

文章编号:1007-6735(2013)01-0001-06

非线性项变号的分数阶微分方程边值问题正解的存在性

王 淑, 贾 梅, 祁卫杰
(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 研究了一类分数阶微分方程边值问题正解的存在性. 在允许非线性项变号的情况下, 利用锥拉伸锥压缩不动点定理, 得到了分数阶微分方程边值问题正解的存在性定理, 所得结论突显了参数在不同范围内对正解存在性的影响.

关键词: 分数阶微分方程; 锥拉伸锥压缩不动点定理; 正解; 边值问题
中图分类号: O 175.8 **文献标志码:** A

Existence of Positive Solutions for A Class of Fractional Differential Equations with Sign Changing Nonlinearities

WANG Shu, JIA Mei, QI Weijie
(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The existence of positive solutions of boundary value problems for fractional differential equations with sign changing nonlinearities was investigated. By using expansion and compression fixed point theorem in cone, the theorem of existence of positive solutions of boundary value problems for a class of fractional differential equations was obtained. The conclusions highlight the influences of the parameters in different ranges on the existence of positive solutions.

Key words: *fractional differential equation; expansion and compression fixed point theorem in cone; the positive solution; boundary value problem*

1 问题的提出

随着科学技术的发展, 分数阶微分方程在扩散和运输理论^[1]、高分子材料的解链^[2]及非牛顿流体力学^[3]等诸多领域得到了广泛的应用. 随着应用背

景的不断拓宽, 进一步促进了分数阶微分方程的理论研究.

近年来, 分数阶微分方程两点边值问题^[4-5]、三点边值问题^[6]、多点边值问题^[7]及积分边值问题^[8-9]正解的存在性研究已取得了许多成果, 然而, 现有文献大多是在非线性项不变号情况下研究边值

收稿日期: 2011-11-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11171220); 上海市教委科研创新重点资助项目(10ZZ93)

第一作者: 王 淑(1988-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 应用微分方程. E-mail: wangshu198735@126.com

通讯作者: 贾 梅(1963-), 女, 副教授. 研究方向: 应用微分方程. E-mail: jiaimei_usst@163.com

问题正解的存在性. 目前, 对于非线性项变号的整数阶微分方程边值问题正解存在性的研究已很多^[10-12], 但对非线性项变号的分数阶微分方程边值问题正解存在性的研究较少.

本文研究非线性项变号的分数阶微分方程边值问题

$$\left. \begin{aligned} D_0^{\alpha+} u(t) &= \lambda f(t, u(t)) \\ u(0) - au'(0) &= 0 \\ u(1) - bu'(1) &= 0 \\ u''(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

正解的存在性, 其中, D^α 为 Caputo 分数导数, $2 < \alpha < 3, \lambda > 0, f: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数, a, b 为常数. 利用锥拉伸锥压缩不动点定理, 得到了分数阶微分边值问题(1)正解的存在性定理, 所得结论突显了参数在不同范围内对正解存在性的影响.

2 预备知识

定义 1^[13] 函数 $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 的 $\alpha > 0$ 阶积分是

$$I_0^{\alpha+} h(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s) ds$$

其中, 右边是在 $(0, +\infty)$ 上逐点有定义的.

$$G(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(a-b+1)} \begin{cases} (a-b+1)(t-s)^{\alpha-1} + (a+t)(1-s)^{\alpha-2}(b\alpha-b-1+s), & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ (a+t)(1-s)^{\alpha-2}(b\alpha-b-1+s), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

记 $\gamma = \frac{a(b\alpha-b-1)}{b(a+1)(\alpha-1)}$, 则当 (H_0) 成立时, 有 $0 < \gamma < 1$, 且有引理 2.

引理 2 设 (H_0) 成立, 则函数 $G(t, s)$ 具有下列性质:

- $G(t, s) \geq 0, (t, s) \in I \times I$;
- $G(0, s) \leq G(t, s) \leq G(1, s), (t, s) \in I \times I$;
- 对任意的 $(t, s) \in I \times I$, 有 $G(0, s) \geq \gamma G(1, s)$.

证明 因为 $G(t, s)$ 是关于 t 单调递增的函数, a 和 b 显然成立.

因为

$$\begin{aligned} \min_{t \in [0, 1]} G(t, s) &= G(0, s) = \frac{a(1-s)^{\alpha-2}(b\alpha-b-1+s)}{\Gamma(\alpha)(a-b+1)} \\ \max_{t \in [0, 1]} G(t, s) &= G(1, s) = \frac{b(1-s)^{\alpha-2}[(a+1)(\alpha-1)-1+s]}{\Gamma(\alpha)(a-b+1)} \end{aligned}$$

定义 2^[13] 函数 $y: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 的 $\alpha > 0$ 阶 Caputo 微分为

$$D_0^{\alpha+} y(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} y^{(n)}(s) ds$$

其中, $n = [\alpha] + 1, [\alpha]$ 代表 α 的最大整数部分; 右边是在 $(0, +\infty)$ 上逐点有定义的.

记 $I = [0, 1], E = C(I)$ 表示 $[0, 1]$ 上的连续函数全体, 定义 $\|u\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |u(t)|$.

为方便起见, 假设以下条件成立:

$$(H_0) \quad a > 0, a > b - 1, b > \frac{1}{\alpha - 1};$$

$$(H_1) \quad f \in ([0, 1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}), \text{ 对任意 } (t, u) \in [0, 1] \times \mathbb{R}, \text{ 存在 } M > 0, \text{ 使得 } f(t, u) \geq -M.$$

对任意的 $y \in C(I)$, 首先考虑边值问题

$$\left. \begin{aligned} D_0^{\alpha+} u(t) &= y(t) \\ u(0) - au'(0) &= 0 \\ u(1) - bu'(1) &= 0 \\ u''(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

引理 1^[8] 假设 (H_0) 成立, 则边值问题(2)存在唯一解

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s) y(s) ds$$

其中

$$\begin{aligned} G(0, s) &= \frac{(1-s)^{\alpha-2} b[(a+1)(\alpha-1)-1+s]}{\Gamma(\alpha)(a-b+1)} \\ &\geq \frac{a(b\alpha-b-1+s)}{b[(a+1)(\alpha-1)-1+s]} \geq \\ &G(1, s) \frac{a(b\alpha-b-1)}{b(a+1)(\alpha-1)} \end{aligned}$$

所以, $G(0, s) \geq \gamma G(1, s)$.

证毕.

引理 3 设 (H_0) 成立, 对任意 $t \in I, y(t) \geq 0$, 则边值问题(2)的解 u 满足 $\min_{0 \leq t \leq 1} u(t) \geq \gamma \|u\|$, 且 u 是单调递增的正解.

证明 由引理 1 和引理 2 可得, 对任意 $t \in [0, 1]$, 有

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^1 G(t, s) y(s) ds \geq \int_0^1 G(0, s) y(s) ds \geq \\ &\gamma \int_0^1 G(1, s) y(s) ds = \gamma \|u\| \end{aligned}$$

故

$$\min_{0 \leq t \leq 1} u(t) \geq \gamma \|u\|$$

由于 $G(t, s)$ 关于 t 是单调递增的, 所以, u 是单调递增的.

证毕.

如果 $y(t) \equiv 1$, 则边值问题(2)变为

$$\left. \begin{aligned} D_{0^+}^\alpha u(t) &= 1 \\ u(0) - au'(0) &= 0 \\ u(1) - bu'(1) &= 0 \\ u''(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

引理 4 设 (H_0) 成立, 则边值问题(3)存在唯一正解 $\bar{\omega}(t)$, 使得对任意的 $t \in [0, 1]$, 有 $0 < \bar{\omega}(t) \leq \bar{\omega}(1)$.

证明 由引理 1 和引理 3 可得, $\bar{\omega}(t) = \int_0^1 G(t, s) ds$ 是边值问题(3)的唯一单调正解. 根据引理 2 得

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(0) &= \min_{0 \leq t \leq 1} \bar{\omega}(t) = \int_0^1 G(0, s) ds = \frac{a(b\alpha - 1)}{\Gamma(\alpha + 1)(a - b + 1)} \\ \bar{\omega}(1) &= \max_{0 \leq t \leq 1} \bar{\omega}(t) = \int_0^1 G(1, s) ds = \frac{b(a\alpha + \alpha - 1)}{\Gamma(\alpha + 1)(a - b + 1)} \end{aligned}$$

所以, 对任意的 $t \in [0, 1]$, 有 $0 < \bar{\omega}(0) \leq \bar{\omega}(t) \leq \bar{\omega}(1)$.

证毕.

令 $g(t, u) = f(t, u) + M$, $\omega(t) = \lambda M \bar{\omega}(t)$, 则当 (H_1) 成立时, 对任意 $(t, u) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$, 有 $g(t, u) \geq 0$.

现考虑边值问题

$$\left. \begin{aligned} D_{0^+}^\alpha u(t) &= \lambda g(t, u(t) - \omega(t)) \\ u(0) - au'(0) &= 0 \\ u(1) - bu'(1) &= 0 \\ u''(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

引理 5 设 (H_0) 和 (H_1) 成立, 那么, u 是边值问题(1)的一个正解的充分必要条件是 $\bar{u} = u + \omega$ 为边值问题(4)的一个正解, 且对任意的 $t \in [0, 1]$, 有 $\bar{u}(t) \geq \omega(t)$.

证明 如果 u 是边值问题(1)的一个正解, 那么

$$\begin{aligned} D_{0^+}^\alpha (u(t) + \omega(t)) &= D_{0^+}^\alpha u(t) + D_{0^+}^\alpha \omega(t) = \\ &= \lambda f(t, u(t)) + \lambda M = \lambda (f(t, u(t)) + M) = \\ &= \lambda g(t, (u(t) + \omega(t)) - \omega(t)) \end{aligned}$$

则

$$D_{0^+}^\alpha \bar{u}(t) = \lambda g(t, \bar{u}(t) - \omega(t))$$

因为, $u(t)$ 是正解, 所以, $\bar{u}(t) \geq \omega(t) > 0$, 易

证 $\bar{u}(t)$ 满足边界条件, 因此, $\bar{u}(t)$ 是边值问题(4)的一个正解.

反之, 如果 $\bar{u} = u + \omega$ 为边值问题(4)的一个正解, 易证 u 是边值问题(1)的一个正解.

证毕.

引理 6 (锥拉伸锥压缩不动点定理)^[14] 设 E 是 Banach 空间, $K \subset E$, K 为 E 中的一个锥, 且 Ω_1 和 Ω_2 是 E 中的有界开集, $\theta \in \Omega_1 \subset \bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$, $A: K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \rightarrow K$ 全连续的, 如果满足下列条件之一:

a. $\|Au\| \leq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$, $\|Au\| \geq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$;

b. $\|Au\| \geq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$, $\|Au\| \leq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$.

那么, A 在 $K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$ 中必有不动点.

$$\text{令 } K = \left\{ u \in E : u(t) \geq 0, \min_{0 \leq t \leq 1} u(t) \geq \gamma \|u\| \right\},$$

则 K 为 Banach 空间 E 中的一个锥.

定义映射 $A: K \rightarrow E$,

$$(Au)(t) = \lambda \int_0^1 G(t, s) g(s, u(s) - \omega(s)) ds$$

引理 7 设 (H_0) 和 (H_1) 成立, 那么, 则映射 $A: K \rightarrow K$ 是全连续的.

证明 由引理 3 易得 $A(K) \subset K$.

对任意的 $S \subset K$, 且 S 有界, 则存在 $m_0 > 0$, 对任意的 $u \in S$, 有 $\|u\| \leq m_0$. 记

$$\begin{aligned} m_1 &= \max_{s \in [0, 1]} \omega(s) \\ m_2 &= \max_{\substack{s \in [0, 1] \\ x \in [-m_1 - m_0, m_1 + m_0]}} g(s, x) \end{aligned}$$

则 $|u(s) - \omega(s)| \leq m_0 + m_1$

由于 $G(t, s)$ 在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上连续, 所以, $G(t, s)$ 在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上一致连续. 因此, 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $t_1, t_2, s_1, s_2 \in [0, 1]$, 当 $|t_1 - t_2| < \delta$, $|s_1 - s_2| < \delta$ 时, 有

$$|G(t_1, s_1) - G(t_2, s_2)| < \frac{\epsilon}{\lambda m_2}$$

则

$$\begin{aligned} |(Au)(t_1) - (Au)(t_2)| &= \\ &= \left| \lambda \int_0^1 (G(t_1, s_1) - G(t_2, s_2)) g(s, u(s) - \omega(s)) ds \right| < \\ &< \frac{\epsilon}{\lambda m_2} \lambda \int_0^1 |g(s, u(s) - \omega(s))| ds \leq \frac{\epsilon}{\lambda m_2} \lambda m_2 = \epsilon \end{aligned}$$

所以, $A(S)$ 是等度连续的.

$$\| (Au)(t) \| = \left| \lambda \int_0^1 G(t, s) g(s, u(s) - \omega(s)) ds \right| \leq$$

$$\lambda \left| \int_0^1 G(1, s) g(s, u(s) - \omega(s)) ds \right| \leq \lambda m_2 \int_0^1 G(1, s) ds$$

对任意的 $t \in [0, 1]$ 成立, 所以, $A(S)$ 是一致有界的.

因此, 根据 Arzela-Ascoli 定理可得 $A(S)$ 是列

$$\begin{aligned} |(Au_n)(t) - (Au)(t)| &= \left| \lambda \int_0^1 G(t, s) (g(s, u_n(s) - \omega(s)) - g(s, u(s) - \omega(s))) ds \right| \\ &\leq \lambda \int_0^1 G(1, s) |g(s, u_n(s) - \omega(s)) - g(s, u(s) - \omega(s))| ds \end{aligned}$$

所以

$$\|Au_n - Au\| \leq \lambda \int_0^1 G(1, s) \cdot |g(s, u_n(s) - \omega(s)) - g(s, u(s) - \omega(s))| ds$$

由 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$Au_n \rightarrow Au, \quad n \rightarrow \infty$$

因此, A 是连续的, 又因 A 是紧算子, 所以, A 是全连续的.

证毕.

3 主要结果

记

$$m = \min_{t \in [0, 1]} \int_0^1 G(t, s) ds = \frac{a(b_\alpha - 1)}{\Gamma(\alpha + 1)(a - b + 1)}$$

$$N = \bar{\omega}(1)$$

定理 1 设 (H_0) 和 (H_1) 成立, 且满足

$$\liminf_{u \rightarrow +\infty, t \in [0, 1]} \frac{f(t, u)}{u} = +\infty$$

则存在常数 $\lambda^* > 0$, 使得当 $\lambda \in (0, \lambda^*)$ 时, 边值问题(1)至少有一正解.

证明 对任意的 $r > 0$, 令

$$\tilde{g}(r) = \sup_{0 \leq t \leq 1, 0 \leq u \leq r} g(t, u) \quad (5)$$

由条件

$$\liminf_{u \rightarrow +\infty, t \in [0, 1]} \frac{f(t, u)}{u} = +\infty$$

可得

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r}{\tilde{g}(r)} = 0$$

所以, 存在常数 $R_1 > 0$, 使得

$$\frac{R_1}{\tilde{g}(R_1)} = \max_{0 \leq r < +\infty} \left\{ \frac{r}{\tilde{g}(r)} \right\}$$

紧的, 从而 A 在 S 上是紧的.

在 K 中任取一个收敛数列 $\{u_n\}$ 且有 $u_n \rightarrow u$, $n \rightarrow \infty$, 所以, 由 g 的连续性可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (g(s, u_n(s) - \omega(s)) - g(s, u(s) - \omega(s))) = 0, \quad s \in [0, 1]$$

而对任意 $t \in [0, 1]$, 可得

记 $L = \tilde{g}(R_1)$, 定义 $\Omega_1 = \{u \in E : \|u\| < R_1\}$, 取

$$\lambda^* = \min \left\{ \frac{\gamma R_1}{MN}, \frac{R_1}{LN} \right\}$$

对任意 $\lambda \in (0, \lambda^*)$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$, 有 $u(t) \geq \gamma \|u\| = \gamma R_1$, $t \in [0, 1]$, 且 $u(t) - \omega(t)$ 满足

$$\begin{aligned} R_1 &\geq u(t) - \omega(t) \geq \gamma R_1 - \lambda MN > \\ &\gamma R_1 - \lambda^* MN \geq 0 \end{aligned}$$

因此, 由式(5)可得

$$g(t, u(t) - \omega(t)) \leq \tilde{g}(R_1) = L$$

$$(Au)(t) = \lambda \int_0^1 G(t, s) g(s, u(s) - \omega(s)) ds \leq$$

$$\lambda \tilde{g}(R_1) \int_0^1 G(t, s) ds = \lambda \tilde{g}(R_1) \bar{\omega}(t) \leq$$

$$\lambda LN < \lambda^* LN \leq R_1$$

所以, 对任意 $u \in K \cap \partial\Omega_1$, 有 $\|Au\| \leq \|u\|$.

取 $\xi = \frac{2}{\lambda \gamma m}$. 因为

$$\liminf_{u \rightarrow +\infty, t \in [0, 1]} \frac{g(t, u)}{u} = \liminf_{u \rightarrow +\infty, t \in [0, 1]} \frac{f(t, u)}{u} = +\infty$$

存在 $\bar{R}_2 > R_1$, 使得对任意的 $t \in [0, 1]$, 当 $u \geq \bar{R}_2$ 时, 有 $g(t, u) \geq \xi u$. 令

$$R_2 = \max \left\{ \frac{2\lambda MN}{\gamma}, \frac{\bar{R}_2}{\gamma} + R_1 \right\}$$

$$\Omega_2 = \{u \in E : \|u\| < R_2\}$$

对任意 $u \in K \cap \partial\Omega_2$, 有 $\|u\| = R_2$, 且对任意 $t \in [0, 1]$, $u(t) \geq \gamma \|u\| = \gamma R_2 \geq \bar{R}_2$, 所以, $g(t, u(t)) \geq \xi u(t)$.

因为, 对任意 $t \in [0, 1]$,

$$u(t) - \omega(t) \geq \gamma R_2 - \lambda MN > \gamma R_2 - \lambda^* MN \geq$$

$$\gamma R_2 - \frac{\gamma R_1}{MN} MN \geq \gamma \left(R_1 + \frac{\bar{R}_2}{\gamma} \right) - \gamma R_1 = \bar{R}_2$$

所以

$$\begin{aligned} g(t, u(t) - \omega(t)) &\geq \\ \xi(u(t) - \omega(t)) &\geq \xi(\gamma R_2 - \lambda MN) \end{aligned}$$

因此

$$(Au)(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s)g(s,u(s)-\omega(s))ds \geq$$

$$\lambda \xi(\gamma R_2 - \lambda MN)m \geq R_2 = \|u\|$$

由此可得,对任意 $u \in K \cap \partial\Omega_2$, 有 $\|Au\| \geq \|u\|$.

根据锥拉伸锥压缩不动点定理可知,算子 A 有一个不动点 u ,所以, u 为边值问题(4)的正解,满足 $R_1 \leq \|u\| \leq R_2$,且对任意 $t \in [0,1]$,

$$u(t) - \omega(t) \geq \gamma R_1 - \lambda MN > \gamma R_1 - \lambda^* MN \geq 0$$

由引理 5 可得, $u(t) - \omega(t)$ 是边值问题(1)的一个正解.

证毕.

定理 2 设 (H_0) 和 (H_1) 成立,且满足

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \inf_{t \in [0,1]} f(t,u) = +\infty$$

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [0,1]} \frac{f(t,u)}{u} = 0$$

则存在常数 $\lambda^* > 0$,使得当 $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ 时,边值问题(1)至少有一正解.

证明 由条件 $\lim_{u \rightarrow +\infty} \inf_{t \in [0,1]} f(t,u) = +\infty$, 可得
 $\lim_{u \rightarrow +\infty} \inf_{t \in [0,1]} g(t,u) = +\infty$, 所以,存在正数 $\bar{R}_1 > 0$, $\eta = \frac{2MN}{\gamma m} > 0$, 对任意的 $t \in [0,1]$, 当 $u \geq \bar{R}_1$ 时,
 有 $g(t,u) \geq \eta$.

取

$$\lambda^* = \frac{\bar{R}_1}{MN}, \quad R_1 = \frac{2\lambda MN}{\gamma}$$

令 $\Omega_1 = \{u \in E : \|u\| < R_1\}$, 则对任意 $u \in K \cap \partial\Omega_1$, $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$, 有

$$u(t) - \omega(t) \geq \gamma R_1 - \lambda MN \geq \lambda MN \geq \lambda^* MN \geq \bar{R}_1$$

所以, $g(t, u(t) - \omega(t)) \geq \eta$. 因此

$$(Au)(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s)g(s,u(s)-\omega(s))ds \geq$$

$$\lambda \eta m = \lambda \frac{2MN}{\gamma m} m = \frac{2\lambda MN}{\gamma} = R_1 = \|u\|$$

由此可得,对任意 $u \in K \cap \partial\Omega_1$, 有 $\|Au\| \geq \|u\|$.

因为

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [0,1]} \frac{g(t,u)}{u} = \overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [0,1]} \frac{f(t,u) + M}{u} = 0$$

对 $\varepsilon = \frac{1}{\lambda N}$, 存在 $\tilde{R}_2 > R_1$, 使得对任意的 $t \in [0,1]$,

当 $u \geq \tilde{R}_2$ 时, 有 $g(t,u) \leq \varepsilon u$. 令

$$R_2 = \max\left\{\tilde{R}_2, \frac{\lambda MN + \tilde{R}_2}{\gamma}\right\}$$

$$\Omega_2 = \{u \in E : \|u\| < R_2\}$$

则对任意 $u \in K \cap \partial\Omega_2$, $t \in [0,1]$, 满足 $u(t) \geq \gamma \|u\| = \gamma R_2$.

因为, $u(t) - \omega(t) \geq \gamma R_2 - \lambda MN \geq \tilde{R}_2$, 所以

$$g(t, u(t) - \omega(t)) \leq \varepsilon(u(t) - \omega(t)) \leq \varepsilon u(t) \leq \varepsilon R_2$$

那么,对任意 $t \in [0,1]$,

$$(Au)(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s)g(s,u(s)-\omega(s))ds \leq$$

$$\lambda \varepsilon R_2 \int_0^1 G(1,s)ds = \lambda \varepsilon R_2 N = R_2 = \|u\|$$

由此可得,对任意的 $u \in K \cap \partial\Omega_2$, 有 $\|Au\| \leq \|u\|$.

根据锥拉伸锥压缩不动点定理可知,算子 A 有一个不动点 u ,所以, u 为边值问题(4)的解,满足 $R_1 \leq \|u\| \leq R_2$,且对任意的 $t \in [0,1]$,

$$u(t) - \omega(t) \geq \gamma R_1 - \lambda MN \geq \lambda MN \geq \lambda^* MN \geq 0$$

由引理 5 可得, $u(t) - \omega(t)$ 是边值问题(1)的一个正解.

证毕.

4 应用实例

考虑边值问题

$$\left. \begin{aligned} D_0^{5/2} u(t) &= 2u(u-t) \\ u(0) - 2u'(0) &= 0 \\ u(1) - 2u'(1) &= 0 \\ u''(0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

这里 $a = b = 2$, $\alpha = 5/2$, 对任意的 $t \in [0,1]$, $u \in \mathbb{R}$, 有

$$f(t,u) = 2u^2 - 2ut = 2(u - \frac{t}{2})^2 -$$

$$\frac{t^2}{2} \geq -\frac{1}{2} > -1$$

从而易得

$$M = 1, \quad N = \bar{\omega}(1) = \frac{104}{15\pi}, \quad \gamma = \frac{4}{9}$$

因为

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \inf_{t \in [0,1]} \frac{f(t,u)}{u} = +\infty$$

所以,存在常数 $R_1 > 0$,使得

$$\frac{R_1}{\tilde{g}(R_1)} = \max_{0 \leq r < +\infty} \left\{ \frac{r}{\tilde{g}(r)} \right\}$$

经计算得

$$\tilde{g}(r) = \sup_{0 \leq t \leq 1, 0 \leq u \leq r} g(t, u) = 2r^2 + 1$$

从而

$$\frac{R_1}{\tilde{g}(R_1)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

取 $R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $L = \tilde{g}(R_1) = 2$, 易得 $\lambda^* = \frac{15\sqrt{2}}{416}\pi$.

易证 (H_0) 和 (H_1) 成立. 由定理 1 可得, 当 $\lambda \in (0, \frac{15\sqrt{2}}{416}\pi)$ 时, 边值问题(6)至少存在一个正解.

参考文献:

- [1] 同登科, 王瑞和, 杨河山. 管内非 Newton 流体分数阶流动的精确解[J]. 中国科学 G 辑, 2005, 35(3): 318 - 326.
- [2] Eidelman S D, Kochubel A N. Cauchy problem for fractional diffusion equations[J]. Journal of Differential Equation, 2004, 199(2): 211 - 255.
- [3] 徐明瑜, 谭文长. 广义二阶流体分数阶反常扩散速度场、应力场及涡旋层的理论分析[J]. 中国科学 A 辑, 2001, 31(7): 626 - 638.
- [4] Bai Z B, Lu H S. Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, 311(2): 495 - 505.
- [5] Goodrich C S. Existence of a positive solution to a class of fractional differential equations[J]. Applied Mathematics Letters, 2010, 23(9): 1050 - 1055.
- [6] Bai Z B. On positive solutions of a nonlocal fractional boundary value problem[J]. Nonlinear Analysis, 2010, 72(2): 916 - 924.
- [7] Salem H A H. On the fractional order m-point boundary value problem in reflexive Banach spaces and weak topologies[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 224(2): 565 - 572.
- [8] 金京福, 刘锡平, 窦丽霞, 等. 分数阶微分方程积分方程边值问题正解存在性[J]. 吉林大学学报(理学版), 2011, 49(5): 823 - 828.
- [9] Jia M, Liu X P. Three nonnegative solutions for fractional differential equations with integral boundary conditions[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2011, 62(3): 1405 - 1412.
- [10] Li G S, Liu X P, Jia M. Positive solutions to a type of nonlinear three-point boundary value problem with sign changing nonlinearities[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2009, 57(3): 348 - 355.
- [11] Wu Y Y, Zhao Z Q. Positive solutions for third-order boundary value problems with change of signs[J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 218(6): 2744 - 2749.
- [12] Guo Y P, Tian J W. Two positive solutions for second-order quasilinear differential equation boundary value problems with sign changing nonlinearities[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2004, 169(2): 345 - 357.
- [13] Podlubny I. Fractional differential equations, mathematics in science and engineering[M]. New York: Academic Press, 1999.
- [14] 郭大钧, 孙经先, 刘兆理. 非线性常微分方程泛函方法[M]. 2 版. 济南: 山东科学技术出版社, 2006.