

文章编号:1007-6735(2013)01-0041-03

关于 n 部图的无向不同构图计算

廉晓龙¹, 魏连鑫², 张 军³, 冯恩民⁴

(1. 延边大学 师范分院, 延吉 133000; 2. 上海理工大学 理学院, 上海 200093;
3. 延边大学 理学院, 延吉 133002; 4. 大连理工大学 数学科学学院, 大连 116024)

摘要: 通过建立一个新的向量映射关系, 并在该向量映射关系下应用图论、有限群对集合的作用、轨道及等价关系等对三部图中无向不同构图的计算结果进行推广, 研究了 n 部图的无向不同构图的计算问题, 并给出了计算公式.

关键词: n 部图; 不动点; 不同构; 有限群; 轨道
中图分类号: O 157.5 **文献标志码:** A

Computation of Non-isomorphic Graphs with No Direction in n -partite Graphs

LIAN Xiaolong¹, WEI Lianxin², ZHANG Jun³, FENG Enmin⁴

(1. Branch Normal College, Yanbian University, Yanji 133000, China; 2. College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China; 3. College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China; 4. College of Mathematical Science, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: A new vector mapping method was constructed. By using the new vector mapping, combining with the applications of graph theory, finite group acting on sets, orbit and equivalent relation, the result of the calculation of non-isomorphic graphs with no direction in tri-partite graphs was popularized. The computation of non-isomorphic graphs with no direction in the n -partite graphs was studied and the corresponding computation formula was given out.

Key words: n -partite graphs; fixed point; non-isomorphism; finite group; orbit

图的计数问题是图论中一个比较基本的问题, 也是一个 NP 困难问题(非确定性多项式问题). 文献[1-2]研究了二部图中无向不同构图的计算问题, 文献[3-6]研究了一些特殊类型的三部图中无向不同构图的计算问题, 文献[7]解决了一般三部图中无向不同构图的计算问题. 本文通过建立一个特殊的向量映射关系, 再应用图论、有限群对集合的作用、轨道及

等价关系等将无向不同构图的计算推广到了 n 部图, 给出了 n 部图中无向不同构图的个数的计算公式.

1 向量映射与 n 部图的关系

设有 n 个集合, 分别记为 $V_i = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots,$

收稿日期: 2011-03-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19871009)

第一作者: 廉晓龙(1975-), 男, 副教授. 研究方向: 图论及布局优化. E-mail: lx1751124@163.com

通讯作者: 张 军(1957-), 男, 教授. 研究方向: 布局优化问题. E-mail: zhangjun@ybu.edu.com

$a_{i_{m_i}}\}, i=1,2,\dots,n$. 现在 V_i 与 $V_j (1 \leq i < j \leq n)$ 的元素之间建立关系, 构成由 n 个集合的元素为顶点的 n 部图. 对任意的正整数 p , 定义指标集 $\langle p \rangle := \{1, 2, 3, \dots, p\}$. 令

$$V = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n = \{(a_{1_{k_1}}, a_{2_{k_2}}, \dots, a_{n_{k_n}}) \mid a_{i_{k_i}} \in V_i, k_i \in \langle m_i \rangle, i \in \langle n \rangle\},$$

$$A = \{(t_{12}, t_{13}, \dots, t_{1n}, t_{23}, \dots, t_{(n-1)n}) \mid t_{ij} \in \{0, 1\}, 1 \leq i < j \leq n\}$$

定义 1 设 $g = (g_{12}, g_{13}, \dots, g_{1n}, g_{23}, \dots, g_{(n-1)n})$, 其中 g_{ij} 为 $V_i \times V_j (1 \leq i < j \leq n)$ 到 $\{0, 1\}$ 的映射, 即对 $\forall a_{i_{k_i}} \in V_i, \forall a_{j_{k_j}} \in V_j, g_{ij}(a_{i_{k_i}}, a_{j_{k_j}}) = t_{ij}, t_{ij} \in \{0, 1\}, 1 \leq i < j \leq n$.

对 $\forall \alpha = (a_{1_{k_1}}, a_{2_{k_2}}, \dots, a_{n_{k_n}}) \in V$, 规定 $g(\alpha) = (g_{12}(\alpha), g_{13}(\alpha), \dots, g_{1n}(\alpha), g_{23}(\alpha), \dots, g_{(n-1)n}(\alpha)) := (g_{12}(a_{1_{k_1}}, a_{2_{k_2}}), g_{13}(a_{1_{k_1}}, a_{3_{k_3}}), \dots, g_{1n}(a_{1_{k_1}}, a_{n_{k_n}}), g_{23}(a_{2_{k_2}}, a_{3_{k_3}}), \dots, g_{(n-1)n}(a_{(n-1)_{k_{n-1}}}, a_{n_{k_n}})) = (t_{12}, t_{13}, \dots, t_{1n}, t_{23}, \dots, t_{(n-1)n}) \in A$

得 V 到 A 的一个映射 g , 称 $g = (g_{12}, g_{13}, \dots, g_{1n}, g_{23}, \dots, g_{(n-1)n})$ 为向量映射.

令 V 到 A 的向量映射集合为 $M = \{g : V \rightarrow A\} = A^V$.

定义 2 设 $V = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$, 对 $\forall g \in M$, 称集合

$$E_g = \{\alpha_T \mid \alpha = (a_{1_{k_1}}, a_{2_{k_2}}, \dots, a_{n_{k_n}}) \in V, g(\alpha) = T \in A\}$$

为广义边集. 其中, T 表示分量都是 0 或 1 的 $n(n-1)/2$ 维的向量, 即 $T = (t_{12}, t_{13}, \dots, t_{1n}, t_{23}, \dots, t_{(n-1)n}), t_{ij} \in \{0, 1\}, 1 \leq i < j \leq n; \alpha_T$ 表示在 α 的第 i 个分量 $a_{i_{k_i}}$ 和第 j 个分量 $a_{j_{k_j}}$ 间建有 $t_{ij} (1 \leq i < j \leq n)$ 条边. 当 $t_{ij} = 0$ 时, 两元素之间无边; 当 $t_{ij} = 1$ 时, 两元素之间有边. 称 (V, E_g) 为以 V 为顶点集, 以 E_g 为边集的 n 部图, 记为 G_g .

令 n 部图 G_g 的集合为 $X = \{G_g \mid g \in M\}$, 由于 $|V_i| = m_i, i \in \langle n \rangle, |A| = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$, 所以 $|X| = |M| = |A|^{|V|} = |A|^{|V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n|} = |A|^{|V_1| + |V_2| + \dots + |V_n|} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n m_i$

定义 3 设 $G_{g_1} = (V, E_{g_1}), G_{g_2} = (V, E_{g_2}) \in X$. 若存在双射 $\sigma : V \rightarrow V$ 满足 $g_1(a_{1_{k_1}}, a_{2_{k_2}}, \dots, a_{n_{k_n}}) = g_2(\sigma(a_{1_{k_1}}), \sigma(a_{2_{k_2}}), \dots, \sigma(a_{n_{k_n}})) = (t_{12}, t_{13}, \dots, t_{1n}, t_{23}, \dots, t_{(n-1)n}) \in A$, 则称 G_{g_1} 与 G_{g_2} 为同构的 n 部图, 记为 $G_{g_1} \cong G_{g_2}$.

定义 4 设 $G_g \in X$, 称集合 $Q(G_g) := \{G_g \in X \mid G_g \cong G_g\}$ 为 n 部图 G_g 的等价类; 集合中的任意

元素 (n 部图) 称为 $Q(G_g)$ 的代表元, 且记 n 部图的等价类的集合为 $Q_e = \{Q(G_g) \mid G_g \in X\}$.

2 Burnside 引理的应用

设有限群 $S = S_{m_1} \times S_{m_2} \times \dots \times S_{m_n}$, 其中, $S_{m_i} (i \in \langle n \rangle)$ 皆为对称群.

$\forall \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in S_{m_1} \times S_{m_2} \times \dots \times S_{m_n}$, 其中 $\sigma_i \in S_{m_i}, i \in \langle n \rangle, G_g = (V, E_g) \in X$, 定义 σ 对 G_g 的作用: $\sigma(G_g) = (V, \sigma(E_g))$, 其中, $\sigma(E_g) = \{(\sigma(\alpha))_T \mid \alpha \in V, \alpha_T \in E_g\}, \sigma(\alpha) = (\sigma(a_{1_{k_1}}, a_{2_{k_2}}, \dots, a_{n_{k_n}})) = (\sigma_1(a_{1_{k_1}}), \sigma_2(a_{2_{k_2}}), \dots, \sigma_n(a_{n_{k_n}})), (\sigma(\alpha))_T$ 表示在 $\sigma(\alpha)$ 的第 i 个分量 $\sigma_i(a_{i_{k_i}})$ 和第 j 个分量 $\sigma_j(a_{j_{k_j}})$ 之间建有 $t_{ij} \in \{0, 1\} (1 \leq i < j \leq n)$ 条边. 当 $t_{ij} = 0$ 时, 两元素之间无边; 当 $t_{ij} = 1$ 时, 两元素之间有边. 因此, 有限群 $S_{m_1} \times S_{m_2} \times \dots \times S_{m_n}$ 作用 n 部图 $G_g \in X$ 的轨道为

$$X_{G_g} = \{\sigma(G_g) \mid \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in S_{m_1} \times S_{m_2} \times \dots \times S_{m_n}\} \subset X$$

由于 $\sigma \in S_{m_1} \times S_{m_2} \times \dots \times S_{m_n}$ 是 V 上的双射, 根据定义 3 可知, 轨道 X_{G_g} 中的所有元素是彼此同构的, 因此, 有 $Q(G_g) = X_{G_g}$, 所以, $|Q_e|$ 就是 $S = S_{m_1} \times S_{m_2} \times \dots \times S_{m_n}$ 作用于 X 的轨道数, 即所要求的不同构 n 部图的数目. 使用 Burnside 引理可得^[8]

$$N = \frac{1}{|S_{m_1} \times S_{m_2} \times \dots \times S_{m_n}|} \cdot \sum_{\sigma \in S_{m_1} \times S_{m_2} \times \dots \times S_{m_n}} |\text{Fix}(\sigma)| \quad (1)$$

其中, $|S_{m_1} \times S_{m_2} \times \dots \times S_{m_n}| = m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_n!$, $\text{Fix}(\sigma)$ 为 $\sigma \in S_{m_1} \times S_{m_2} \times \dots \times S_{m_n}$ 在 X 上的不动点集, 即

$$\text{Fix}(\sigma) = \{G_g \mid \sigma(G_g) = G_g, G_g \in X\}$$

3 结论与计算

由对称群 $S_{m_i}, i \in \langle n \rangle$ 的元素性质可知, 当 $\sigma_i \in S_{m_i}$ 时, $\exists \lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{im_i} \in \{0, 1, 2, \dots, m_i\}$, 使 σ_i 为 S_{m_i} 的 $1^{\lambda_{i1}} 2^{\lambda_{i2}} \dots m_i^{\lambda_{im_i}}$ 型置换, 其中, $\sum_{k=1}^{m_i} k \lambda_{ik} = m_i, i \in \langle n \rangle$.

定义 5 设 $S_{m_i}, i \in \langle n \rangle$ 皆为对称群, $\sigma_i \in S_{m_i}$ 为 $1^{\lambda_{i1}} 2^{\lambda_{i2}} \dots m_i^{\lambda_{im_i}}$ 型置换, 令 $S = S_{m_1} \times S_{m_2} \times \dots \times S_{m_n}, \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, 有 $\sigma \in S$, 称 σ 为 S 的 $(1^{\lambda_{11}} 2^{\lambda_{12}} \dots m_1^{\lambda_{1m_1}}, 1^{\lambda_{21}} 2^{\lambda_{22}} \dots m_2^{\lambda_{2m_2}}, \dots, 1^{\lambda_{n1}} 2^{\lambda_{n2}} \dots m_n^{\lambda_{nm_n}})$ 型元素.

定理 设 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ 为 $S = S_{m_1} \times$

$S_{m_2} \times \cdots \times S_{m_n}$ 的 $(1^{\lambda_{11}} 2^{\lambda_{12}} \cdots m_1^{\lambda_{1m_1}}, 1^{\lambda_{21}} 2^{\lambda_{22}} \cdots m_2^{\lambda_{2m_2}}, \dots, 1^{\lambda_{n1}} 2^{\lambda_{n2}} \cdots m_n^{\lambda_{nm_n}})$ 型元素, 则 σ 在 n 部图集 X 上的不动点数为

$$|\text{Fix}(\sigma)| = 2_{1 \leq i < j \leq n} \sum_{k_i=1}^{m_i} \sum_{l_j=1}^{m_j} \lambda_{ik_i} \lambda_{jl_j}^{(k_i, l_j)} \quad (2)$$

其中, $(*, *)$ 表示两个数的最大公因数.

证明 应用文献[2]中的定理, 设 σ 的限制 (σ_i, σ_j) 为 $S_{m_i} \times S_{m_j}$ 的 $(1^{\lambda_{i1}} 2^{\lambda_{i2}} \cdots m_i^{\lambda_{im_i}}, 1^{\lambda_{j1}} 2^{\lambda_{j2}} \cdots m_j^{\lambda_{jm_j}})$ 型元素, 其中, $1 \leq i < j \leq n$, 且有 (σ_i, σ_j) 在

X 上的不动点数为

$$|\text{Fix}(\sigma_i, \sigma_j)| = 2_{k_i=1}^{m_i} \sum_{l_j=1}^{m_j} \lambda_{ik_i} \lambda_{jl_j}^{(k_i, l_j)}, 1 \leq i < j \leq n$$

从而 σ 在 X 上的不动点数为

$$|\text{Fix}(\sigma)| = 2_{1 \leq i < j \leq n} \sum_{k_i=1}^{m_i} \sum_{l_j=1}^{m_j} \lambda_{ik_i} \lambda_{jl_j}^{(k_i, l_j)}$$

证毕.

由式(1)和式(2)可得有限群 $S = S_{m_1} \times S_{m_2} \times \cdots \times S_{m_n}$ 作用于 n 部图集 X 上的不同轨道数

$$N = \sum_{(1^{\lambda_{11}} 2^{\lambda_{12}} \cdots m_1^{\lambda_{1m_1}}, 1^{\lambda_{21}} 2^{\lambda_{22}} \cdots m_2^{\lambda_{2m_2}}, \dots, 1^{\lambda_{n1}} 2^{\lambda_{n2}} \cdots m_n^{\lambda_{nm_n}})} \frac{2_{1 \leq i < j \leq n} \sum_{k_i=1}^{m_i} \sum_{l_j=1}^{m_j} \lambda_{ik_i} \lambda_{jl_j}^{(k_i, l_j)}}{\prod_{i=1}^n \prod_{h_i=1}^{m_i} h_i^{\lambda_{ih_i}} \lambda_{ih_i}!} \quad (3)$$

其中, Σ 是对所有不同的 $(1^{\lambda_{11}} 2^{\lambda_{12}} \cdots m_1^{\lambda_{1m_1}}, 1^{\lambda_{21}} 2^{\lambda_{22}} \cdots m_2^{\lambda_{2m_2}}, \dots, 1^{\lambda_{n1}} 2^{\lambda_{n2}} \cdots m_n^{\lambda_{nm_n}})$ 型元素求和, Π 表示连乘.

例 1 设 4 个集合分别为 $V_1 = \{a_{11}\}$, $V_2 = \{a_{21}, a_{22}\}$, $V_3 = \{a_{31}, a_{32}\}$, $V_4 = \{a_{41}, a_{42}, a_{43}\}$, 求以这 4 个集合为顶点集的所有不同构四部图的个数.

解 设 $V = V_1 \times V_2 \times V_3 \times V_4$, $A = \{(t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{23}, t_{24}, t_{34}) \mid t_{ij} \in \{0, 1\}, 1 \leq i < j \leq 4\}$, 向量映射 $g = (g_{12}, g_{13}, g_{14}, g_{23}, g_{24}, g_{34})$, 即对任意的 $\alpha = (a_{1k_1}, a_{2k_2}, a_{3k_3}, a_{4k_4}) \in V$, $k_1 \in \langle 1 \rangle$, $k_2, k_3 \in \langle 2 \rangle$, $k_4 \in \langle 3 \rangle$, 有

$$g(\alpha) = (g_{12}(\alpha), g_{13}(\alpha), g_{14}(\alpha), g_{23}(\alpha), g_{24}(\alpha), g_{34}(\alpha)) := (g_{12}(a_{1k_1}, a_{2k_2}), g_{13}(a_{1k_1}, a_{3k_3}),$$

$$g_{14}(a_{1k_1}, a_{4k_4}), g_{23}(a_{2k_2}, a_{3k_3}), g_{24}(a_{2k_2}, a_{4k_4}), g_{34}(a_{3k_3}, a_{4k_4})) = (t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{23}, t_{24}, t_{34}) \in A$$

其中, $t_{ij} \in \{0, 1\}$, $1 \leq i < j \leq 4$. 记向量映射集合为 $M = \{g : V \rightarrow A\} = A^V$, 4 部图集为 $X = \{G_g \mid g \in M\}$. 现计算与 V 对应的有限群 $S = S_1 \times S_2 \times S_3 \times S_4$ 作用于四部图集 X 上的轨道个数 N .

因有限群 $S_1 \times S_2 \times S_3 \times S_4$ 的所有可能的不同型元素为

$$(1^1, 1^2, 1^2, 1^3), (1^1, 1^2, 1^2, 3^1), (1^1, 1^2, 1^2, 1^1 2^1), (1^1, 1^2, 2^1, 1^3), (1^1, 1^2, 2^1, 3^1), (1^1, 1^2, 2^1, 1^1 2^1),$$

$$(1^1, 2^1, 1^2, 1^3), (1^1, 2^1, 1^2, 3^1), (1^1, 2^1, 1^2, 1^1 2^1), (1^1, 2^1, 2^1, 1^3), (1^1, 2^1, 2^1, 3^1), (1^1, 2^1, 2^1, 1^1 2^1)$$

利用式(3), 计算 S 作用在 X 上的轨道个数, 即所求不同构 4 部图的个数为

$$N = \sum_{(1^{\lambda_{11}} 1^{\lambda_{21}} 2^{\lambda_{22}} 1^{\lambda_{31}} 2^{\lambda_{32}} 1^{\lambda_{41}} 2^{\lambda_{42}} 3^{\lambda_{43}})} \frac{2_{1 \leq i < j \leq 4} \sum_{k_i=1}^{m_i} \sum_{l_j=1}^{m_j} \lambda_{ik_i} \lambda_{jl_j}^{(k_i, l_j)}}{\prod_{i=1}^4 \prod_{h_i=1}^{m_i} h_i^{\lambda_{ih_i}} \lambda_{ih_i}!} = \frac{2^{23}}{1^1 1! \cdot 1^2 2! \cdot 1^2 2! \cdot 1^3 3!} +$$

$$\frac{2^{13}}{1^1 1! \cdot 1^2 2! \cdot 1^2 2! \cdot 3^1 1!} + \frac{2^{18}}{1^1 1! \cdot 1^2 2! \cdot 1^2 2! \cdot 1^1 1! 2^1 1!} + \frac{2^{17}}{1^1 1! \cdot 1^2 2! \cdot 2^1 1! \cdot 1^3 3!} + \frac{2^9}{1^1 1! \cdot 1^2 2! \cdot 2^1 1! \cdot 3^1 1!} +$$

$$\frac{2^{14}}{1^1 1! \cdot 1^2 2! \cdot 2^1 1! \cdot 1^1 1! 2^1 1!} + \frac{2^{17}}{1^1 1! \cdot 2^1 1! \cdot 1^2 2! \cdot 1^3 3!} + \frac{2^9}{1^1 1! \cdot 2^1 1! \cdot 1^2 2! \cdot 3^1 1!} + \frac{2^{14}}{1^1 1! \cdot 2^1 1! \cdot 1^2 2! \cdot 1^1 1! 2^1 1!} +$$

$$\frac{2^{13}}{1^1 1! \cdot 2^1 1! \cdot 2^1 1! \cdot 1^3 3!} + \frac{2^7}{1^1 1! \cdot 2^1 1! \cdot 2^1 1! \cdot 3^1 1!} + \frac{2^{12}}{1^1 1! \cdot 2^1 1! \cdot 2^1 1! \cdot 1^1 1! 2^1 1!} = \frac{1}{24} (2^{23} + 2^{17} + 2^{17} + 2^{13}) +$$

$$\frac{1}{12} (2^{13} + 2^9 + 2^9 + 2^7) + \frac{1}{8} (2^{18} + 2^{14} + 2^{14} + 2^{12}) = 398\,944$$

参考文献:

- [1] 冯恩民, 张军, 王锡禄. 换热网络综合问题中的布局优化[C]//中国运筹学会第六届学术交流会论文集. 香港: Global-Link 出版社, 2000: 542-547.
- [2] 张军, 金明爱, 冯恩民. 换热网络布局问题的不动点集性质及计算[J]. 运筹与管理, 2001, 10(3): 89-92.
- [3] 张军. 换热网络布局问题的改进及计算[J]. 延边大学学报(自然科学版), 2006, 32(4): 40-43.
- [4] 廉晓龙, 张军. 一类网络布局优化问题的不同构图的

计算[J]. 延边大学学报(自然科学版), 2008, 34(3): 177-178.

- [5] 孙吉荣, 廉晓龙, 丁巍巍, 等. 一类三部图中不同构图的计算[J]. 延边大学学报(自然科学版), 2009, 35(2): 109-111.
- [6] 廉晓龙, 张军. 换热网络布局问题的不同构图的计算[J]. 延边大学学报(自然科学版), 2009, 35(4): 309-311.
- [7] 廉晓龙, 魏连鑫, 张军, 等. 三部图中无向不同构图的计算[J]. 上海理工大学学报, 2010, 32(6): 602-604.
- [8] 胡冠章. 应用近世代数[M]. 3版. 北京: 清华大学出版社, 2006.