

文章编号:1007-6735(2013)01-0037-04

一类半线性椭圆型方程解的可去奇点问题

张仕玉, 魏公明

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 通过建立不同的实验函数以及所需要的截断函数, 并运用椭圆型方程的正则性理论, 研究了一类半线性椭圆型方程解的可去奇点问题. 得到其半线性椭圆型方程分布意义下的解, 与一个定义在 R^N 中开子集上的局部 Hölder 连续函数几乎处处相等的结论.

关键词: 椭圆型方程; 奇点; 截断函数

中图分类号: O 175.2; N 94 **文献标志码:** A

Removable Singularities of the Solution of A Class of Semilinear Elliptic Equations

ZHANG Shiyu, WEI Gongming

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, shanghai 200093, China)

Abstract: The removable singularities of the solution of a class of semilinear elliptic equations were dealt with. The main result is that the weak solution of the equation coincides with a continuous function of the open subset of R^N almost everywhere.

Key words: elliptic equation; singularity; truncation function

1 问题的提出

早期 Brézis 和 Véron 研究了方程

$$-\Delta u + u^q = 0 \quad (1)$$

在 Ω' 上解的可去奇点问题, 其中 $\Omega' = \Omega - \{0\}$, Ω 是 R^N 中包含 0 的开子集. 当 $q \geq \frac{N}{N-2}$ 时, 文献[1]证明了方程(1)所有解的孤立奇点都是可去的. 后来又有很多学者研究了非线性椭圆型方程解的可去奇点问题^[2-8], 其中 Corina 等^[3]处理了方程

$$\Delta u = h(u), x \in \Omega'$$

在奇点附近解的渐进行为, 进而又解决了方程

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = b(x)h(u)$$
$$x \in \Omega', 1 < p \leq N$$

的孤立奇点问题^[4]. Harman 等^[5]处理了方程

$$-\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} [a_j(x, u, \nabla u)] + g(x, u) = 0$$

的可去奇点问题, 还有相关较新的结论^[6]. 受以上文章的启发, 本文处理了方程

$$-\operatorname{div}(|x|^\beta \nabla u) + h(x)u^q = 0, x \in \Omega' \quad (2)$$

解的可去奇点问题. 其中, $\beta > 0, q \geq \frac{N}{N-2}, N \geq 3$, $h(x)$ 在 Ω' 上连续, 且存在正数 a_0 , 使得 $h(x) \geq a_0$. 为了简明, 取 $\Omega = \{x \in R^N : |x| < 1\}, \Omega' = \Omega - \{0\}$.

主要结果:

收稿日期: 2011-12-22

第一作者: 张仕玉(1987-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 偏微分方程. E-mail: zhangshiyu04@126.com

通讯作者: 魏公明(1974-), 男, 副教授. 研究方向: 偏微分方程. E-mail: gmweixy@163.com

定理 1 假设 $\beta > 0, q \geq \frac{N}{N-2}, N \geq 3, u \in L_{loc}^\infty(\Omega'), \nabla u \in L_{loc}^2(\Omega')$, 且有 $\operatorname{div}(|x|^\beta \nabla u) \in L_{loc}^1(\Omega')$. 若 u 是方程(2)的一个分布意义下的解, 则存在一个定义在 Ω 上局部 Hölder 连续的函数 u' , 使得 u 与 u' 在 Ω' 上几乎处处相等, 且 $-\operatorname{div}(|x|^\beta \nabla u) + h(x)u^q = 0, x \in \Omega$ 成立.

1 重要命题和引理

命题 1 假设 $\beta > 0, q \geq \frac{N}{N-2}, u$ 条件同定理 1, 若 u 满足

$$-\operatorname{div}(|x|^\beta \nabla u) + au^q \leq C \quad (3)$$

在 $\{x \in \Omega: u(x) \geq 0\}$ 上几乎处处成立, 这里 a 与 C 为正常数, 则有 $u^+ \in L_{loc}^\infty(\Omega)$.

引理 1 在命题 1 假设条件下, 存在一个常数 A (A 依赖于 N, q, a 和 C), 使得

$$u(x) \leq \frac{A}{|x|^{\frac{2}{q-1}}}$$

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= -\operatorname{div}(|x|^\beta \nabla v) = -\left\{ \beta x_1 |x|^{\beta-2} v' \frac{x_1 - x_{0_1}}{r} + |x|^\beta \left[v'' \frac{(x_1 - x_{0_1})^2}{r^2} + v' \frac{r^2 - (x_1 - x_{0_1})^2}{r^3} \right] + \right. \\ &\quad \left. \cdots + \beta x_N |x|^{\beta-2} v' \frac{x_N - x_{0_N}}{r} + |x|^\beta \left[v'' \frac{(x_N - x_{0_N})^2}{r^2} + v' \frac{r^2 - (x_N - x_{0_N})^2}{r^3} \right] \right\} = \\ &= -\left\{ \beta |x|^{\beta-2} v' \left[\frac{x_1(x_1 - x_{0_1})}{r} + \frac{x_2(x_2 - x_{0_2})}{r} + \cdots + \frac{x_N(x_N - x_{0_N})}{r} \right] + |x|^\beta \left(v'' + v' \frac{N-1}{r} \right) \right\} = \\ &= -\left[\frac{1}{2} \beta |x|^{\beta-2} v' \left(r + \frac{|x|^2}{r} - \frac{N|x_0|^2}{r} \right) + |x|^\beta \left(v'' + v' \frac{N-1}{r} \right) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

将 $v'(r)$ 和 $v''(r)$ 代入式(4), 得

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= -\frac{4\lambda}{q-1} (R^2 - r^2)^{-\frac{2}{q-1}-2} \cdot \\ &\quad \left[\frac{1}{2} \beta |x|^{\beta-2} (R^2 - r^2) (r^2 + |x|^2 - N|x_0|^2) + \right. \\ &\quad \left. |x|^\beta \left(\frac{2r^2(q+1)}{q-1} + N(R^2 - r^2) \right) \right] \geq \\ &= -C_1 \lambda (R^2 - r^2)^{-\frac{2}{q-1}-2} R^2 \end{aligned} \quad (6)$$

这里, $C_1 = C_1(N, q, \beta)$ (因 $r^2 + |x|^2 - N|x_0|^2 < 0$, 故式(6)必然成立). 故有

$$v^q \geq \lambda^q (R^2 - r^2)^{-\frac{2q}{q-1}} + \mu^q$$

若选择

$$\lambda = \left(\frac{C_1}{a} \right)^{\frac{1}{q-1}} R^{\frac{2}{q-1}}, \mu \geq \left(\frac{C}{a} \right)^{\frac{1}{q}}$$

则

$$-\operatorname{div}(|x|^\beta \nabla v) + av^q \geq -C_1 \left(\frac{C_1}{a} \right)^{\frac{1}{q-1}} R^{\frac{2}{q-1}}.$$

在 $\{x: 0 < |x| < \frac{1}{2}\}$ 上几乎处处成立.

证明 设 $x_0 \in \Omega'$, 且 $|x_0| < \frac{1}{2}$, 令 $G = \{x \in \Omega': |x - x_0| < \frac{1}{2}|x_0|\}$. 在 G 上定义函数

$$v(x) = \lambda \left(\frac{1}{4} |x_0|^2 - |x - x_0|^2 \right)^{-\frac{2}{q-1}} + \mu$$

其中, λ, μ 均为常数, 且决定式为

$$-\operatorname{div}(|x|^\beta \nabla v) + av^q \geq C, x \in G \quad (4)$$

令, $R^2 = \frac{1}{4}|x_0|^2, r^2 = |x - x_0|^2$, 则

$$v(r) = \lambda (R^2 - r^2)^{-\frac{2}{q-1}} + \mu$$

$$v'(r) = \frac{4\lambda r}{q-1} (R^2 - r^2)^{-\frac{2}{q-1}-1}$$

$$v''(r) = \frac{4\lambda}{q-1} \left(\frac{2r^2(q+1)}{q-1} - r^2 + R^2 \right) (R^2 - r^2)^{-\frac{2}{q-1}-2}$$

令, $\Phi(x) = -\operatorname{div}(|x|^\beta \nabla v)$, 由于

$$r = |x - x_0| =$$

$$\sqrt{(x_1 - x_{0_1})^2 + (x_2 - x_{0_2})^2 + \cdots + (x_N - x_{0_N})^2}$$

故

$$\begin{aligned} &R^2 (R^2 - r^2)^{-\frac{2q}{q-1}} + a \left[\left(\frac{C_1}{a} \right)^{\frac{1}{q-1}} R^{\frac{2}{q-1}} \right]^q (R^2 - r^2)^{-\frac{2q}{q-1}} + \\ &a \left[\left(\frac{C}{a} \right)^{\frac{1}{q}} \right]^q = -C_1 \left(\frac{C_1}{a} \right)^{\frac{1}{q-1}} R^{\frac{2}{q-1}+2} (R^2 - r^2)^{-\frac{2q}{q-1}} + \\ &a \left(\frac{C_1}{a} \right)^{\frac{q}{q-1}} R^{\frac{2q}{q-1}} (R^2 - r^2)^{-\frac{2q}{q-1}} + C = (R^2 - r^2)^{-\frac{2q}{q-1}} \cdot \\ &\left(\frac{C_1}{a} \right)^{\frac{q}{q-1}} R^{\frac{2q}{q-1}} \left(a - C_1 \left(\frac{C_1}{a} \right)^{-1} \right) + C = C \end{aligned}$$

则有式(3)成立. 选择 $\phi_n \in D^+(G)$, 使得

$$\phi_n \equiv 1, \text{ 在 } \{x: |x - x_0| < (\frac{1}{2} - \frac{1}{n})R\} \text{ 上}$$

令 K 是一个属于 C^1 的有界函数, 且在 $(-\infty, 0)$ 上等于 0, 在 $(0, +\infty)$ 上严格递增, 则

$$\begin{aligned} &\int -\operatorname{div}(|x|^\beta \nabla u - |x|^\beta \nabla v) K(u-v) \varphi_n dx = \\ &\int (|x|^\beta \nabla u - |x|^\beta \nabla v) \nabla (u-v) K'(u-v) \varphi_n dx + \\ &\int (|x|^\beta \nabla u - |x|^\beta \nabla v) \nabla \varphi_n K(u-v) dx \end{aligned}$$

由于 $u \in L^\infty_{loc}(G)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \partial G} v(x) = +\infty$, 可推出

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int -\operatorname{div}(|x|^\beta \nabla u - |x|^\beta \nabla v) K(u-v) \varphi_n dx \geq 0$$

另一方面, 由式(3)和式(4), 可得

$$\int -\operatorname{div}(|x|^\beta \nabla u - |x|^\beta \nabla v) K(u-v) \phi_n dx + \int a(u^q - v^q) K(u-v) \phi_n dx \leq 0$$

$$\text{故, } \int a(u^q - v^q) K(u-v) \varphi_n dx \leq 0$$

所以, 在 G 上有, $u \leq v$. 且当 $x = x_0$ 时, 有

$$u(x_0) \leq v(x_0) = \left(\frac{C_1}{a}\right)^{\frac{1}{q-1}} R^{-\frac{2}{q-1}} + \mu$$

故存在正常数, 有

$$u(x) \leq \frac{A}{|x|^{\frac{2}{q-1}}}$$

引理 2 在命题 1 的假设条件下, 令 $(u - \mu)^+ = \max(u - \mu, 0)$, 则对于每一个 $\eta \in D^+(\Omega')$ 和 $\mu \geq (\frac{C}{a})^{\frac{1}{q}}$, 有

$$\| |x|^\beta \nabla(u - \mu)^+ \eta \|_{L^2(\Omega)} \leq 2 \| (u - \mu)^+ \nabla \eta \|_{L^2(\Omega)}$$

证明 令 K 是一个属于 C^1 的有界函数, 且在 $(-\infty, 0)$ 上等于 0, 在 $(0, +\infty)$ 上严格递增, $\eta \in D^+(\Omega')$, $\mu \geq (\frac{C}{a})^{\frac{1}{q}}$, 可得

$$-\operatorname{div}(|x|^\beta \nabla u) \eta^2 K(u - \mu) + (au^q - C) \eta^2 K(u - \mu) \leq 0$$

又因为 $(au^q - C) K(u - \mu) \geq 0$, 故

$$\int |x|^\beta |\nabla(u - \mu)|^2 \eta^2 K'(u - \mu) dx + 2 \int \eta K(u - \mu) |x|^\beta \nabla \eta \nabla(u - \mu) dx \leq 0$$

若 $K(u - \mu) \rightarrow (u - \mu)^+$, 则有

$$\int |x|^\beta |\nabla(u - \mu)^+|^2 \eta^2 dx + 2 \int \eta(u - \mu)^+ |x|^\beta \nabla \eta \nabla(u - \mu)^+ dx \leq 0$$

由于 $\beta > 0$, 故当 $x \in \Omega$ 时, $|x|^{2\beta} \leq |x|^\beta$, 故

$$\int |x|^{2\beta} |\nabla(u - \mu)^+|^2 \eta^2 dx \leq -2 \int \eta(u - \mu)^+ |x|^\beta \nabla \eta \nabla(u - \mu)^+ dx \leq 2 \left| \int \eta(u - \mu)^+ |x|^\beta \nabla \eta \nabla(u - \mu)^+ dx \right|$$

又由 Hölder 不等式, 可知

$$2 \int |x|^\beta \eta(u - \mu)^+ \nabla \eta \nabla(u - \mu)^+ dx \leq 2 \left(\int |\eta \nabla(u - \mu)^+|^2 |x|^\beta dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int |(u - \mu)^+ \nabla \eta|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{故 } \left(\int |x|^{2\beta} |\nabla(u - \mu)^+|^2 \eta^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2 \left(\int |(u - \mu)^+ \nabla \eta|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

即证.

下面证明命题 1.

令 $\zeta_n \in D^+(\Omega')$, 使得

$$\zeta_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } |x| < \frac{1}{2n}, |x| > \frac{2}{3} \\ 1, & \text{若 } \frac{1}{n} < |x| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$0 \leq \zeta_n(x) \leq 1, \text{ 且 } |\nabla \zeta_n| \leq cn$$

令 K 是一个属于 C^1 的有界函数, 且在 $(-\infty, 0)$ 上等于 0, 在 $(0, +\infty)$ 上严格递增, 且

$$\mu \geq \max \left\{ \left(\frac{C}{a}\right)^{1/q} + \sup_{1/2 \leq |x| \leq 2/3} u(x) \right\}$$

$$\text{令 } \Delta = \left\{ x : |x| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

$$\Delta_n = \left\{ x : \frac{1}{2n} < |x| < \frac{1}{n} \right\}$$

$$X_n = - \int_{\Delta} |x|^\beta \nabla u K(u - \mu) \nabla \zeta_n dx$$

$$\text{再由 } -\operatorname{div}(|x|^\beta \nabla u) K(u - \mu) \zeta_n + (au^q - C) K(u - \mu) \zeta_n \leq 0$$

$$\text{可得 } 0 \leq \int (au^q - C) K(u - \mu) \zeta_n dx \leq X_n$$

由 $K(u - \mu) \nabla \zeta_n$ 在 $\Delta - \Delta_n$ 内为 0 以及 Hölder 不等式, 可知

$$|X_n| = \left| \int_{\Delta} |x|^\beta \nabla u K(u - \mu) \nabla \zeta_n dx \right| \leq$$

$$C_1 \|K\|_{L^\infty} n^{1-\frac{N}{2}} \| |x|^\beta \nabla(u - \mu)^+ \|_{L^2(\Delta_n)}$$

再由引理 2, 可得

$$\| |x|^\beta \nabla(u - \mu)^+ \zeta_{2n} \|_{L^2(\Delta_n)} \leq 2 \| (u - \mu)^+ \nabla \zeta_{2n} \|_{L^2(\Delta)}$$

由 ζ_n 的表达式知, 在 $\Delta_n = \left\{ x : \frac{1}{2n} < |x| < \frac{1}{n} \right\}$ 中,

$\zeta_{2n} = 1$, 且当 $|x| < \frac{1}{4n}$ 时, $\zeta_{2n} = 0$. 当 $\frac{1}{2n} < |x| < \frac{1}{2}$

时, $\nabla \zeta_{2n} = 0$. 也即

$$\| |x|^\beta \nabla(u - \mu)^+ \|_{L^2(\Delta_n)} \leq 2 \| (u - \mu)^+ \nabla \zeta_{2n} \|_{L^2(\Delta_{2n})}$$

$$\text{故 } |X_n| \leq cn^{\frac{4-N}{2}} \| (u - \mu)^+ \|_{L^2(\Delta_{2n})}$$

再由引理 1, 推出

$$\| (u - \mu)^+ \|_{L^2(\Delta_{2n})} \leq cn^{\frac{2}{q-1} - \frac{N}{2}}$$

(以上的 c 在各处可为不同的常数)

由于 $q \geq \frac{N}{N-2}$, 推得, $N \geq \frac{2q}{q-1}$, 故有

$$\frac{4-N}{2} + \frac{2}{q-1} - \frac{N}{2} = \frac{2q}{q-1} - N \leq 0$$

从而有 $\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n| = 0$, 故总有

$$\int_{\Delta} (au^q - C)K(u - \mu)dx = 0$$

又由 K 的严格递增性, 故有 $K(u - \mu) = 0$, 故对于 $|x| \leq \frac{1}{2}$, 有 $u \leq \mu$. 即完成证明.

3 定理 1 的证明

证明 因为 $h(x)$ 是连续函数, 且存在正数 a_0 , 使得 $h(x) \geq a_0$, 又 $u \geq 0$, 故存在常数 a 和 C 使得 $h(x)u^q \geq au^q - C$ 成立. 故有

$$-\operatorname{div}(|x|^\beta \nabla u) + au^q \leq C$$

在 $\{x \in \Omega; u(x) \geq 0\}$ 上成立.

由命题 1, 知 $u^+ \in L_{loc}^\infty(\Omega)$, 同理可证得 $u^- \in L_{loc}^\infty(\Omega)$, 所以, u 与 $h(x)u^q \in L_{loc}^\infty(\Omega)$. 令 $\eta \in D^+(\Omega)$, ζ_n 是 C^∞ 上的一系列函数, 使得

$$\zeta_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } |x| < \frac{1}{2n} \\ 1, & \text{若 } |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

$0 \leq \zeta_n(x) \leq 1$, 且 $|\nabla \zeta_n| \leq cn$, 将

$$-\operatorname{div}(|x|^\beta \nabla u) + h(x)u^q = 0 \quad (7)$$

的两边同时乘以 $u\zeta_n^2\eta^2$, 再积分, 可得

$$\int |x|^\beta \zeta_n^2 \eta^2 |\nabla u|^2 dx + 2 \int |x|^\beta u \zeta_n \eta \nabla u \nabla (\zeta_n \eta) dx + \int h(x) u^q \zeta_n^2 \eta^2 dx = 0$$

由引理 2, 可得

$$\int |x|^{2\beta} \zeta_n^2 \eta^2 |\nabla u|^2 dx - 2 \left(\int |x|^{2\beta} \zeta_n^2 \eta^2 |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\left(\int |u \nabla (\zeta_n \eta)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \int h(x) u^q \zeta_n^2 \eta^2 dx \leq 0, \text{ 又}$$

$u \nabla (\zeta_n \eta) = u \zeta_n \nabla \eta + u \eta \nabla \zeta_n$, $u \in L_{loc}^\infty(\Omega)$, 且 $\nabla \zeta_n$ 在 Δ_n 外等于 0, 则有

$$\|u \eta \nabla \zeta_n\|_{L^2} \leq C \|u \eta\|_{L^\infty} n^{1-\frac{N}{2}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

故 $\left(\int |u \nabla (\zeta_n \eta)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ 仍有界. 同样, $\int h(x) \cdot u^q \zeta_n^2 \eta^2 dx$ 也有界, 所以 $|x|^\beta \nabla u \in L_{loc}^2(\Omega)$. 令 $\eta, \zeta_n(x)$ 同上. 将式(7)的两边同时乘以 $\zeta_n \eta$, 再积分, 可得

$$\int \zeta_n |x|^\beta \nabla u \nabla \eta dx + \int \eta |x|^\beta \nabla u \nabla \zeta_n +$$

$$\int h(x) u^q \zeta_n \eta = 0$$

再由 Hölder 不等式, 可得

$$\left| \int \eta |x|^\beta \nabla u \nabla \zeta_n \right| \leq$$

$$C_1 \| \eta |x|^\beta \nabla u \|_{L^2} n^{1-\frac{N}{2}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

由 Lebesgue 控制收敛定理, 可得

$$-\operatorname{div}(|x|^\beta \nabla u) + h(x)u^q = 0, x \in \Omega$$

综上, 根据拟线性椭圆型方程的正则性理论^[9], 可知存在一个定义在 Ω 上局部 Hölder 连续的函数 u' , 使得 u 与 u' 在 Ω' 上几乎处处相等, 即完成证明.

参考文献:

- [1] Brézis H, Véron L. Removable singularities of some nonlinear elliptic equations[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1980(75): 1-6.
- [2] Vázquez J L, Véron L. Removable singularities of some strongly nonlinear elliptic equations [J]. Manuscripta Math, 1980(33): 129-144.
- [3] Cîrstea F C, Du Y H. Asymptotic behavior of solutions of semilinear elliptic equations near an isolated singularity[J]. Journal of Functional Analysis, 2007(250): 317-346.
- [4] Cîrstea F C, Du Y H. Isolated singularities for weighted qua-silinear elliptic equations[J]. Journal of Functional Analysis, 2010(259): 174-202.
- [5] Mamedov F I, Harman A. On the removability of isolated singular points for degenerating nonlinear elliptic equations[J]. Nonlinear Analysis, 2009(71): 6290-6298.
- [6] Bidaut M F, Ponce A C, Véron L. Isolated boundary singularities of semilinear elliptic equations [J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2011(40): 183-221.
- [7] Brézis H, Nirenberg L. Removable singularities for nonlinear elliptic equations[J]. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 1997(9): 201-219.
- [8] Del P M, Musso M, Pacard F. Boundary singularities for weak solutions of semilinear elliptic problems[J]. Journal of Functional Analysis, 2007(253): 241-272.
- [9] Serrin J. Local behaviour of solutions of quasilinear equations[J]. Acta Mathematica, 1964(111): 247-302.