

文章编号:1007-6735(2013)01-0087-04

涉及微分多项式的亚纯函数族正规规定则

孟耀霞, 刘晓俊

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 设 $\psi(z)$ 为区域 D 内不恒等于零的全纯函数, 且只有简单零点, k 为正整数, 再设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, 对于 $\mathcal{F}$ 中任意的函数 f 无零点, 且极点均为重级; 若对 $\mathcal{F}$ 内任一组函数 f 与 g , f 的 k 阶微分多项式和 g 的 k 阶微分多项式在 D 内分担 $\psi(z)$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

关键词: 亚纯函数; 正规族; 微分多项式; 分担函数

中图分类号: O 174.52 **文献标志码:** A

Normal Criterion Concerning Differential Polynomials

MENG Yaoxia, LIU Xiaojun

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: Let $\psi(z)$ be a holomorphic function in a domain D , which is not identical to zero, and all of whose zeros are simple, k be a positive integer, and $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions in a domain D . If for each f of $\mathcal{F}$, $f \neq 0$ and all poles of f are multiple; for each pair of functions f and g in $\mathcal{F}$, their differential polynomials share $\psi(z)$ in D , then $\mathcal{F}$ is normal in D .

Key words: meromorphic function; normal family; differential polynomials; share function

1 问题的提出

1986 年, 杨乐^[1]和朱经浩^[2]证明了定理 1.

定理 1 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的亚纯函数族, $\psi \neq 0$ 为 D 内的全纯函数, $k \in \mathbb{Z}^+$. 如果每个 $f \in \mathcal{F}$, 在 D 内都满足 $f \neq 0$ 与 $L(f) \neq \psi(z)$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

2010 年, 徐焱^[3]进一步得到了定理 2 和定理 3.

定理 2 设 $k \in \mathbb{Z}^+$, $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的亚纯函数族且对每个 $f \in \mathcal{F}$ 满足 $f \neq 0$, $\psi \neq 0$ 为 D 内的全纯

函数. 如果对 $\mathcal{F}$ 内任一组函数 f 与 g , $f^{(k)}$ 与 $g^{(k)}$ 在 D 内分担 $\psi(z)$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

定理 3 设 $\psi \neq 0$ 为区域 D 内的只有单零点的全纯函数, $k \in \mathbb{Z}^+$, $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的亚纯函数族. 如果每个 $f \in \mathcal{F}$ 满足 $f \neq 0$ 且只有重极点; 对 $\mathcal{F}$ 内任一组函数 f 与 g , $f^{(k)}$ 与 $g^{(k)}$ 在 D 内分担 $\psi(z)$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

本文将定理 2 和定理 3 推广到微分多项式^[4]的情形, 得到了定理 4 和定理 5.

定理 4 设 $k \in \mathbb{Z}^+$, $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的亚纯函数

收稿日期: 2011-12-28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11071074); 数学天元专项基金资助项目(11226095); 上海市优秀青年基金资助项目(slg10015)

第一作者: 孟耀霞(1988-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 复分析. E-mail: mengmeng19880212@163.com

通讯作者: 刘晓俊(1982-), 男, 讲师. 研究方向: 复分析. E-mail: xiaojunliu2007@hotmail.com

族且对每个 $f \in \mathcal{F}$ 满足 $f \neq 0, \psi \neq 0$ 为 D 内的全纯函数. 如果对 $\mathcal{F}$ 内任一组函数 f 与 $g, L(f)$ 与 $L(g)$ 在 D 内分担 $\psi(z)$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

定理 5 设 $\psi \neq 0$ 为复平面区域 D 内的只有单零点的全纯函数, $k \in \mathbb{Z}^+$, $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的亚纯函数族. 如果每个 $f \in \mathcal{F}$ 满足 $f \neq 0$ 且只有重极点; 对 $\mathcal{F}$ 内任一组函数 f 与 $g, L(f)$ 与 $L(g)$ 在 D 内分担 $\psi(z)$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

记 $D_\delta(\zeta_0) = \{z: |z - \zeta_0| < \delta\}$, $\Delta = \{z: |z| < 1\}$ 与 $\Delta' = \{z: 0 < |z| < 1\}$. 类似地, $\Delta_\delta = \{z: |z| < \delta\}$ 与 $\Delta'_\delta = \{z: 0 < |z| < \delta\}$.

$f_n \xrightarrow{x} f$ 表示 f_n 在 D 内按球面距离内闭一致收敛于 f , $f_n \Rightarrow f$ 表示 f_n 在 D 内按欧氏距离内闭一致收敛于 f .

P_f 表示 f 的极点, $\mathbb{C} \setminus P_f$ 表示复平面 $\mathbb{C}$ 除掉 f 的极点.

2 引理

引理 1^[5] 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一个亚纯函数族, 每一个 f 满足 $f \neq 0$. 如果 $\mathcal{F}$ 在 D 内的一点 z_0 不正规, 则对任何的 $\alpha \geq 0$, 存在

a. 点列 $z_n \rightarrow z_0 (n \rightarrow \infty)$;

b. 正数列 $\rho_n \rightarrow 0^+ (n \rightarrow \infty)$;

c. 函数列 $f_n \in \mathcal{F}$, 使得 $g_n(\zeta) = \rho_n^{-\alpha} f_n(z_n + \rho_n \zeta) \xrightarrow{x} g(\zeta)$, 这里 $g(\zeta)$ 为非常值有穷级亚纯函数.

引理 2^[6] 设 f 为复平面 $\mathbb{C}$ 上一个非常值亚纯函数, $a \neq 0 \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}^+$, 则 f 或 $f^{(k)} - a$ 有零点. 更进一步, 若 f 是超越亚纯函数, 则 f 或 $f^{(k)} - a$ 有无穷多个零点.

引理 3^[3] 设 $k \in \mathbb{Z}^+, f$ 为非常值有理函数且 $f \neq 0$, 则

a. $f^{(k)}(z) - 1$ 至少有 2 个不同的零点;

b. 若 f 的极点均为重级 (至多可能有 1 个例外), 则 $f^{(k)}(z) - z$ 至少有 2 个不同的零点.

引理 4^[7] 设 f 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个超越亚纯函数, $R(z) \neq 0$ 为一有理函数, $k \in \mathbb{Z}^+$. 如果 f 的零点与极点 (除有限个外) 重级都至少为 2, 则 $f^{(k)} - R$ 有无穷多个零点.

由定理 4 和文献[3]中引理 7~9 的证明过程得到引理 5~7.

引理 5 设 $k \in \mathbb{Z}^+, \mathcal{F}$ 为区域 D 内的全纯函数族且任意的 $f \in \mathcal{F}, \psi \neq 0$ 为 D 内的全纯函数. 如果对 $\mathcal{F}$ 内任一组函数 f 与 $g, L(f)$ 与 $L(g)$ 在 D 内分

担 $\psi(z)$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

引理 6 设 $k \in \mathbb{Z}^+, \mathcal{F}$ 为区域 D 内的亚纯函数族, $\{\phi_n(z)\}$ 为 D 内全纯函数列且在 D 上内闭一致收敛到全纯函数 ϕ , 满足 $\phi(z) \neq 0 (z \in D)$. 如果对每个 $n, f_n(z) \neq 0$ 且 $L(f_n)(z) - \phi_n(z)$ 在 D 内至多只有 1 个零点 $z=0$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

引理 7 设 $k, l \in \mathbb{Z}^+, \Delta = \{f_n\}$ 为 Δ 内的全纯函数族, $\{\phi_n(z)\}$ 为 Δ 内纯函数列且在 Δ 上内闭一致收敛到 z^l , 如果对每个 n , 有 $f_n(z) \neq 0$ 与 $L(f_n)(z) - \phi_n(z)$ 在 Δ 内至多只有 1 个零点 $z=0$, 则 $\mathcal{F}$ 在 Δ 内正规.

3 定理的证明

3.1 定理 4 的证明

假设 $\mathcal{F}$ 在点 $z_0 \in D$ 不正规, 由引理 1 可知, 存在点列 $z_n \rightarrow z_0, \rho_n \rightarrow 0^+$ 及 $f_n \in \mathcal{F}$, 使得 $g_n(\zeta) = \rho_n^{-k} f_n(z_n + \rho_n \zeta) \xrightarrow{x} g(\zeta)$ 在 $\mathbb{C}$ 上, 这里 $g(\zeta)$ 为非常值有穷级亚纯函数. 因为, $f_n \neq 0$, 所以, 由 Hurwitz 引理得 $g(\zeta) \neq 0$, 易得, 在 $\mathbb{C} \setminus P_g$ 上

$$g_n^{(k)}(\zeta) - \psi(z_n + \rho_n \zeta) \Rightarrow g^{(k)}(\zeta) - \psi(z_0) \quad (1)$$

$$L(f_n)(z_n + \rho_n \zeta) = f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \zeta) +$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} a_j(z_n + \rho_n \zeta) f_n^{(j)}(z_n + \rho_n \zeta) =$$

$$g_n^{(k)}(\zeta) + \sum_{j=0}^{k-1} \rho_n^{k-j} a_j(z_n + \rho_n \zeta) g_n^{(j)}(\zeta)$$

由式(1)可知, 在 $\mathbb{C} \setminus P_g$ 上

$$L(f_n)(z_n + \rho_n \zeta) - \psi(z_n + \rho_n \zeta) \Rightarrow g^{(k)}(\zeta) - \psi(z_0) \quad (2)$$

$g^{(k)}(\zeta) - \psi(z_0) \neq 0$; 否则, G 为一个 k 次多项式, 但这与 $G(\zeta) \neq 0$ 矛盾.

若 $\exists \zeta_0$, 使得 $g^{(k)}(\zeta_0) = \psi(z_0)$, 由引理 2 和引理 3 可知, $g^{(k)}(\zeta) - \psi(z_0)$ 至少有 2 个不同的零点, 现证明这是不可能的.

设 ζ_0, ζ_0^* 为 $g^{(k)}(\zeta) - \psi(z_0)$ 的 2 个相异零点, 故可选 $\delta > 0$, 使得 $D_\delta(\zeta_0) \cap D_\delta(\zeta_0^*) = \emptyset$. 由式(2)与 Hurwitz 定理, 存在点列 $\zeta_n \in D_\delta(\zeta_0)$ 与 $\zeta_n^* \in D_\delta(\zeta_0^*)$, 当 n 充分大时, 有

$$L(f_n)(z_n + \rho_n \zeta_n) = \psi(z_n + \rho_n \zeta_n)$$

$$L(f_n)(z_n + \rho_n \zeta_n^*) = \psi(z_n + \rho_n \zeta_n^*)$$

由定理 4 中的条件可知, 对任何 $f_m \in \mathcal{F}$ 也有

$$L(f_m)(z_n + \rho_n \zeta_n) = \psi(z_n + \rho_n \zeta_n)$$

$$L(f_m)(z_n + \rho_n \zeta_n^*) = \psi(z_n + \rho_n \zeta_n^*)$$

固定 m , 令 $n \rightarrow \infty$, 有 $z_n + \rho_n \zeta_n \rightarrow z_0, z_n + \rho_n \zeta_n^* \rightarrow z_0$ 及 $L(f_m)(z_0) - \psi(z_0) = 0$. 可设在 z_0 的某领域

内 $L(f_m)(z) - \psi(z) \neq 0$. 否则, 存在 z_0 的某领域, 使得在这个领域内 $L(f_m)(z) \neq \psi(z) + 1$, 于是, 由定理1可知, $\mathcal{F}$ 在点 $z_0 \in D$ 正规, 与假设矛盾. 这样由上可推得 $z_n + \rho_n \zeta_n = z_0$ 与 $z_n + \rho_n \zeta_n^* = z_0$, 从而 $\zeta_n = \zeta_n^*$, 但这与 $\zeta_n \in D_\delta(\zeta_0)$, $\zeta_n^* \in D_\delta(\zeta_0^*)$ 且 $D_\delta(\zeta_0) \cap D_\delta(\zeta_0^*) = \emptyset$ 矛盾.

若 $g^{(k)}(\zeta) \neq \psi(z_0)$, 由引理2可知, $g(\zeta)$ 为常值函数, 矛盾.

3.2 定理5的证明

由定理4的结论可知, 只需证明 $\mathcal{F}$ 在 $\psi(z)$ 的每个零点处正规即可.

不失一般性, 可设 $D = \Delta$, $\psi(z) = z\varphi(z)$ ($z \in \Delta$), 这里 $\varphi(z)$ 为 Δ 内的全纯函数, 且在 Δ 上 $\varphi(z) \neq 0$, $\varphi(0) = 1$. 只要证明 $\mathcal{F}$ 在点 $z = 0$ 正规.

若 $\exists g \in \mathcal{F}$, 使得 $L(g)(0) \neq \psi(0)$, 则存在 $\delta > 0$ 使得在 Δ_δ 上 $L(g)(z) \neq \psi(z)$. 由定理5中的条件可知, 对任意 $f \in \mathcal{F}$, 在 Δ_δ 上有 $L(f)(z) \neq \psi(z)$. 根据定理1可知, $\mathcal{F}$ 在点 $z = 0$ 正规.

若对 $\forall g \in \mathcal{F}$, $L(g)(0) = \psi(0)$, 取定1个 $g \in \mathcal{F}$, $L(g)(0) = \psi(0)$, $\exists \delta > 0$ 使得 $L(g)(z) \neq \psi(z)$, $z \in \Delta'_\delta$; 否则, 在该领域内有 $L(g)(z) \equiv \psi(z)$, 由定理5中的条件可知, 对任意 $f \in \mathcal{F}$, 同样有 $L(f)(z) \equiv \psi(z)$. 这样, 在 $z = 0$ 的该领域内有 $L(f)(z) \neq \psi(z) + 1$, 应用定理1, $\mathcal{F}$ 在点 $z = 0$ 正规, 定理5得证. 从而对 $\forall f \in \mathcal{F}$, 有

$$L(f)(z) \neq \psi(z), z \in \Delta'_\delta \quad (3)$$

由定理1可知, $\mathcal{F}$ 在 Δ'_δ 正规.

假设 $\mathcal{F}$ 在点 $z = 0$ 不正规. 考虑

$$\mathcal{G} = \left\{ g(z) = \frac{f(z)}{\psi(z)} : f \in \mathcal{F}, z \in \Delta_\delta \right\}$$

因为 $f \neq 0$, 所以, $g(0) = \infty$. 此时 G 在 $z = 0$ 也不正规.

由引理1可知, 存在 $z_n \rightarrow 0$, $\rho_n \rightarrow 0^+$ 及 $g_n \in G$, 使得 $G_n(\zeta) = \frac{g_n(z_n + \rho_n \zeta)}{\rho_n^k} \rightarrow G(\zeta)$ 在 $\mathbb{C}$ 上, 这里 $G(\zeta)$ 是 $\mathbb{C}$ 上一个非常值有穷级亚纯函数. 因为, $g_n = f_n/\psi \neq 0$, 所以, 由 Hurwitz 定理可知, $G(\zeta) \neq 0$.

情形1 $z_n/\rho_n \rightarrow \infty$.

通过简单计算可得

$$g_n^{(k)}(z) = \frac{f_n^{(k)}(z)}{\psi(z)} - \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} g_n^{(k-j)}(z) \frac{\psi^{(j)}(z)}{\psi(z)}$$

设

$$\chi = \frac{j}{(z_n/\rho_n + \zeta)} \frac{\rho_n^{j-1} \varphi^{(j-1)}(z_n + \rho_n \zeta)}{\varphi(z_n + \rho_n \zeta)} + \frac{\rho_n^j \varphi^{(j)}(z_n + \rho_n \zeta)}{\varphi(z_n + \rho_n \zeta)}$$

于是

$$G_n^{(k)}(\zeta) = g_n^{(k)}(z_n + \rho_n \zeta) =$$

$$\frac{f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \zeta)}{\psi(z_n + \rho_n \zeta)} - \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \frac{g_n^{(k-j)}(z_n + \rho_n \zeta)}{\rho_n^j} \chi$$

则

$$G_n^{(k-i)}(\zeta) = \rho_n^{-i} g_n^{(k-i)}(z_n + \rho_n \zeta) = \rho_n^{-i} \left\{ \frac{f_n^{(k-i)}(z_n + \rho_n \zeta)}{\psi(z_n + \rho_n \zeta)} - \sum_{j=1}^{k-i} \binom{k-i}{j} \frac{g_n^{(k-i-j)}(z_n + \rho_n \zeta)}{\rho_n^j} \chi \right\},$$

$$i = 1, 2, \dots, k-1$$

$$\text{又 } \frac{1}{(z_n/\rho_n + \zeta)} \rightarrow 0, \frac{\rho_n^j \varphi^{(j)}(z_n + \rho_n \zeta)}{\varphi(z_n + \rho_n \zeta)} \rightarrow 0 (j = 1, 2, \dots, k)$$

$$\text{在 } \mathbb{C} \text{ 上, 则当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } \chi \Rightarrow 0, \text{ 并且 } \frac{g_n^{(k-i)}(z_n + \rho_n \zeta)}{\rho_n^i} \Rightarrow G^{(k-i)}(\zeta), \text{ 则 } \frac{g_n^{(k-i)}(z_n + \rho_n \zeta)}{\rho_n^i}$$

在 $\mathbb{C} \setminus P_G$ 上内闭一致有界. 故

$$L(g_n)(z_n + \rho_n \zeta) = g_n^{(k)}(z_n + \rho_n \zeta) + \sum_{j=0}^{k-1} a_j(z_n + \rho_n \zeta) g_n^{(j)}(z_n + \rho_n \zeta) =$$

$$G_n^{(k)}(\zeta) + \sum_{j=0}^{k-1} \rho_n^{k-j} a_j(z_n + \rho_n \zeta) G_n^{(j)}(\zeta) =$$

$$\frac{L(f_n)(z_n + \rho_n \zeta)}{\psi(z_n + \rho_n \zeta)} - \sum_{i=0}^k \sum_{j=1}^{k-i} a_{k-i}(z_n + \rho_n \zeta) \cdot$$

$$\binom{k-i}{j} \frac{g_n^{(k-i-j)}(z_n + \rho_n \zeta)}{\rho_n^j} \chi$$

所以

$$G_n^{(k)}(\zeta) = \frac{L(f_n)(z_n + \rho_n \zeta)}{\psi(z_n + \rho_n \zeta)} - \sum_{i=0}^k \sum_{j=1}^{k-i} a_{k-i}(z_n + \rho_n \zeta) \cdot$$

$$\binom{k-i}{j} \frac{g_n^{(k-i-j)}(z_n + \rho_n \zeta)}{\rho_n^j} \chi -$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} \rho_n^{k-j} a_j(z_n + \rho_n \zeta) G_n^{(j)}(\zeta)$$

由于 $G_n^{(k)}(\zeta) \Rightarrow G^{(k)}(\zeta)$ 在 $\mathbb{C} \setminus P_G$ 上, 故

$$\frac{L(f_n)(z_n + \rho_n \zeta)}{\psi(z_n + \rho_n \zeta)} \Rightarrow G^{(k)}(\zeta) \text{ 在 } \mathbb{C} \setminus P_G \text{ 上.}$$

由 $G(\zeta) \neq 0$, 易知 $G^{(k)}(\zeta) \neq 1$. 进一步可断言, $G^{(k)}(\zeta) \neq 1$. 事实上, 若 $G^{(k)}(\zeta_0) = 1$, 则由 Hurwitz 定理可知, 存在 $\zeta_n \rightarrow \zeta_0$, 使得对充分大的 n , $L(f_n)(z_n + \rho_n \zeta_n) = \psi(z_n + \rho_n \zeta_n)$, 从而由定理5中的条件可知, 对每个正整数 m 都有 $L(f_m)(z_n + \rho_n \zeta_n) = \psi(z_n + \rho_n \zeta_n)$. 另外, $z_n + \rho_n \zeta_n \rightarrow z_0 \in \Delta_\delta$, 则对充分大的 n , $z_n + \rho_n \zeta_n \neq 0$; 否则 $z_n + \rho_n \zeta_n = 0$, 从而 $\zeta_n = -z_n/\rho_n \rightarrow \infty$, 矛盾. 这样对充分大的 n , $z_n + \rho_n \zeta_n \in \Delta'_\delta$. 这与式(3)矛盾.

于是, 有 $G(\zeta) \neq 0$ 与 $G^{(k)}(\zeta) \neq 1$. 由引理2得 G 是常数, 矛盾.

情形2 $z_n/\rho_n \rightarrow \alpha \neq \infty$.

令

$$H_n(\zeta) = \frac{f_n(\rho_n \zeta)}{\rho_n^{k+1}} \quad (4)$$

$$H_n(\zeta) = \frac{\psi(\rho_n \zeta)}{\rho_n} \frac{f_n(\rho_n \zeta)}{\rho_n^k \psi(\rho_n \zeta)} =$$

$$\frac{\psi(\rho_n \zeta)}{\rho_n} \frac{g_n(\rho_n \zeta)}{\rho_n^k} \xrightarrow{\chi} \zeta G(\zeta - \alpha) = H(\zeta)$$

显然 $H(0) \neq 0$, 并且由 $f_n \neq 0$ 及 Hurwitz 定理可推得 $H(\zeta) \neq 0$. 因为, f_n 只有重极点, 同样由 Hurwitz 定理可得, H 也只有重极点. 而

$$L(f_n)(\rho_n \zeta) = f_n^{(k)}(\rho_n \zeta) + \sum_{j=1}^{k-1} a_j(\rho_n \zeta) f_n^{(j)}(\rho_n \zeta) =$$

$$\rho_n H_n^{(k)}(\zeta) + \sum_{j=0}^{k-1} \rho_n^{k-j+1} a_j(\rho_n \zeta) H_n^{(j)}(\zeta)$$

由式(4)得, 在 $\mathbb{C} \setminus P_H$ 上,

$$H_n^{(k)}(\zeta) = \frac{L(f_n)(\rho_n \zeta) - \sum_{j=0}^{k-1} \rho_n^{k-j+1} a_j(\rho_n \zeta) H_n^{(j)}(\zeta)}{\rho_n}$$

$$\Rightarrow H^{(k)}(\zeta)$$

故

$$\frac{L(f_n)(\rho_n \zeta)}{\rho_n} \Rightarrow H^{(k)}(\zeta) \quad (5)$$

断言: 当 $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 时, $H^{(k)}(\zeta) \neq \zeta$.

首先, $H^{(k)}(\zeta) \neq \zeta$. 否则, $H^{(k)}(\zeta) = \zeta$, 则 H 是次数为 $k+1$ 的多项式, 从而与 $H \neq 0$ 矛盾. 如果存在 $\zeta_0 \neq 0$ 使得 $H^{(k)}(\zeta_0) = \zeta_0$, 由 Hurwitz 定理与式(5)可知, 存在 $\zeta_n \rightarrow \zeta_0$ 使得 $\frac{L(f_n)(\rho_n \zeta_n)}{\rho_n} = \zeta_n \varphi(\rho_n \zeta_n)$, 即 $L(f_n)(\rho_n \zeta_n) = \psi(\rho_n \zeta_n)$.

由定理 5 中的条件, 对每个正整数 m 都有 $L(f_m)(\rho_n \zeta_n) = \psi(\rho_n \zeta_n)$, $\rho_n \zeta_n \in \Delta'_\delta$, 这与式(3)矛盾, 断言得证.

注意到 $H(\zeta) \neq 0$, 由引理 4 可得, H 必为有理函数. 如果 H 不是常数, 应用引理 3 可得, $H^{(k)}(\zeta) - \zeta$ 至少有 2 个不同零点, 矛盾. 因此, H 为一非零常数. 现证明这是不可能的.

若设 $H \equiv C \neq 0$, 则有 $f_n(0) = \rho_n^{k+1} H_n(0) \rightarrow 0$.

若存在 $\delta_1 > 0$, 使得 $f_n \neq \infty$, $z \in \Delta_{\delta_1}$, 则由引理 5 可知, $\{f_n\}$ 在 Δ_{δ_1} 上正规, 矛盾.

因此, 存在 $\{z_n^*\}$, 满足 $z_n^* \neq 0$, $z_n^* \rightarrow 0$, 以及 $f_n(z_n^*) = \infty$. 进一步设 z_n^* 为 f_n 模最小的极点. 因

$$H_n(\zeta) = \frac{f_n(\rho_n \zeta)}{\rho_n^{k+1}} \rightarrow C, \text{ 可得 } \frac{z_n^*}{\rho_n} \rightarrow \infty.$$

现考虑 $\mathcal{H}^* = \left\{ H_n^*(\zeta) = \frac{f_n(z_n^* \zeta)}{(z_n^*)^{k+1}} \right\}$. 显然, 每个

$H_n^* \in \mathcal{F}^*$ 在 $\mathcal{F}$ 上都有意义, 且满足 $H_n^*(\zeta) \neq 0$ 和

$$H_n^{*(k)}(\zeta) = \frac{L(f_n)(z_n^* \zeta) - \sum_{j=0}^{k-1} \rho_n^{k-j+1} a_j(z_n^* \zeta) H_n^{(j)}(\zeta)}{z_n^*} \Rightarrow H^{*(k)}(\zeta)$$

故

$$\frac{L(f_n)(z_n^* \zeta)}{z_n^*} \Rightarrow H^{*(k)}(\zeta)$$

若存在 $\zeta_0 (\neq 0)$ 使得 $H^{*(k)}(\zeta_0) = \zeta_0$, 则由 Hurwitz 定理可知, 存在 $\zeta_n \rightarrow \zeta_0$ 使得 $\frac{L(f_n)(z_n^* \zeta_n)}{z_n^*} = \zeta_n = \zeta_n \varphi(z_n^* \zeta_n)$, 即 $L(f_n)(z_n^* \zeta_n) = \psi(z_n^* \zeta_n)$.

由定理 5 中的条件可知, 对每个正整数 m 都有 $L(f_m)(z_n^* \zeta_n) = \psi(z_n^* \zeta_n)$, 又 $z_n^* \zeta_n \in \Delta'_\delta$, 但这与式(3)矛盾. 故对每个 n , $H_n^{*(k)}(\zeta) - \zeta \varphi(z_n^* \zeta)$ 至多在 $\mathbb{C}$ 上有一个零点 $\zeta = 0$, 设 $\psi_n(\zeta) = \zeta \varphi(z_n^* \zeta)$, 则在 Δ 上内闭一致收敛, 有 $\psi_n(\zeta) \rightarrow \zeta$. 应用引理 6 得 $\{H_n^*(\zeta)\}$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上正规. 注意到 z_n^* 为 f_n 具有最小模的极点, 则 $\{H_n^*(\zeta)\}$ 在 Δ 上全纯, 可应用引理 7 得 $\{H_n^*(\zeta)\}$ 在 Δ 上正规. 因此, $\{H_n^*(\zeta)\}$ 在整个 $\mathbb{C}$ 上正规.

于是, 存在子列 $\{H_n^*(\zeta)\}$ (不失一般性, 这里仍记为 $\{H_n^*(\zeta)\}$), 在 $\mathbb{C}$ 上, $H_n^* \xrightarrow{\chi} H^*$, 又 $H_n^*(0) = \frac{f_n(0)}{(z_n^*)^{k+1}} = \frac{f_n(\rho_n \zeta)}{(z_n^*)^{k+1}} = \left(\frac{\rho_n}{z_n^*}\right)^{k+1} H_n(0) \rightarrow 0$. 从而 $H^*(0) = 0$. 再由 $H_n^* \neq 0$ 及 Hurwitz 定理可推得, 在 $\mathbb{C}$ 上 $H^* \equiv 0$. 但由式(6)可知, $H_n^*(1) = \infty$, 从而 $H^*(1) = \infty$, 矛盾. 这样就证明了 $\mathcal{G}$ 在 Δ_δ 上正规, 与前面假设矛盾, 定理 5 证毕.

参考文献:

- [1] Yang L. The normality of meromorphic functions[J]. Science in China(Seris A), 1986, 29(9): 897-908.
- [2] Zhu J H. A general normal criterion of meromorphic functions[J]. Bullen of Science (Chinese), 1986(3): 174-177.
- [3] Xu Y. On a result due to Yang and Schwick[J]. Sci Sin Math, 2010, 40(5): 421-428.
- [4] 翟文娟, 叶亚盛, 宋红伟. 涉及微分多项式的亚纯函数正规性[J]. 上海理工大学学报, 2009, 31(2): 122-124.
- [5] Zalcman L. Normal families; new perspectives[J]. Bull Amer Math Soc, 1998, 35(3): 215-230.
- [6] Hayman W K. Meromorphic Functions[M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.
- [7] Pang X C, Zalcman L. Normal families and shared values[J]. Bull London Math Soc, 2000, 32(3): 325-331.