{若 } f \in J_e^{**} \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases}$$

设 $x \in J_e^{**}$ 且 $y \in J_f^{**}$, 那么 $J_x^{**} = J_e^{**}, J_y^{**} = J_f^{**}$. 因为

$$J^{**}(xy) \subseteq J^{**}(x) = J^{**}(e)$$

$$J^{**}(xy) \subseteq J^{**}(y) = J^{**}(f)$$

得 $J^{**}(xy) = \{0\}$ 或 $J^{**}(xy) = J^{**}(e)$, $J^{**}(xy) = \{0\}$ 或 $J^{**}(xy) = J^{**}(f)$. 因此

$$J^{**}(e)J^{**}(f) = \begin{cases} \{0\} \\ J^{**}(e) \end{cases}$$

综上知, 条件(1)成立. 由性质 5, 用相同方法可证(2)成立.

(b) $\Rightarrow$ (c) 由(1)(2)和性质 5 式(2)知

$$N(S) = \bigcup_{e \in \bigcap_{\alpha \in \omega} E(I_\alpha)} J^{**}(e) =$$

$$\bigcup_{e \in E_1} J^{**}(e)(E_1 = \bigcap_{\alpha \in \omega} E(I_\alpha))$$

由引理 6, 令 $E_2 = \{1_\alpha\}_{\alpha \in Y}$ 这里 $1_\alpha (\alpha \in Y)$ 为左 R -可消么半群 $L_\alpha^{**} = J_\alpha^{**} (\alpha \in Y)$ 的么元. 令 $\bar{E} = E_1 \cup E_2$, 由 $S = N(S) \dot{\cup} C^*$ 知 $\bar{E} = E_1 \dot{\cup} E_2$. 于是

$$S = N(S) \dot{\cup} C^* =$$

$$\left(\bigcup_{e \in E_1} J^{**}(e) \right) \dot{\cup} \left(\bigcup_{1_\alpha \in E_2} J^{**}(1_\alpha) \right) = \bigcup_{e \in \bar{E}} J^{**}(e)$$

由结论(b)和以下事实:

$$\forall e \in E_1, 1_\alpha \in E_2, J^{**}(e)J^{**}(1_\alpha) = \begin{cases} \{0\} \\ J^{**}(e) \end{cases}$$

即使(c)成立.

(c) $\Rightarrow$ (a) 由题设条件不妨设 $S = \bigcup_{e \in \bar{E}} J^{**}(e)$ 是本原 wrpp 左 $0-^{**}$ -单子半群 $J^{**}(e)$ 的 0 -直并 ($e \in \bar{E}$ 是幂等元), 由性质 4, $e \in \bar{E}$ 是 $J^{**}(e)$ 的本原幂等元, 且对 $\forall h \in J^{**}(e)$, h 是 $J^{**}(e)$ 的本原幂等元. 往证结论(a)成立.

对 $\forall f \in E(S)$, 设有 $\alpha \in \bar{E}$ 使得 $f \in J^{**}(\alpha)$, 只要证明 f 是 S 的本原幂等元即可, 假设有 $0 \neq h \in E(S)$ 使得 $h \leq f$, $\exists \beta \in \bar{E}$ 使得 $h \in J^{**}(\beta)$, 分以下情形进行:

a. 若 $J^{**}(\alpha) \neq J^{**}(\beta)$ 则 $J^{**}(\alpha) \cap J^{**}(\beta) = \Phi$, 由题设条件得 $h = fh = hf = 0$, 不可.

b. 若 $J^{**}(\alpha) = J^{**}(\beta)$ 则 $f, h \in J^{**}(\alpha)$, f, h 是 $J^{**}(e)$ 的本原幂等元, 从而在 $J^{**}(\alpha)$ 上, 由 $h \leq f$ 推得 $h = f$.

综上所述, 知 f 是 S 的本原幂等元, 从而结论(a)成立.

最后给出有强 Cwrpp Rees 根的本原 wrpp 半群的例子以说明其独特意义.

例 1 设 C^* 是无零元的本原 Cwrpp 半群, $C = C^* \cup \{0\}$, C 的半格分解由(引理 6 中)式(1)给出, 则易见 Y 是本原半格. 由引理 6, 设左 Cwrpp 半群 N (见文献[4])有依赖于本原半格 Y 的半格分解 $N = \bigcup_{\alpha \in Y} L_\alpha^{**}$. 则有以下结论:

a. 易知, $E(N)$ 包含由 Y 决定的子带 E_1 为

$$E_1 = \{e_\alpha \in E(N) \mid \forall \alpha, \beta \in Y \text{ 有 } e_\alpha e_\beta = e_{\alpha\beta}\}$$

b. N 是本原半群: 事实上 $\forall e \in E(N) \exists \alpha \in Y$

使得 $e \in E(L_{\alpha}^{**})$, 若有 $f \in E(N)$, $f \leq e$ 则 $f \in E(L_{\beta}^{**})$ ($\beta \in Y$), 由于 Y 是本原半格, 故 $f = e$, 即 e 是本原的, 所以 N 是本原半群.

c. N 和 C 满足条件(1)(2): 首先 L_{α}^{**} 是本原 wrpp 左 0-**-单子半群, 下证 N 和 C 是 L_{α}^{**} 的 0-直并: 事实上, 由于 Y 是本原半格, 所以 $\forall \alpha, \beta \in Y$ 有 $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$, 从而有

$$L_{\alpha}^{**} \cap L_{\beta}^{**} = \begin{cases} L_{\alpha}^{**} & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

$$L_{\alpha}^{**} L_{\beta}^{**} = \begin{cases} L_{\alpha}^{**} & \alpha = \beta \\ \{0\} & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

所以, N 和 C 是本原 wrpp 左 0-**-单子半群 L_{α}^{**} 的 0-直并. 令

$$S = C^* \dot{\cup} N, E(S) =$$

$$E(N) \dot{\cup} E(C^*) = E(N) \dot{\cup} \{1_{\alpha}\}_{\alpha \in Y}$$

定义 从 C^* 到 N 的映射

$$\theta: \forall x_{\alpha} \in M_{\alpha}, x_{\alpha}\theta = e_{\alpha} \in E_1$$

可证 θ 是一个局部同态映射^[6]: $\forall x, y \in C^*$, 则存在 $\alpha, \beta \in Y$ 使得 $x \in M_{\alpha}, y \in M_{\beta}$, 不妨设 $x = x_{\alpha}, y = y_{\beta}$ 则存在 $z_{\alpha\beta} \in M_{\alpha\beta}$, 使得

$$(x_{\alpha}y_{\beta})\theta = z_{\alpha\beta}\theta = e_{\alpha\beta} = e_{\alpha}e_{\beta} = x_{\alpha}\theta y_{\beta}\theta$$

在 S 上定义如下运算^{"o"}:

$$(\forall x, y \in C^*) \quad x \circ y = xy \in C^*$$

$$(\forall x \in C^*, \beta \in N) \quad x\beta = x\theta\beta \in N$$

$$(\forall x \in C^*, \beta \in N) \quad \beta x = \beta x\theta \in N$$

$$(\forall \alpha, \beta \in N) \quad \alpha\beta = \alpha\beta \in N$$

则易验证 S 成为 C 关于 N 的理想扩张半群. 由定理 2 知, S 是有强 Cwrpp Rees 根的本原 wrpp 半群. 由于 $E(S) = E(N) \dot{\cup} \{1_{\alpha}\}_{\alpha \in Y} \neq N$, 故 S 不是文献 [1] 中的 SBCRW-半群. 说明这类半群有其独特意义.

参考文献:

- [1] Du L, Shum K P. On left Cwrpp semigroups [J]. Semigroup Forum, 2003, 67: 373 - 387.
- [2] Fountain J B. Abundant semigroups [J]. Proc London Math Soc, 1982, 44(3): 103 - 129.
- [3] Tang X D. On a theorem of Cwrpp semigroup [J]. Communications in Algebra, 1997, 25: 1499 - 1504.
- [4] Howie J M. An introduction to semigroup theory [M]. London: Academic Press, 1976.
- [5] Clifford A H, Preston G B. The algebraic theory of semigroups [M]. Providence: American Mathematical Society, 1961.
- [6] Fountain J B. Adequate semigroups [J]. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 1979, 22(1): 113 - 125.