

文章编号:1007-6735(2013)01-0021-06

单圈图依次小 Q -特征值排序

周 敏, 何常香

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: n 阶图 G 叫做单圈图, 如果 G 是连通的, 并且 G 的边数也是 n . 图 G 的无符号拉普拉斯矩阵定义为 $Q(G) = D(G) + A(G)$, 其中 $D(G)$ 是以 G 所有顶点的度为对角元的对角阵, $A(G)$ 是图 G 的邻接矩阵. $Q(G)$ 是一个实对称的半正定矩阵, 设它的特征值为 $q_1(G) \geq q_2(G) \geq \cdots \geq q_n(G) \geq 0$. 图 G 的依次小 Q -特征值为 $q_{n-1}(G)$, 简记为 $k(G)$. 主要研究单圈图的 $k(G)$, 记阶数为 n 的所有连通的单圈图的集合为 $U(n)$, 给出了当阶数 $n \geq 25$ 时, $U(n)$ 中依次小 Q -特征值为前 3 大的图.

关键词: Q -特征值; 单圈图; Q -特征多项式

中图分类号: O 157.5

文献标志码: A

Ordering Unicyclic Graphs on the Second Smallest Q -eigenvalue

ZHOU Min, HE Chang-xiang

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: A graph G of order n is called a unicyclic graph if G is connected and the number of edges of G is also n . The signless Laplacian matrix of G is $Q(G) = D(G) + A(G)$, where $D(G)$ is the diagonal matrix of its vertex degrees, $A(G)$ is the adjacency matrix, $q_1(G) \geq q_2(G) \geq \cdots \geq q_n(G) \geq 0$ is the eigenvalues of $Q(G)$ and $q_{n-1}(G)$ is the second smallest eigenvalue and denoted by $k(G)$. Let $U(n)$ be the set of all unicyclic graphs on n vertices. When the order $n \geq 25$, the second smallest Q -eigenvalue of first three largest n -order graphs in the class $U(n)$ ($n \geq 25$) together with the corresponding graphs were obtained.

Key words: Q -eigenvalue; unicyclic graph; Q -characteristic polynomial

设 $G = (V, E)$ 是有 n 个顶点的简单连通图(不含环和多重边). 其中 $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 是点集合, $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ 是边集合. 图 G 的邻接矩阵定义为一个 $n \times n$ 矩阵 $A(G) = (a_{ij})$, 其中当 v_i 和 v_j 相邻时, $a_{ij} = 1$; 当 v_i 和 v_j 不相邻时, $a_{ij} = 0$. 假

如 G 是一个简单图, 则 $A(G)$ 是一个实对称的 $(0, 1)$ -矩阵且它的主对角线上的元素全为 0.

令 $d(v_i)$ 表示顶点 v_i 的度, 图 G 的无符号拉普拉斯矩阵定义为 $Q(G) = D(G) + A(G)$, 其中 $D(G)$ 是以 G 的所有顶点的度为对角元的对角阵.

收稿日期: 2012-06-05

第一作者: 周 敏(1988-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 组合优化. E-mail: zhoumin53770@sina.com

通讯作者: 何常香(1979-), 女, 副教授. 研究方向: 组合优化. E-mail: changxianghe@hotmail.com

近年来,特别是文献[1]发表之后,关于无符号拉普拉斯矩阵的研究日益受到人们的关注.众所周知 $Q(G)$ 是一个实对称的半正定矩阵,设其特征值为 $q_1(G) \geq q_2(G) \geq \cdots \geq q_n(G) \geq 0$ $q_n(G)=0$ 当且仅当 G 有一个连通分支是二部图.对于图的无符号拉普拉斯最大特征值已经有了深入研究^[2-5],而对于图的无符号拉普拉斯最小特征值的研究相对较少,文献[6-8]给出了无符号拉普拉斯最小特征值的一些结论.

为方便起见,记图 G 的依次小 Q -特征值为 $k(G)$.显然,若 G 为二部图,则 $k(G)=\alpha(G)$,其中 $\alpha(G)$ 为 G 的代数连通度.关于最简单的连通图树的代数连通度已经有了很多结果^[9-12].本文主要研究单圈图(边数等于顶点数的连通图)的 $k(G)$.记阶数为 n 的所有连通的单圈图的集合为 $U(n)$.给出了当阶数 $n \geq 25$ 时, $U(n)$ 中依次小 Q -特征值为前3大的图.下面给出一些必要的定义.

定义1 n 阶图 G 叫做单圈图,如果 G 是连通的,并且 G 的边数也是 n .

定义2 设 G 是一个单圈图, v 是 G 圈上的点,如果 $d(v) \geq 3$,则称 v 是 G 的一个分叉点.并记 G 的分叉点个数为 $Fork(G)$.

定义3 设 G 是一个连通图, $uv \in E(G)$,剖分边 uv ,即去掉边 uv ,同时增加一个新点 w 以及两条新边 wu, wv .

对于整数 $n \geq 3, C_n$ 表示有 n 个顶点的圈; P_n 表示有 n 个顶点的路; $U_m(n)$ 表示圈长为 $m \geq 3$ 的 n 阶单圈图的全体所构成的集合; $S(m, n)$ 表示在星图 $K_{1,m}$ 和 $K_{1,n}$ 的中心添加一条边所得的图;

$S^*(m, n)$ 表示由根点长出 m 条长为2的悬挂路, n 条悬挂边所得的有根树.

定义4 设 $U_s(T_1, T_2, \cdots, T_s)$ 表示由圈 $v_1 v_2 \cdots v_s v_1$ 从它上面的点 v_i 分别长出树 $T_i (1 \leq i \leq s)$ (T_i 是以 v_i 为根点的有根树)所得的单圈图.以根点 v_i 为端点的 T_i 最长路的长度称为有根树 T_i 的高.当 T_i 为 $S(m, n) (m \neq 1)$ 且根点为星图 $K_{1,m}$ 的中心时,简记 T_i 为 $S(m, n)$;当 T_i 为 $K_{1,m}$ 且根点为 $K_{1,m}$ 的中心时,简记 T_i 为 m ;若单圈图 $U_s(T_1, T_2, \cdots, T_s)$ 中, $T_{i+1}, \cdots, T_s$ 的高均为0,将其简记为 $U_s(T_1, T_2, \cdots, T_i)$.

定义5 设 $G = G_1 u: v G_2$ 是由两个顶点不相交的连通图 G_1 和 G_2 通过连接 G_1 中的点 u 和 G_2 中的点 v 得到的图,则 G 叫做 G_1, G_2 关于点 u, v 的连通和.

定义6 对任意图 G 和 $v \in V(G)$,用 $Q_v(G)$ 表示由 G 的无符号拉普拉斯矩阵 $Q(G)$ 去掉 v 对应的行和列后得到的主子阵.

对于只有非负根的方程 $P(x)=0$,记 $\tau(P)$ 为它的最小正根.若 M 是实对称阵,它的最小特征值也记为 $\tau(M)$.特别的,记 $Q_v(P_3)$ (其中 v 为 P_3 的一个端点)的特征多项式 x^2-3x+1 为 $a(x)$,易得 $\tau(a) \approx 0.382\ 00$,记为 τ_0 .

表1中列出的是一些在本文证明中用到的 $k(G)$ 小于 τ_0 的单圈图及其 $k(G)$.

引理1^[8] 设 G 是一个 n 阶连通图, $1 \leq k \leq n+1$ 是一个自然数, H 由 G 增加一个点 u ,并将 u 与 G 中 $1 \leq t < k$ 个点相连得到的图,则 $q_k(H) \leq q_{k-t}(G)$.

表1 $k(G) < \tau_0$ 的单圈图及其 $k(G)$
Tab.1 Unicycle graph when $k(G) < \tau_0$ and its $k(G)$

G	$U_3(2,20)$	$U_3(3,7)$	$U_3(4,5)$	$U_3(1,2,12)$	$U_3(2,2,8)$	$U_3(P_3, P_3, 1)$
$k(G)$	0.347 25	0.289 91	0.264 64	0.293 39	0.267 95	0.246 81
G	$U_3(S^*(1,1), P_3)$	$U_3(2, P_3)$	$U_3(P_3, P_4)$	$U_4(2,0,4)$	$U_4(4,4)$	$U_4(1,0,12)$
$k(G)$	0.253 84	0.348 50	0.233 18	0.370 19	0.361 03	0.393 25
G	$U_4(2,8)$	$U_4(1,17,1)$	$U_4(1,1,7)$	$U_4(1,1,1,6)$	$U_4(P_3, P_3)$	$U_4(P_3, 0, P_3)$
$k(G)$	0.380 67	0.379 97	0.380 33	0.379 64	0.290 72	0.267 95
G	$U_4(S(0,2))$	$U_4(2, P_3)$	$U_4(1,0, P_3)$	$U_4(P_4)$	$U_5(1,11)$	$U_5(1,0,5)$
$k(G)$	0.358 81	0.347 88	0.358 81	0.276 52	0.307 03	0.250 57
G	$U_5(2,0,3)$	$U_5(3,4)$	$U_5(S^*(1,1), 1)$	$U_5(1, P_3)$	$U_5(1,0, P_3)$	$U_5(P_3, P_4)$
$k(G)$	0.196 82	0.246 92	0.308 41	0.309 07	0.250 88	0.198 06
G	$U_6(P_3)$	$U_6(6)$	$U_7(P_4)$	$U_7(3)$	$U_7(2,0,2)$	$U_8(2)$
$k(G)$	0.337 60	0.379 88	0.198 06	0.198 06	0.151 36	0.345 68
G	$U_9(1)$	$U_{10}(1)$	C_{11}	C_{12}		
$k(G)$	0.120 62	0.296 80	0.081 01	0.267 95		

引理 2^[13] 设 $A = B + C$, A, B, C 均为 n 阶实对称阵, 若 C 恰有 t 个正特征值, 则有 $\lambda_k(B) \geq \lambda_{k+t}(A)$ (其中 $1 \leq k \leq n - t$).

推论 1 设图 G 是一个连通图, H 由 G 增加一个悬挂点所得的图, 则 $k(H) \leq k(G)$.

证明 设 G 的阶数为 n , 在引理 1 中取 $t = 1$, $k = n$, 则 $q_n(H) \leq q_{n-1}(G)$, 即 $k(H) \leq k(G)$.

推论 2 若 H 是单圈图, G 是 H 的单圈子图, 则 $k(H) \leq k(G)$.

证明 反复利用推论 1 即可得此结论.

引理 3^[14] 设 G 是一个连通图, G' 是由 G 将其一边连续剖分两次得到的图, 则 $k(G') \leq k(G)$.

结合推论 1 和引理 3 可得如下结果:

推论 3 若图 H 去掉某悬挂边后可以得到 G 的某种偶次剖分, 则 $k(H) \leq k(G)$.

引理 4^[15] 设 n 阶图 G 是由图 H 从点 v 长出 t 条新悬挂边得到的图, 则

$$\psi(G) = (x-1)^t \psi(H) - tx(x-1)^{t-1} \psi(Q_v(H))$$

引理 5^[16] 设 A 是一个 n 阶的 Hermitian 矩阵且具有特征值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. 设 B 是 A 的一个 m 阶主子阵, 具有特征值 $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m$, 则 $\lambda_{n-m+i} \leq \mu_i \leq \lambda_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

1 等于 τ_0 的单圈图

记由 n 阶单圈图 $U_3(S^*(s, t)), U_3(1, S^*(s, t)), U_3(1, 1, S^*(s, t)), U_4(S^*(s, t)), U_4(1, S^*(s, t)), U_5(S^*(s, t)), U_5(n-5), U_3(1, 1, n-5)$ ($s \geq 1$) 组成的图类为 $C1$ 类图 (见图 1).

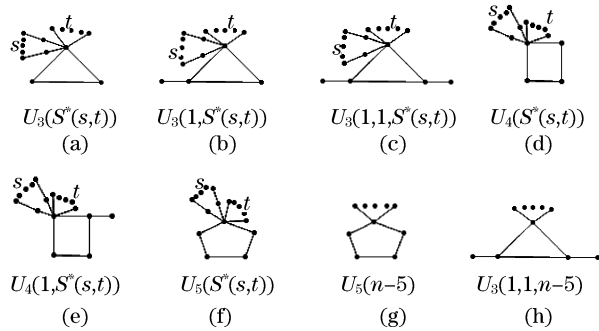


图 1 $C1$ 类

Fig.1 $C1$ class

定理 1 a. 当 $s \geq 2$ 时, $U_3(S^*(s, t)), U_3(1, S^*(s, t)), U_4(S^*(s, t))$ 的依次小 Q -特征值等于 τ_0 .

b. 当 $s \geq 1$ 时, $U_3(1, 1, S^*(s, t)), U_4(1,$

$S^*(s, t)), U_5(S^*(s, t))$ 的依次小 Q -特征值等于 τ_0 .

c. 当 $s \geq 1$ 时, $U_5(n-5)$ 的依次小 Q -特征值等于 τ_0 .

d. 当 $s \geq 5$ 时, $U_3(1, 1, n-5)$ 的依次小 Q -特征值等于 τ_0 .

证明 a. 令 v 是 $U_3(S^*(s, t))$ 唯一的分叉点, 则 $Q_v(U_3(S^*(s, t)))$ 是 s 个 $Q_v(P_3)$, t 个 $Q_v(P_2)$ 和一个 $Q_v(C_3)$ 的直和. 经计算

$$\tau(Q_v(P_3)) = \tau_0$$

$$\tau(Q_v(P_2)) = 1 > \tau_0$$

$$\tau(Q_v(C_3)) = \tau(x^2 - 4x + 3) = 1 > \tau_0$$

故 $\tau_0 = \tau(Q_v(U_3(S^*(s, t))))$ 且重数是 s , 所以由引理 5 知当 $s \geq 2$ 时, $k(U_3(S^*(s, t))) = \tau_0$.

同理可证 $U_3(1, S^*(s, t)), U_4(S^*(s, t))$ 的依次小 Q -特征值等于 τ_0 .

b. 令 v 是 $U_3(1, 1, S^*(s, t))$ 中长出 s 条长为 2 的悬挂路的分叉点, 则 $Q_v(U_3(1, 1, S^*(s, t)))$ 是 s 个 $Q_v(P_3)$, t 个 $Q_v(P_2)$ 和一个 $Q_v(U_3(1, 1))$ 的直和, v 是 P_3 的端点, 同时也是 $U_3(1, 1)$ 中的一个圈上的非分叉点. 经计算

$$\tau(Q_v(U_3(1, 1))) = \tau(x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 14x + 3) =$$

$$\tau((x^2 - 3x + 1)(x^2 - 5x + 3)) \approx 0.38200 = \tau_0$$

$$\tau(Q_v(P_3)) = \tau_0, \tau(Q_v(P_2)) = 1 > \tau_0$$

故 $\tau_0 = \tau(Q_v(U_3(1, 1, S^*(s, t))))$ 且重数是 $s + 1$, 所以由引理 5 知当 $s \geq 1$ 时, $k(U_3(1, 1, S^*(s, t))) = \tau_0$.

同理可证 $U_4(1, S^*(s, t)), U_5(S^*(s, t))$ 的依次小 Q -特征值等于 τ_0 .

c. 当 $s \geq 1$ 时

$$\psi(U_5(n-5), x) = (x-1)^{n-6} (x^2 - 3x + 1).$$

$$[x^4 - (n+3)x^3 + (5n-5)x^2 + (8-5n)x + 4]$$

$$\text{令 } f(x) = x^4 - (n+3)x^3 + (5n-5)x^2 + (8-5n)x + 4 =$$

$$(x^2 - 3x + 1)[x^2 - 3x + 1 + (3-n)x + 2n - 7] +$$

$$(2n-10)x + 10 - 2n$$

$$f(\tau_0) < 0, f(x) \text{ 是 4 次的, 则 } \tau_0 > \tau(f).$$

$f(-\infty) = +\infty, f(1) < 0, f(3) > 0, f(4) < 0, f(+\infty) = +\infty$. 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1), (1, 3), (3, 4), (4, +\infty)$ 上有根. 所以 $f(x)$ 的第二小根是大于 τ_0 的, 从而 τ_0 是 $U_5(n-5)$ 的依次小 Q -特征值.

d. 当 $s \geq 5$ 时

$$\psi(U_3(1, 1, (n-5)), x) = (x-1)^{n-6} (x^2 - 3x + 1) \cdot$$

$$[x^4 - (n+3)x^3 + (5n-7)x^2 - (3n-4)x + 4]$$

令 $f(x) = x^4 - (n+3)x^3 + (5n-7)x^2 - (3n-4)x + 4 =$
 $(x^2 - 3x + 1)[x^2 - 3x + 1 - (n-3)x + 2n - 9] +$
 $(4n-20)x + 12 - 2n$

$f(-\infty) = +\infty, f(\tau_0) < 0, f(1) > 0, f(5) < 0,$
 $f(+\infty) = +\infty$. 所以 $f(x)$ 的第二小值是大于 τ_0
 的, 从而 τ_0 是 $U_3(1, 1, n-5)$ 的依次小 Q -特征值.

2 $k(G)$ 小于 τ_0 的单圈图

记由 n 阶单圈图 $G_1 = U_3(n-3), G_2 = U_4(n-4),$
 $G_3 = U_3(1, n-4), G_4 = U_4(1, n-5), G_5 =$
 $U_3(S^*(1, n-5)), G_6 = U_4(S^*(1, n-6)), G_7 =$
 $U_3(1, S^*(1, n-6))$ 组成的图类为 C_2 类图 (见图
 2).

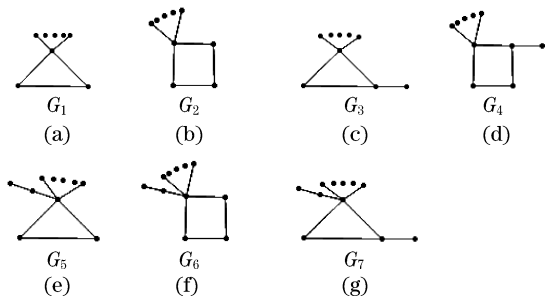


图 2 C_2 类
 Fig. 2 C_2 class

任何一个单圈图 G , 若它含有表 1 中列举的任
 一图的偶次剖分作为单圈子图, 由推论 3 知
 $k(G) < \tau_0$. 所以证明阶数 $n \geq 25$ 的非 C_1, C_2 类单
 圈图必以表 1 列举的某一图或其偶次剖分作为单圈
 子图. 在引理 6~8 中, 将按照单圈图的分叉树的最大
 高度来讨论.

引理 6 设 n 阶单圈图 G 的分叉树均是以中
 心为根的星图 (即分叉树的最大高度为 1), 若 $n \geq$
 25 且 G 不为 C_2 类图, 则 $k(G) < \tau_0$.

证明 证明 G 以表 1 中的某个图 (设为 G_0) 或
 其偶次剖分图为单圈子图, 则 $k(G) \leq k(G_0) < \tau_0$.
 设单圈图的圈长为 l .

情形 1 $l \geq 11$

若 l 为奇数, 则必以 C_{11} 或其偶次剖分为单圈子
 图. 若 l 为偶数, 则必以 C_{12} 或其偶次剖分为单圈
 子图.

情形 2 $l = 10$

由于 $n \geq 25$, G 必以 $U_{10}(1)$ 为单圈子图.

情形 3 $l = 9$

G 必以 $U_9(1)$ 为单圈子图.

情形 4 $l \leq 8$

子情形 a $l = 8$. 由 $n \geq 25$ 知, G 必以 $U_8(2)$ 为
 单圈子图.

子情形 b $l = 7$. 由 $n \geq 25$ 知, G 必以 $U_7(3),$
 $U_7(2, 0, 2)$ 之一为单圈子图.

子情形 c $l = 6$

若 G 中有阶数大于 6 的分叉树, 则 G 必以
 $U_6(6)$ 为单圈子图. 若 G 中分叉树的阶数均小于等
 于 6, 由 $n \geq 25$ 知 G 至少以 $U_4(2, 0, 4), U_4(4, 4)$ 之
 一的偶次剖分为单圈子图. 由于 G 的分叉树均是以
 中心为根的星图, 且 G 不是 $G_1, G_2, U_5(n-5)$, 故
 当圈长 $l \leq 5$ 时, 只需考虑分叉点数 $Fork(G) \geq 2$
 的情形.

子情形 d $l = 5$

若 G 中有阶数大于 10 的分叉树, 则 G 至少以
 $U_5(1, 11), U_5(3, 4), U_5(1, 0, 5)$ 之一为单圈子图.
 若 G 中分叉树的阶数均小于等于 10, 由 $n \geq 25$ 知
 G 至少以 $U_5(3, 4), U_5(2, 0, 3), U_5(1, 0, 5)$ 之一为
 单圈子图.

子情形 e $l = 4$

子情形 (a) $Fork(G) = 2$

首先考虑 G 中有一个 2 阶分叉树的情况. 由于
 G 不是 G_4 , 故 G 的这两个分叉点不相邻, 由 $n \geq 25$
 可知 G 必以 $U_4(1, 0, 12)$ 为单圈子图. 当 G 中分叉
 树的阶数都大于 2 时, 由 $n \geq 25$ 知 G 至少以
 $U_4(2, 8), U_4(2, 0, 4), U_4(4, 4)$ 之一为单圈子图.

子情形 (b) $Fork(G) = 3$

若 G 中恰有一个分叉树阶数大于 2, 由 $n \geq$
 25 可知 G 至少以 $U_4(1, 1, 7), U_4(1, 17, 1)$ 之一
 为单圈子图. 若 G 中有两个分叉树阶数都大于 2,
 G 至少以 $U_4(2, 8), U_4(2, 0, 4), U_4(4, 4)$ 之一为
 单圈子图.

子情形 (c) $Fork(G) = 4$

若 G 中恰有一个阶数大于 2 的分叉树, G 必以
 $U_4(1, 1, 1, 6)$ 为单圈子图. 若 G 中有两个阶数大于
 2 的分叉树, 由 $n \geq 25$ 可知 G 至少以 $U_4(2, 8),$
 $U_4(2, 0, 4), U_4(4, 4)$ 之一为单圈子图.

子情形 f $l = 3$

子情形 (a) $Fork(G) = 2$

由于 G 不是 G_3 , 故 G 中的两个分叉树的阶数
 都大于 2, 由 $n \geq 25$ 可知 G 至少以 $U_3(2, 20),$
 $U_3(3, 7), U_3(4, 5)$ 之一为单圈子图.

子情形 (b) $Fork(G) = 3$

由于 G 不是 $U_3(1, 1, n-5)$, 故 G 中有两个阶

数大于2的分叉树,由 $n \geq 25$ 可知 G 至少以 $U_3(3, 7), U_3(4, 5), U_3(1, 2, 12), U_3(2, 2, 8)$ 之一为单圈子图.

引理 7 设 G 为 $n \geq 19$ 阶单圈图,若 G 的所有分叉树的最大高度为2,且 G 不为 $C1, C2$ 类图,则 $k(G) < \tau_0$.

证明 思路与定理1一样.

情形 1 $l \geq 11$

若 l 为奇数,则必以 C_{11} 或其偶次剖分为单圈子图.若 l 为偶数,则必以 C_{12} 或其偶次剖分为单圈子图.

情形 2 $l = 10$

由于 $n \geq 25, G$ 必以 $U_{10}(1)$ 为单圈子图.

情形 3 $l = 9$

G 必以 $U_9(1)$ 为单圈子图.

情形 4 $l \leq 8$

当 G 中至少有两个分叉树的高为2时, G 至少以 $U_3(P_3, P_3, 1), U_3(P_3, S^*(1, 1)), U_4(P_3, P_3), U_4(P_3, 0, P_3)$ 之一的偶次剖分为单圈子图.

当 G 中只有一个分叉树的高为2时,若此分叉树有顶点(除根点外)度数大于2,由 $n > 17, G$ 必以 $U_3(2, P_3), U_4(S(0, 2))$ 之一的偶次剖分为单圈子图.所以,假设 G 中只有一个分叉树的高度为2,且分叉树上的点(除根点和悬挂点外)均为2度点.设 l 为 G 中圈的长度.

子情形 a $l = 3$

若 $Fork(G) = 2$,即 G 某个 $U_3(r, S^*(s, t))$,由于 G 不是 G_7 ,故 $r > 1$,从而 G 必以 $U_3(2, P_3)$ 为单圈子图.

若 $Fork(G) = 3$,即 G 为某个 $U_3(q, r, S^*(s, t))$,由于 G 不是 $U_3(1, 1, S^*(s, t))$,所以 q, r 中必有一个大于1,进而有 G 以 $U_3(2, P_3)$ 为单圈子图.

子情形 b $l = 4$

$$\psi(G_1, x) = (x-1)^{n-3} [x^3 - (3+n)x^2 + 3nx - 4] \triangleq (x-1)^{n-3} f_1(x)$$

$$\psi(G_2, x) = x(x-1)^{n-5} (x-2) [x^3 - (n+3)x^2 + (4n-2)x - 2n] \triangleq x(x-1)^{n-5} (x-2) f_2(x)$$

$$\psi(G_3, x) = (x-1)^{n-5} [x^5 - (n+5)x^4 + (6n+3)x^3 - (9n-1)x^2 + (3n+8)x - 4] \triangleq (x-1)^{n-5} f_3(x)$$

$$\psi(G_4, x) = x(x-1)^{n-5} [x^4 - (n+5)x^3 + (7n-1)x^2 + (19-13n)x + 4n] \triangleq x(x-1)^{n-5} f_4(x)$$

$$\psi(G_5, x) = (x-1)^{n-5} [x^5 - (n+5)x^4 + (6n+4)x^3 - (10n-2)x^2 + (3n+12)x - 4] \triangleq (x-1)^{n-5} f_5(x)$$

$$\psi(G_6, x) = x(x-1)^{n-7} (x-2) [x^5 - (n+5)x^4 + (7n+1)x^3 + (17-15n)x^2 + (10n-8)x - 2n] \triangleq x(x-1)^{n-7} (x-2) f_6(x)$$

$$\psi(G_7, x) = (x-1)^{n-7} [x^7 - (n+7)x^6 + (9n+10)x^5 - (28n-14)x^4 + (36n-22)x^3 - (18n+18)x^2 + (3n+20)x - 4] \triangleq (x-1)^{n-7} f_7(x)$$

若 $Fork(G) = 2$,若 G 的两个分叉点相邻,由于 G 不是 $U_4(1, S^*(s, t))$, G 必以 $U_4(2, P_3)$ 为单圈子图;若 G 的两个分叉点不相邻, G 必以 $U_4(1, 0, P_3)$ 为单圈子图.若 $Fork(G) > 2$,则 G 也必以 $U_4(1, 0, P_3)$ 为单圈子图.

子情形 c $l = 5$

$Fork(G) \geq 2$,则 G 以 $U_3(2, P_3)$ 的偶次剖分或 $U_5(S^*(1, 1), 1)$ 为单圈子图.

子情形 d $l = 6$

G 至少含 $U_6(P_3)$ 或 $U_4(1, 0, P_3)$ 的偶次剖分为单圈子图.

子情形 e $l = 7$

G 至少含 $U_5(1, P_3)$ 或 $U_5(1, 0, P_3)$ 的偶次剖分之一为单圈子图.

子情形 f $l = 8$

G 必含 $U_6(P_3)$ 的偶次剖分为单圈子图.

引理 8 G 为 n 阶单圈图,若 G 分叉树的最大高度大于2,则 $k(G) < \tau_0$.

证明 此时 G 至少含 $U_4(P_4), U_7(P_4)$ (的偶次剖分)之一为单圈子图.

当 $l = 3$ 时, G 必含 $U_3(P_3, P_4)$ 为单圈子图.

当 $l = 5$ 时, G 必含 $U_5(P_3, P_4)$ 为单圈子图.

由引理6~8可得:

定理 2 当 $n \geq 25$ 时,所有不是 $C1, C2$ 类的 n 阶单圈图的依次小 Q -特征值均小于 τ_0 .

3 $k(G)$ 大于 τ_0 的单圈图

定理 3 当 $n \geq 25$ 时

$k(G_1), k(G_2), k(G_3), k(G_4), k(G_5), k(G_6), k(G_7)$ 都是大于 τ_0 的.

首先由引理4可知 $G_i (i = 1, \dots, 7)$ 的无符号拉普拉斯特征多项式为

证明 首先证明 $k(G_1) > \tau_0$, $f_1(x) = x^3 - (n+3)x^2 + 3nx - 4$, 对 $f_1(x)$ 求导, $f_1'(x) = 3x^2 - 2(n+3)x + 3n$, 当 $x < 1$ 时, $f_1'(x) > 0$, 则 $f_1(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上是单调递增的, 又 $f_1(-\infty) = -\infty$, $f_1(1) = 2n - 6 > 0$, 所以 $f_1(x) = 0$ 在 $(-\infty, 1)$ 恰有一根, 故 $k(G_1) = 1 > \tau_0$.

再证 $k(G_2) > \tau_0$.

$f_2(x) = (x^2 - 3x + 1)(x - n) + (n - 3)x - n$. 当 $x < \tau_0$ 时, $x^2 - 3x + 1 > 0$, $x - n < 0$, $(n - 3)x - n < 0$. 所以 $f_2(x) < 0$, 则 $\tau(f_2) > \tau_0$. 综上 $k(G_2) > \tau_0$. $k(G_4) > \tau_0$, $k(G_6) > \tau_0$ 同理可证.

下证 $k(G_3) > \tau_0$.

经计算 $f_3(x) = f_2(x)(x^2 - 2x - 1) - 6x^2 + (3n + 6)x - 4 - 2n$, $f_3(-\infty) = -\infty$, $f_3(\tau_0) > 0$, $f_3(1) < 0$, $f_3(2) > 0$, $f_3(4) < 0$, $f_3(25) > 0$. 显然 $k(G_3) > \tau_0$.

$k(G_5) > \tau_0$, $k(G_7) > \tau_0$ 同理可证.

4 主要结果

设 $C1, C2$ 类图分别如图 1 和图 2 所示, 由定理 1、定理 2 和定理 3 可得本文的主要结论.

定理 4 如果 G 是一个 $n \geq 25$ 阶单圈图, 则

a. $k(G) = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.382 00$, 当且仅当 G 是 $C1$ 类图.

b. $k(G) > \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.382 00$, 当且仅当 G 是 $C2$ 类图.

c. $k(G) < \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.382 00$ 当且仅当 G 既不是 $C1$ 类, 也不是 $C2$ 类的单圈图.

参考文献:

- [1] Cvetković D M. Signless Laplacian and line graph[M]. Berlin: Mathematiques Naturelles, 2005.
- [2] Wang J F, Huang Q X, Francesco B. On graph whose signless Laplacian index does not exceed 4.5[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2009, 431(1): 162 - 178.
- [3] Kinkar C D. On conjectures involving second largest

signless Laplacian eigenvalue of graphs[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2010, 432(11): 3018 - 3029.

- [4] Wang J F, Francesco B, Huang Qionxiang. On the two largest Q-eigenvalues of graphs[J]. Discrete Mathematics, 2010, 310(21): 2858 - 2866.
- [5] Chen Y Q, Wang L G. Sharp bounds for the largest eigenvalue of the signless Laplacian of a graph[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2010, 433(5): 908 - 913.
- [6] Leonardo S L, Carla S, Nair M A. The smallest eigenvalue of the signless Laplacian[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2011, 436(10): 2570 - 2584.
- [7] Cardoso D M, Cvetkovic D, Rowlinson P. A sharp lower bound for the least eigenvalue of the signless Laplacian of a non-bipartite graph[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2008, 429(12): 2770 - 2780.
- [8] He C X, Zhou M. The least Q-eigenvalue of graph[J]. Journal of East China Normal University, 2012, 163(3): 1 - 5.
- [9] Liu Y. The ordering of limit point of algebraic connectivity of trees[J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University, 2008, 25(1): 103 - 106.
- [10] Gu L, Yuan W G, Zhang X D. Algebraic connectivity of trees with the maximum degree[J]. Journal of East China Normal University, 2011, 163(3): 29 - 34.
- [11] Liu Y, Shao J Y, Yuan X Y. The ordering of trees with perfect matching by the algebraic connectivity[J]. Advanced in Mathematics, 2008, 37(3): 270 - 282.
- [12] Fan Y Z. A new proof of Fiedler's inequality on the Algebraic connectivity of trees[J]. Journal of Mathematical Study, 2003, 36(4): 289 - 383.
- [13] Grone R, Merris R. The Laplacian spectrum of a graph[J]. SIAMJ Matrix Analytics and Apply, 1990, 11(2): 218 - 238.
- [14] He C X, Hao P. The smallest signless Laplacian eigenvalue of graphs under perturbation[J]. ELA, 2012, 310(23): 473 - 482.
- [15] Cvetković D M, Doob M, Sachs H. Spectra of graphs[M]. New York: Academic Press, 1980.
- [16] Cvetković D M, Doob M, Sachs H. Spectra of graphs-theory and application[M]. Heidelberg: Johann Ambrosius Barth Verlag, 1995.