

文章编号:1007-6735(2013)01-0060-05

亚纯函数的正规族与重值

黄跃龙, 叶亚盛

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 上的一族亚纯函数, $\psi(\not\equiv 0)$ 是区域 D 上的全纯函数, k 为正整数, 且对于任意的函数 $f \in \mathcal{F}$, 都满足条件: f 不取零, $f^{(k)} + \sum_{i=0}^{k-1} a_i f^{(i)}$ 不取零; 且 $[f^{(k)} + \sum_{i=0}^{k-1} b_i f^{(i)}] - \psi(z)$ 零点重级大于等于 $(k+2)/k$, 且中括号内的微分多项式与 $\psi(z)$ 无公共零点; 其中 $a_i(z)$ 与 $b_i(z)$ 是区域 D 上全纯函数 ($i=0, 1, \dots, k-1$), 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

关键词: 正规族; 重级; 亚纯函数

中图分类号: O 174.52 **文献标志码:** A

Normal Families of Meromorphic Functions and Multiple Values

HUANG Yuelong, YE Yasheng

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions defined in a domain D , $\psi(\not\equiv 0)$ be a holomorphic function in D , k is a positive integer. If $\forall f \in \mathcal{F}$, we have $f \not\equiv 0$, $f^{(k)} + \sum_{i=0}^{k-1} a_i f^{(i)}$ does not go to zero, all zeros of $[f^{(k)} + \sum_{i=0}^{k-1} b_i f^{(i)}] - \psi(z)$ have multiplicities at least $(k+2)/k$, and the differential polynomial $[f^{(k)} + \sum_{i=0}^{k-1} b_i f^{(i)}]$ and the function $\psi(z)$ have no common zeros, where $a_i(z)$ and $b_i(z)$ are holomorphic functions in D ($i=0, 1, \dots, k-1$), then $\mathcal{F}$ is normal in D .

Key words: normal family; multiplicity; meromorphic function

1979 年, Gu^[1] 证明了 Hayman^[2] 关于正规族的一个著名的猜想, 这一个结果被称为顾永兴定则, 内容为:

定理 1 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, k 为正整数, a 为非零常数. 若对任意的 $f \in \mathcal{F}$ 都满足 $f \not\equiv 0$, $f^{(k)} \neq a$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

Fang 等^[3] 考虑了定理 1 中 $a=0$ 的情况, 适当

添加了条件, 得到:

定理 2 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, k 为正整数, b 为非零复数. 若对任意的 $f \in \mathcal{F}$ 满足 $f \not\equiv 0$, $f^{(k)} \neq 0$, 且 $f^{(k)} - b$ 的零点重级不小于 $(k+2)/k$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

徐焱等^[4] 考虑了可否将定理 2 中的非零复数 b 改为一般的不恒为零的全纯函数, 其证明了:

收稿日期: 2012-03-07

第一作者: 黄跃龙(1987-), 男, 硕士研究生. 研究方向: 复分析. E-mail: huangyuelong188@163.com

通讯作者: 叶亚盛(1960-), 男, 副教授. 研究方向: 复分析. E-mail: yashengye@yahoo.com.cn

定理 3 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, $\psi(\neq 0)$ 为 D 内的全纯函数, k 为正整数, 若对任意的 $f \in \mathcal{F}$ 都满足:

a. $f \neq 0, f^{(k)} \neq 0$;

b. $f^{(k)}(z) - \psi(z)$ 的零点重级至少为 $(k+2)/k$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

本文将定理 3 中的 $f^{(k)}(z)$ 推广为一般的微分多项式, 得到结论:

定理 4 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 上一族亚纯函数, $\psi(\neq 0)$ 是区域 D 上全纯函数, $k \in \mathbb{N}^+$. 若 $\forall f \in \mathcal{F}$, 满足:

a. $f \neq 0, f^{(k)} + a_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + a_1f' + a_0f \neq 0$;

b. $f^{(k)} + b_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + b_1f' + b_0f - \psi(z)$ 零点重级 $\geq (k+2)/k$;

c. $f^{(k)} + b_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + b_1f' + b_0f$ 与 $\psi(z)$ 无公共零点, 其中, $a_i(z)$ 与 $b_i(z)$ 是区域 D 上全纯函数 ($i = 0, 1, \dots, k-1$), 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

1 一些引理

引理 1^[5-6] (Pang-Zalcman 引理) 设 $\mathcal{F}$ 是单位圆盘 D 内的亚纯函数族, $\mathcal{F}$ 中的每个函数的零点重级至少是 k , 并且有:

a. $f(z) = 0$, 必有 $f^{(k)}(z) \leq A$;

b. $\mathcal{F}$ 在单位圆盘 D 内不正规, 那么对于每一个 $\alpha, 0 \leq \alpha \leq k$, 存在

(a) 实数 $0 < r < 1$;

(b) 点列 $z_n \in D, |z_n| < r < 1$, 点列 $z_n \rightarrow z_0$;

(c) 函数数列 $f_n \in \mathcal{F}$;

(d) 正数列 $\rho_n \rightarrow 0^+$, 使函数列 $g_n(\zeta) = \rho_n^{-\alpha} f_n(z_n + \rho_n \zeta)$ 在 C 上按球面距离内闭一致收敛到 $g(\zeta)$, 并且 $g^\#(\zeta) \leq g^\#(0) = kA + 1$. 特别的 g 的级至多为 2.

这里 $g^\#(\zeta) = |g'(\zeta)| / (1 + |g(\zeta)|^2)$ 是 g 的球面导数, 若 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的全纯函数族, 则引理 1 中极限函数 g 是复平面 C 上非常数整函数, 由 Clunie 等^[7] 的一个结果知 g 的级至多为 1.

引理 2^[8] 设 $k \geq 1, l \geq 0$ 为两个正整数, f 是复平面 C 上有理函数, 如果 $f \neq 0, f^{(k)} \neq 0$, 则 $f^{(k)} - z^l$ 至少有一个单零点.

引理 3 设 $k \in \mathbb{N}^+, \mathcal{F}$ 是区域 D 上一族亚纯函数, $\{\varphi_n(z)\}$ 为 D 上一列全纯函数, 且 $\varphi_n \rightarrow \varphi(\neq 0)$ 在 D 内内闭一致收敛. 若对 $\forall f_n \in \mathcal{F}, f_n \neq 0$, $f_n^{(k)} + a_{k-1}f_n^{(k-1)} + \dots + a_1f_n' + a_0f_n \neq 0$, 且

$f_n^{(k)} + b_{k-1}f_n^{(k-1)} + \dots + b_1f_n' + b_0f_n - \varphi_n$ 的零点重级至少为 $(k+2)/k$, 其中 $a_i(z)$ 与 $b_i(z)$ 是区域 D 上全纯函数 ($i = 0, 1, \dots, k-1$), 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

证明 若 $\mathcal{F}$ 在 $z_0 \in D$ 不正规, 则 $\exists f_n \in \mathcal{F}, z_n \rightarrow z_0, \rho_n \rightarrow 0^+$, 使得 $g_n(\xi) = \frac{f_n(z_n + \rho_n \xi)}{\rho_n^k} \rightarrow g(\xi)$ 按球面距离内闭一致收敛, 其中 g 是复平面上的非常数亚纯函数, 且 $g \neq 0$. 又

$$\begin{aligned} g_n^{(k)}(\xi) + \sum_{i=0}^{k-1} \rho_n^{k-i} a_i(z_n + \rho_n \xi) g_n^{(i)}(\xi) &= f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi) + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(z_n + \rho_n \xi) f_n^{(i)}(z_n + \rho_n \xi) \\ g_n^{(k)}(\xi) + \sum_{i=0}^{k-1} \rho_n^{k-i} b_i(z_n + \rho_n \xi) g_n^{(i)}(\xi) - \varphi_n(z_n + \rho_n \xi) &= \\ f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi) + \sum_{i=0}^{k-1} b_i(z_n + \rho_n \xi) f_n^{(i)}(z_n + \rho_n \xi) - \varphi_n(z_n + \rho_n \xi) \end{aligned}$$

而 $g_n^{(k)}(\xi) + \sum_{i=0}^{k-1} \rho_n^{k-i} a_i(z_n + \rho_n \xi) g_n^{(i)}(\xi) \rightarrow g^{(k)}(\xi)$, 且 $g_n^{(k)}(\xi) + \sum_{i=0}^{k-1} \rho_n^{k-i} a_i(z_n + \rho_n \xi) g_n^{(i)}(\xi) \neq 0$, 所以 $g^{(k)}(\xi) \neq 0$ 或 $g^{(k)}(\xi) \equiv 0$. 又 g 是复平面上的非常数亚纯函数, 且 $g \neq 0$, 所以 $g^{(k)}(\xi) \neq 0$. 而 $g_n^{(k)}(\xi) + \sum_{i=0}^{k-1} \rho_n^{k-i} b_i(z_n + \rho_n \xi) g_n^{(i)}(\xi) - \varphi_n(z_n + \rho_n \xi) \rightarrow g^{(k)}(\xi) - \varphi(z_0)$, $\varphi(z_0) \neq 0$, 故 $g^{(k)}(\xi) - \varphi(z_0)$ 的零点重级 $\geq \frac{(k+2)}{k}$. 若 g 是超越函数, 则

$$\begin{aligned} T(r, g^{(k)}) &\leq \overline{N}(r, g^{(k)}) + \overline{N}(r, \frac{1}{g^{(k)}}) + \\ \overline{N}(\frac{1}{g^{(k)} - \varphi(z_0)}) + S(r, g^{(k)}) &\leq \frac{1}{k+1} N(r, g^{(k)}) + \\ \frac{k}{k+2} N(r, \frac{1}{g^{(k)} - \varphi(z_0)}) + S(r, g^{(k)}) &\leq \\ \frac{1}{k+1} T(r, g^{(k)}) + \frac{k}{k+2} T(r, g^{(k)}) + S(r, g^{(k)}) &= \\ \frac{k^2 + 2k + 2}{k^2 + 3k + 2} T(r, g^{(k)}) + S(r, g^{(k)}) \end{aligned}$$

得到矛盾, 故 g 是有理函数. 又 $g \neq 0, g^{(k)} \neq 0$, 由引理 2, $g^{(k)} - \varphi(z_0)$ 至少有一个单零点, 得出矛盾. 故引理 3 得证.

引理 4 设 $k \in \mathbb{N}^+, \mathcal{F}$ 是区域 D 上一族全纯函数, $\psi(\neq 0)$ 为 D 上全纯函数, $\forall f \in \mathcal{F}, f \neq 0$, 且 $f^{(k)} + a_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + a_1f' + a_0f - \psi(z)$ 零点重级 ≥ 2 , 其中 $a_i(z)$ 是区域 D 上全纯函数 ($i = 0, 1,$

$\dots, k-1)$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

证明 由正规族的局部性质, 仅需要证明 $\mathcal{F}$ 在 D 内每一点正规, 设 $z_0 \in D$.

情形 1 $\psi(z_0) \neq 0$. 若 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处不正规, 则存在 $f_n \in \mathcal{F}, z_n \rightarrow z_0, \rho_n \rightarrow 0^+$, 使得 $g_n(\xi) = f_n(z_n + \rho_n \xi) / \rho_n^k \rightarrow g(\xi)$ 按球面距离内闭一致地收敛, 其中 g 是复平面上的非常数全纯函数, 且 $g(\xi) \neq 0, \rho(g) \leq 1$. 所以 $g(\xi) = e^{A\xi+B}$, 其中 $A(\neq 0)$ 和 B 为常数, 而

$$g_n^{(k)}(\xi) + \sum_{i=0}^{k-1} \rho_n^{k-i} a_i(z_n + \rho_n \xi) g_n^{(i)}(\xi) - \psi_n(z_n + \rho_n \xi) = f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi) + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(z_n + \rho_n \xi) f_n^{(i)}(z_n + \rho_n \xi) - \psi_n(z_n + \rho_n \xi) \rightarrow g^{(k)}(\xi) - \psi(z_0)$$

按球面距离内闭一致地收敛. 由于函数列的零点重级 ≥ 2 , 所以 $g^{(k)}(\xi) - \psi(z_0)$ 的零点重级 ≥ 2 . 而 $g^{(k)}(\xi) = A^k e^{A\xi+B}$, 因为 $A^k e^{A\xi+B} - \psi(z_0)$ 只有单零点, 矛盾.

情形 2 $\psi(z_0) = 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得在 $D'_\delta(z_0)$ 上 $\psi(z) \neq 0$. 由情形 1 知 $\mathcal{F}$ 在 $D'_\delta(z_0)$ 内正规. 设 $\{f_n\}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一函数列, 则存在 $\{f_n\}$ 子列 (仍记为它本身), 使得 $\{f_n\}$ 在 $D'_\delta(z_0)$ 上内闭一致收敛到一解析函数或一致发散到 ∞ .

若为第一种情况, 由最大模原理, $\{f_n\}$ 在 $D_\delta(z_0)$ 上也内闭一致收敛.

若为第二种情况, $1/f_n \rightarrow 0$ 在 $D'_\delta(z_0)$ 上内闭一致收敛, 而 $f_n \neq 0, 1/f_n$ 全纯, 由最大模原理, $1/f_n \rightarrow 0$ 在 $D_\delta(z_0)$ 上内闭一致收敛, 从而 $\{f_n\}$ 在 $D_\delta(z_0)$ 上也内闭一致发散到 ∞ . 综上 $\mathcal{F}$ 在 z_0 正规, 引理 4 得证.

引理 5 设 $\mathcal{F} = \{f_n\}$ 为 D 内全纯族, $k, l \in \mathbb{N}^+, \{\varphi_n(z)\}$ 全纯, $\varphi_n \rightarrow 1$ 内闭一致收敛, $\forall f_n \in \mathcal{F}, f_n \neq 0, f_n^{(k)} + a_{k-1} f_n^{(k-1)} + \dots + a_1 f_n + a_0 f_n \neq 0$, 且 $f_n^{(k)} + b_{k-1} f_n^{(k-1)} + \dots + b_1 f_n + b_0 f_n - z^l \varphi_n(z)$ 的零点重级 ≥ 2 , 其中 $a_i(z)$ 与 $b_i(z)$ 是区域 D 上全纯函数 ($i = 0, 1, \dots, k-1$), 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

证明 注意到 $\psi_n(z) = z^l \varphi_n(z) \rightarrow z^l = \psi(z)$, 由正规族的局部性质, 仅需要证明 $\mathcal{F}$ 在 D 内每一点正规, 设 $z_0 \in D$, 分两种情形来讨论:

情形 1 $\psi(z_0) \neq 0$. 若 $\mathcal{F}$ 在 z_0 不正规, 则存在 $f_n \in \mathcal{F}, z_n \rightarrow z_0, \rho_n \rightarrow 0^+$, 使得 $g_n(\xi) = f_n(z_n + \rho_n \xi) / \rho_n^k \rightarrow g(\xi)$ 按球面距离内闭一致收敛, 其中 g 是复平面上非常数全纯函数, 且 $g(\xi) \neq 0, \rho(g) \leq$

1, 所以 $g(\xi) = e^{A\xi+B}$, 其中 $A(\neq 0)$ 和 B 为常数, 而

$$g_n^{(k)}(\xi) + \sum_{i=0}^{k-1} \rho_n^{k-i} b_i(z_n + \rho_n \xi) g_n^{(i)}(\xi) - \psi_n(z_n + \rho_n \xi) = f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi) + \sum_{i=0}^{k-1} b_i(z_n + \rho_n \xi) f_n^{(i)}(z_n + \rho_n \xi) - \psi_n(z_n + \rho_n \xi) \rightarrow g^{(k)}(\xi) - \psi(z_0)$$

按球面距离内闭一致的收敛. 由于函数列的零点重级 ≥ 2 , 所以 $g^{(k)}(\xi) - \psi(z_0)$ 的零点重级 ≥ 2 , 而 $g^{(k)}(\xi) = A^k e^{A\xi+B}$, 故 $A^k e^{A\xi+B} - \psi(z_0)$ 只有单零点, 矛盾.

情形 2 $\psi(z_0) = 0$, 即 $z_0 = 0$, 即只需证明 $\mathcal{F}$ 在 $z_0 = 0$ 处正规. 因为存在 $\delta > 0$, 使得在 $D'_\delta(z_0)$ 上 $\psi(z) = z^l \neq 0$, 由情形 1 的证明知 $\mathcal{F}$ 在 $D'_\delta(z_0)$ 内正规, 下面的证明同引理 4 的情形 2 部分.

从证明中看到引理 5 中的条件: $f_n^{(k)} + a_{k-1} f_n^{(k-1)} + \dots + a_1 f_n + a_0 f_n \neq 0$ 可以省去.

2 定理 4 的证明

由正规族的局部性质, 仅需要证明 $\mathcal{F}$ 在 D 内每一点正规, 不失一般性, 设 $D = \Delta$ 为单位圆盘. 不妨设 $\psi(z) = z^l \varphi(z), (z \in \Delta), l$ 是正整数, 且 $\varphi(0) = 1, \varphi(z) \neq 0$ 在 $\Delta' = \{z | 0 < |z| < 1\}$, 下证 $\mathcal{F}$ 在 $z = 0$ 处正规.

作 $G = \{g(z) = f(z) / \psi(z), f \in \mathcal{F}, z \in \Delta\}$, 因为 $f \neq 0$, 所以 $g(0) = \infty$.

先证明 G 在 Δ 内正规. 若 G 在 $z_0 \in \Delta$ 不正规, 则存 $g_n \in G, z_n \rightarrow z_0, \rho_n \rightarrow 0^+$, 使得 $G_n(\xi) = g_n(z_n + \rho_n \xi) / \rho_n^k \rightarrow G(\xi)$ 按球面距离内闭一致的收敛, $G(\xi)$ 是非常数亚纯函数, 因 $g_n \neq 0$, 故 $G(\xi) \neq 0$. 下面分两种情形来讨论:

情形 1 $z_n / \rho_n \rightarrow \infty$, 则 $0 \leq i \leq k$ 时,

$$g_n^{(i)}(z) = \frac{f_n^{(i)}(z)}{\psi(z)} - \sum_{j=0}^i C_{ij}^i g_n^{(i-j)}(z) \frac{\psi^{(j)}(z)}{\psi(z)} =$$

$$\frac{f_n^{(i)}(z)}{\psi(z)} - \sum_{j=0}^i [C_{ij}^i g_n^{(i-j)}(z) \sum_{t=0}^j \frac{A_{jt} \varphi^{(t)}(z)}{z^{j-t} \varphi(z)}]$$

$$l \geq j, A_{jt} = l(l-1)\dots(l-j+1)C_{jt}^l;$$

$$l < j, A_{jt} = 0; A_{jj} = 1$$

所以

$$\rho_n^{k-i} G_n^{(i)}(\xi) = g_n^{(i)}(z_n + \rho_n \xi) =$$

$$\frac{f_n^{(i)}(z_n + \rho_n \xi)}{\psi(z_n + \rho_n \xi)} - \sum_{j=0}^i [C_{ij}^i g_n^{(i-j)}(z_n + \rho_n \xi) \cdot$$

$$\sum_{t=0}^j \frac{A_{jt} \varphi^{(t)}(z_n + \rho_n \xi)}{(z_n + \rho_n \xi)^{j-t} \varphi(z_n + \rho_n \xi)}] =$$

$$\frac{f_n^{(i)}(z_n + \rho_n \xi)}{\psi(z_n + \rho_n \xi)} - \sum_{j=0}^i \left[C_i^j \frac{g_n^{(i-j)}(z_n + \rho_n \xi)}{\rho_n^j} \cdot \sum_{t=0}^j A_{jt} \frac{\rho_n^t \varphi^{(t)}(z_n + \rho_n \xi)}{(\frac{z_n}{\rho_n} + \xi)^{j-t} \varphi(z_n + \rho_n \xi)} \right] \quad (1)$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\frac{z_n}{\rho_n} + \xi)} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_n^t \varphi^{(t)}(z_n + \rho_n \xi)}{\varphi(z_n + \rho_n \xi)} = 0$, 则

不考虑 $G(\xi)$ 的极点, 对任意的紧子集 $U \in C$, U 不含 $G(\xi)$ 的极点, 式(1)中 i 取 k , $\frac{f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi)}{\psi(z_n + \rho_n \xi)} \rightarrow G^{(k)}(\xi)$, 且

$$\frac{f_n^{(i)}(z_n + \rho_n \xi)}{\psi(z_n + \rho_n \xi)} \rightarrow 0, (i = 0, 1, \dots, k-1) \Rightarrow$$

$$\frac{f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi) + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(z_n + \rho_n \xi) f_n^{(i)}(z_n + \rho_n \xi)}{\psi(z_n + \rho_n \xi)} \rightarrow G^{(k)}(\xi)$$

注意到 $[f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi) + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(z_n + \rho_n \xi) \cdot f_n^{(i)}(z_n + \rho_n \xi)] \neq 0$, 所以, $G^{(k)}(\xi) \neq 0$ 或者 $G^{(k)}(\xi) \equiv 0$. 而 $G(\xi) \neq 0$, 且 $G(\xi)$ 是非常数亚纯函数, 所以 $G^{(k)}(\xi) \neq 0$. 而

$$\frac{f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi) + \sum_{i=0}^{k-1} b_i(z_n + \rho_n \xi) f_n^{(i)}(z_n + \rho_n \xi) - \psi(z_n + \rho_n \xi)}{\psi(z_n + \rho_n \xi)} \rightarrow G^{(k)}(\xi) - 1 \quad (2)$$

由条件式(2)左边的分子零点重级 $\geq (k+2)/k$, 又由条件式(2)左边的分子与分母无公共零点, 所以 $G^{(k)}(\xi) - 1$ 零点重级 $\geq (k+2)/k$, 综上 $G(\xi) \neq 0$, $G^{(k)}(\xi) \neq 0$, $G^{(k)}(\xi) - 1$ 零点重级 $\geq (k+2)/k$, 由引理2知 $G(\xi)$ 为超越函数, 所以

$$T(r, G^{(k)}) \leq \bar{N}(r, G^{(k)}) + \bar{N}(r, \frac{1}{G^{(k)}}) + \bar{N}(r, \frac{1}{G^{(k)} - 1}) +$$

$$S(r, G^{(k)}) \leq \frac{1}{k+1} N(r, G^{(k)}) + \frac{k}{k+2} N(r, \frac{1}{G^{(k)} - 1}) +$$

$$S(r, G^{(k)}) \leq \frac{1}{k+1} T(r, G^{(k)}) + \frac{k}{k+2} T(r, \frac{1}{G^{(k)} - 1}) +$$

$$S(r, G^{(k)}) \leq \frac{k^2 + 2k + 2}{k^2 + 3k + 2} T(r, G^{(k)}) + S(r, G^{(k)})$$

所以, $\frac{k}{k^2 + 3k + 2} T(r, G^{(k)}) \leq S(r, G^{(k)})$, 矛盾.

情形2 $z_n/\rho_n \rightarrow \alpha$ (为有穷复数), 则

$$\frac{f(\rho_n \xi)}{\rho_n^k (\rho_n \xi)^l \varphi(\rho_n \xi)} = \frac{g_n(\rho_n \xi)}{\rho_n^k} = \frac{g_n[z_n + \rho_n(\xi - \frac{z_n}{\rho_n})]}{\rho_n^k} =$$

$$G_n(\xi - \frac{z_n}{\rho_n}) \rightarrow G(\xi - \alpha) = \bar{G}(\xi)$$

所以, $\xi = 0$ 是 $\bar{G}(\xi)$ 的极点, 且其重数 $\geq l$.

设 $H_n(\xi) = \frac{f_n(\rho_n \xi)}{\rho_n^{k+l}} = \frac{\psi(\rho_n \xi)}{\rho_n^l} \frac{f_n(\rho_n \xi)}{\rho_n^k \psi(\rho_n \xi)} = \frac{\psi(\rho_n \xi) g_n(\rho_n \xi)}{\rho_n^l \rho_n^k}$, 而 $\psi(z) = z^l \varphi(z)$, $\varphi(0) = 1$, 所以 $\frac{\psi(\rho_n \xi)}{\rho_n^l} \rightarrow \xi^l$.

故 $H_n(\xi) \rightarrow \xi^l \bar{G}(\xi) = H(\xi)$, 因 $\xi = 0$ 是 $\bar{G}(\xi)$ 重级 $\geq l$ 的极点, 所以 $H(0) \neq 0$, 注意到 $H_n(\xi) \neq 0$, 故 $H(\xi) \neq 0$. 又

$$H_n^{(i)}(\xi) = \frac{f_n^{(i)}(\rho_n \xi)}{\rho_n^{k+l-i}} \rightarrow H^{(i)}(\xi)$$

$$H_n^{(k)}(\xi) = \frac{f_n^{(k)}(\rho_n \xi)}{\rho_n^l} \rightarrow H^{(k)}(\xi)$$

而 $\frac{f_n^{(i)}(\rho_n \xi)}{\rho_n^l} = \rho_n^{k-i} H_n^{(i)}(\xi) \rightarrow 0 (i = 0, 1, \dots, k-1)$,

在 C 上去掉 $G(\xi)$ 的极点按球距内闭一致成立. 从而

$$\frac{f_n^{(k)}(\rho_n \xi) + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(\rho_n \xi) f_n^{(i)}(\rho_n \xi)}{\rho_n^l} \rightarrow H^{(k)}(\xi) \quad (3)$$

而式(3)左边式子分子 $f_n^{(k)}(\rho_n \xi) + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(\rho_n \xi) \cdot f_n^{(i)}(\rho_n \xi) \neq 0$, 所以 $H^{(k)}(\xi) \neq 0$ 或者 $H^{(k)}(\xi) \equiv 0$, 而 $H(\xi) \neq 0$.

再有 $\frac{f_n^{(k)}(\rho_n \xi) + \sum_{i=0}^{k-1} b_i(\rho_n \xi) f_n^{(i)}(\rho_n \xi) - \psi(\rho_n \xi)}{\rho_n^l} \rightarrow H^{(k)}(\xi) - \xi^l$, 故 $H^{(k)}(\xi) - \xi^l$ 零点重级 $\geq (k+2)/k$.

断言 $H^{(k)}(\xi) \neq 0$, 否则 $H^{(k)}(\xi) \equiv 0$, 又 $H(\xi) \neq 0$, 所以 $H(\xi) \equiv c$, ($c \neq 0$), 故

$$f_n(0) = \rho_n^{k+l} H_n(0) \rightarrow 0$$

若 $\exists \delta > 0$, 使得 f_n 在 Δ_δ 上全纯, 而 $H_n(\xi) = \frac{f_n(\rho_n \xi)}{\rho_n^{k+l}}$, 由引理4知 $\{f_n\}$ 在 Δ_δ 上正规, 但假设 $\mathcal{F}$ 在 $z=0$ 不正规, 矛盾.

所以存在 $z_n^* \rightarrow 0$ 使得 $f_n(z_n^*) = \infty$, 不妨设 z_n^* 为 f_n 模最小的极点, 则由 $H_n(\xi) = \frac{f_n(\rho_n \xi)}{\rho_n^{k+l}} \rightarrow H(\xi) \equiv c$, 知 $\frac{z_n^*}{\rho_n} \rightarrow \infty$, (否则 $\frac{z_n^*}{\rho_n} \rightarrow \alpha$, $H_n(\frac{z_n^*}{\rho_n}) = \frac{f_n(z_n^*)}{\rho_n^{k+l}} \rightarrow \infty$, 从而 $H(\alpha) = \infty$ 与 $H(\xi) \equiv c$ 矛盾.) 设

$$H_n^*(\xi) = \frac{f_n(z_n^* \xi)}{(z_n^*)^{k+l}}, \text{ 则 } H_n^*(\xi) \text{ 在 } \Delta \text{ 上全纯,}$$

$$H_n^*(\xi) \neq 0, \text{ 且 } H_n^{*(k)}(\xi) = \frac{f_n^{(k)}(z_n^* \xi)}{(z_n^*)^l}, H_n^{*(i)}(\xi) =$$

$$\frac{f_n^{(i)}(z_n^* \xi)}{(z_n^*)^{k+l-i}}, (i=0, 1, \dots, k-1)$$

注意到

$$\frac{f_n^{(k)}(z_n^* \xi) + a_{k-1}(z_n^* \xi)f_n^{(k-1)}(z_n^* \xi) + \dots + a_0(z_n^* \xi)f_n(z_n^* \xi)}{(z_n^*)^l} \neq 0$$

$$\frac{f_n^{(k)}(z_n^* \xi) + b_{k-1}(z_n^* \xi)f_n^{(k-1)}(z_n^* \xi) + \dots + b_0(z_n^* \xi)f_n(z_n^* \xi) - \psi(z_n^* \xi)}{(z_n^*)^l}$$

零点重级 $\geq (\frac{k+2}{k})$, 从而

$$H_n^{*(k)}(\xi) + z_n^* a_{k-1}(z_n^* \xi) H_n^{*(k-1)}(\xi) + z_n^{*2} a_{k-2}(z_n^* \xi) \cdot$$

$$H_n^{*(k-2)}(\xi) + \dots + z_n^{*k} a_0(z_n^* \xi) H_n^*(\xi) \neq 0$$

$$H_n^{*(k)}(\xi) + z_n^* b_{k-1}(z_n^* \xi) H_n^{*(k-1)}(\xi) + z_n^{*2} b_{k-2}(z_n^* \xi) \cdot$$

$$H_n^{*(k-2)}(\xi) + \dots + z_n^{*k} b_0(z_n^* \xi) H_n^*(\xi) - \xi^l \varphi(z_n^* \xi) \rightarrow$$

$$H^{*(k)}(\xi) - \xi^l$$

$$H_n^{*(k)}(\xi) + z_n^* b_{k-1}(z_n^* \xi) H_n^{*(k-1)}(\xi) + z_n^{*2} b_{k-2}(z_n^* \xi) \cdot$$

$$H_n^{*(k-2)}(\xi) + \dots + z_n^{*k} b_0(z_n^* \xi) H_n^*(\xi) - \xi^l \varphi(z_n^* \xi)$$

的零点重级 $\geq (k+2)/k$, 再加上 $H_n^*(\xi) \neq 0$,

$\varphi(z_n^* \xi) \rightarrow 1$, 所以满足引理 5 的条件, 所以函数族

$\{H_n^*(\xi)\}$ 在 Δ 上正规, 而由引理 3, 函数族

$\{H_n^*(\xi)\}$, 在 $C \setminus \{0\}$ 上正规, 故函数族 $\{H_n^*(\xi)\}$ 在

C 上正规, 从而存在子列 $\{H_n^*(\xi)\}$ (不妨仍记为它

本身), 使得 $H_n^* \rightarrow H^*$, 由 $H_n^*(\xi)$ 的定义 $H_n^*(1) =$

$$\infty (z_n^* \rightarrow 0), \text{ 另外 } H_n^*(0) = (\frac{z_n^*}{\rho_n})^{-(k+1)} H_n(0) \rightarrow 0,$$

故 H^* 非常数. 而 $H_n^*(\xi) \neq 0 \Rightarrow H^* \neq 0$, 而上式有

$H^*(0) = 0$ 矛盾. 从而证明了上面的断言.

从而有 $H^{(k)}(\xi) \neq 0$, 注意到 $H \neq 0$, $H^{(k)}(\xi) - \xi^l$ 零

点重级 $\geq (k+2)/k$, 由引理 2 知 H 是超越函数, 从而

$$T(r, H^{(k)}) \leq \bar{N}(r, H^{(k)}) + \bar{N}(r, \frac{1}{H^{(k)}}) + \bar{N}(r, \frac{1}{H^{(k)} - \xi^l}) +$$

$$S(r, H^{(k)}) \leq \frac{1}{k+1} N(r, H^{(k)}) + \frac{k}{k+2} N(r, \frac{1}{H^{(k)} - 1}) +$$

$$S(r, H^{(k)}) \leq \frac{1}{k+1} T(r, H^{(k)}) + \frac{k}{k+2} T(r, \frac{1}{H^{(k)} - 1}) +$$

$$S(r, H^{(k)}) \leq \frac{k^2 + 2k + 2}{k^2 + 3k + 2} T(r, H^{(k)}) + S(r, H^{(k)})$$

这与 H 是超越函数矛盾.

从而证明了 G 在 Δ 内正规, 所以 G 在 Δ 内关

于球面距离等度连续, 注意到 $\forall g \in G, g(0) = \infty$,

所以存在 $\delta > 0$, $\forall g \in G$ 及 $\forall z \in \Delta_\delta$ 有 $|g(z)| \geq$

1. 另外 $\mathcal{F}$ 在 Δ' 正规, 但不在 $z=0$ 正规, 故 $\mathcal{F}_1 =$

$\{\frac{1}{f}, f \in \mathcal{F}\}$ 也在 Δ' 正规, 但不在 $z=0$ 正规. 从而存

在子列 $\{\frac{1}{f_n}\} \subset \mathcal{F}_1$ 在 Δ' 但不在 Δ 上内闭一致收敛,

因 $f_n \neq 0, (z \in \Delta)$, 所以 $\frac{1}{f_n}$ 在 Δ 上全纯, 由最大模

原理在 Δ' 上 $\frac{1}{f_n} \rightarrow \infty$ (若在 Δ' 上 $\frac{1}{f_n} \rightarrow \alpha(z)$ (全纯),

则在 Δ 上 $\frac{1}{f_n} \rightarrow \alpha(z)$, 矛盾.) 从而在 Δ 上 $\frac{1}{f_n} \rightarrow \infty$,

所以 $f_n \rightarrow 0$ 对于 $\{g_n\} \in G$ 也成立. $g_n(z) = f_n(z)/$

$\psi(z)$ 与 $|g(z)| \geq 1 (\forall z \in \Delta_\delta)$, 矛盾.

故完成定理 4 的证明.

参考文献:

- [1] Gu Y X. A normal criterion of meromorphic families [J]. Scientia Sinica Math, 1979, 1(1): 267 - 274.
- [2] Hayman W K. Research problems in function theory [M]. London: Athlone Press, 1967.
- [3] Fang M L, Chang J M. Normal families and multiple values [J]. Arch Math, 2007(88): 560 - 568.
- [4] 徐焱, 常建明. 正规定则与重值 [J]. 数学学报, 2011, 54(2): 265 - 270.
- [5] Pang X C, Zalcman L. Normal families and shared values [J]. Bull London Math Soc, 2000, 32(3): 325 - 331.
- [6] Zalcman L. Normal families new perspectives [J]. Bull Amer Soc, 1998, 35: 215 - 230.
- [7] Clunie J, Hayman W K. The spherical derivative of integral and meromorphic functions [J]. Comment Math Helvet, 1966, 40(1): 117 - 148.
- [8] Xia J Y, Xu Y. Normal families of meromorphic functions with multiple values [J]. J Math Anal Appl, 2009, 354(1): 387 - 393.