

文章编号: 1007-6735(2013)01-0097-06

关于 CRCE-半群

李 焕, 高振林

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 引进半群的 Cwrpp Rees 根、Cwrpp Rees 根扩张 wrpp 半群 (CRCE-半群) 等概念. 解决 Cwrpp Rees 根扩张 wrpp 半群的存在性, 证明这是一个迄今为止从未涉及的半群类. 研究 wrpp 半群的 Cwrpp(根)理想扩张的性质. 最后给出这类 wrpp 半群的关于 Cwrpp Rees 根扩张结构的特征.

关键词: (强)Cwrpp Rees 根; Cwrpp 根半群; Cwrpp 扩张; CRCE-半群
中图分类号: O 152.7 **文献标志码:** A

On CRCE-semigroups

LI Huan, GAO Zhenlin

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The concepts of Cwrpp Rees root of semigroup and Cwrpp Rees radical extension of wrpp semigroups were introduced. The Cwrpp Rees radical extension of wrpp semigroups (CRCE-semigroups) were investigated, and the properties and existence of Cwrpp(radical) ideal extension of the class of CRCE-semigroups were discussed.

Key words: (strong) Cwrpp Rees radical; Cwrpp radical semigroups; Cwrpp radical extension; CRCE-semigroups

1 预备知识

首先给出各类 Green 关系定义及它们的相关性质(见文献[1-2]).

定义 1 半群 S 上的 Green 等价关系 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{R}$ 如下定义

$$\mathcal{L} = \{(a, b) \in S \times S \mid S^1 a = S^1 b\}$$
$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in S \times S \mid a S^1 = b S^1\}$$

定义 2 半群 S 上的 Green * -等价关系 $\mathcal{L}^*$ 和 $\mathcal{R}^*$ 如下定义

$$(a, b) \in \mathcal{L}^* \text{ 当且仅当 } ax = ay \Leftrightarrow bx = by (\forall x, y \in S^1)$$

$$(a, b) \in \mathcal{R}^* \text{ 当且仅当 } xa = ya \Leftrightarrow xb = yb (\forall x, y \in S^1)$$

由关系 $\mathcal{L}^*$ 和 $\mathcal{R}^*$ 引出的等价关系有

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{L}^* \wedge \mathcal{R}^*, \mathcal{D}^* = \mathcal{L}^* \vee \mathcal{R}^*$$

定义 3 半群 S 上的 Green ** -等价关系 $\mathcal{L}^{**}$ 和 $\mathcal{R}^{**}$ 如下定义

$$(a, b) \in \mathcal{L}^{**} \text{ 当且仅当 } (ax, ay) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow (bx, by) \in \mathcal{R} (\forall x, y \in S^1)$$

$$(a, b) \in \mathcal{R}^{**} \text{ 当且仅当 } (xa, ya) \in \mathcal{L} \Leftrightarrow$$

收稿日期: 2011-12-23

第一作者: 李 焕(1985-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 代数学. E-mail: lihuan3110@163.com

$$(xb, yb) \in \mathcal{L} (\forall x, y \in S^1)$$

由关系 $\mathcal{L}^{**}$ 和 $\mathcal{R}^{**}$ 可定义以下等价关系

$$\mathcal{H}^{**} = \mathcal{L}^{**} \wedge \mathcal{R}^{**}, \mathcal{D}^{**} = \mathcal{L}^{**} \vee \mathcal{R}^{**}$$

设 $J^{**}(a) = \bigcup \{J(x) \mid x \in J^{**}(a)\}$, 其中, $J(x)$ 是由 x 生成的主理想, 则 Green^{**} - (等价) 关系 J^{**} 定义如下

$$J^{**} = \{(a, b) \in S \times S \mid J^{**}(a) = J^{**}(b)\}$$

性质 1 设 S 为任意半群, 则

a. $(\mathcal{R}^{**}$ -关系) $\mathcal{L}^{**}$ -关系为 S 上的 (左同余) 右同余, 且在 S 上有

$$(\mathcal{R}^* \subseteq \mathcal{R}^{**}, \mathcal{R}^{**}|_{E(S)} = \mathcal{R}|_{E(S)}) \mathcal{L}^* \subseteq \mathcal{L}^{**}, \\ \mathcal{L}^{**}|_{E(S)} = \mathcal{L}|_{E(S)}$$

b. 设 U 是 S 的子半群, 则 $\mathcal{L}^U \subseteq \mathcal{L}^S \cap (U \times U)$, $\mathcal{R}^U \subseteq \mathcal{R}^S \cap (U \times U)$

c. $(\forall e \in E(S), a \in S), e\mathcal{L}^{**}a \Leftrightarrow (\forall x, y \in S^1)(ax, ay) \in \mathcal{R} \Rightarrow (ex, ey) \in \mathcal{R}$

d. $(\forall a, b \in S) a\mathcal{L}^{**}b \Leftrightarrow L^{**}(a) = L^{**}(b)$, $L^{**}(a) = \bigcup \{L(x) \mid x \in L^{**}(a)\}$, 其中, $L(x)$ 是由 x 生成的主理想.

其次给出 wrpp(Cwrpp) 半群的定义及其相关性质 (见文献[2-3]).

定义 4 称半群 S 为 wrpp 半群, 如果满足下列条件:

a. S 的每个 $\mathcal{L}^{**}$ -类至少含有 S 的一个幂等元;

b. 对 $\forall a \in S, e \in E(L_a^{**})$ 有 $a = ae$, 其中 $E(L_a^{**})$ 为 $\mathcal{L}^{**}$ -类 L_a^{**} 的幂等元集.

定义 5 称半群 S 为 Cwrpp 半群, 如果 S 是 wrpp 的, 并且幂等元都是中心的, 即 $E(S) \subseteq C(S)$, 其中 $C(S), E(S)$ 分别是 S 的中心和幂等元集.

定义 6 称半群 S 为 $\mathcal{R}$ -左可消的 ($\mathcal{L}$ -右可消的), 若 $\forall a, b, c \in S$ 有

$$(ab, ac) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, c) \in \mathcal{R}$$

$$((ba, ca) \in \mathcal{L} \Rightarrow (b, c) \in \mathcal{L})$$

定理 1 有零元的半群 C 为 Cwrpp 半群, 当且仅当 C 可以表示成 $\mathcal{R}$ -左可消半群的 (强) 半格, 此时 C 有半格分解表示

$$C = C^* \cup \{0\}, C^* = \bigcup_{\alpha \in Y} L_\alpha^{**} \hat{=} \bigcup_{\alpha \in Y} M_\alpha \quad (1)$$

其中, $L_\alpha^{**} (\alpha \in Y)$ 是 $\mathcal{R}$ -左可消半群.

下面引进半群上的 Cwrpp (Rees) 同余, (Cwrpp) ρ -集, (强) Cwrpp (Rees) 根, Cwrpp 根半群等概念.

定义 7 半群 S 上的同余 ρ 称为 Cwrpp 同余, 如果 S/ρ 是 Cwrpp 半群. 此时如果 ρ 还是 S 上的 Rees 同余, 称 ρ 是 Cwrpp Rees 同余.

定义 8 对半群 S 上的 Cwrpp 同余 ρ , 如果存在 S 的子集 I 和 Cwrpp 子半群使得

$$S = I \cup C \text{ 且 } C \cong S/P$$

则称 I 是 S 的 (Cwrpp) ρ -集, 这时将 ρ 记作 ρ_I .

由文献[3]知, 若 (Cwrpp) ρ -集存在, 则由 ρ 唯一确定. 另外, 若 ρ 是 Cwrpp Rees 同余, 则 (Cwrpp) ρ -集 I 必存在, 且 I 是半群 S 的理想, 称 I 为 S 的 Cwrpp ρ -理想.

定义 9 对半群 S , 如果 S 无任何 Cwrpp 同余, 那么定义 S 的 Cwrpp 根同余是泛关系 $S \times S$, 则称 S 是 Cwrpp 根半群; 如果 S 至少有一个 Cwrpp 同余, 那么定义 S 上的 Cwrpp 根同余是所有 Cwrpp 同余 $\rho_\alpha (\alpha \in w)$ 的交, 记作 ρ_{cr} , 即

$$\rho_{cr} = \bigcap_{\alpha \in w} \{\rho_\alpha \mid \text{对于 } \forall \alpha \in w,$$

$$\rho_\alpha \text{ 是 } S \text{ 上的 Cwrpp 同余}\} \quad (2)$$

如果 ρ_{cr} 也有 ρ_{cr} -集, 则将其记为 $N(S)$, 即 $\rho_{cr} = \rho_{N(S)}$, 称 $N(S)$ 为 S 的 Cwrpp 根集. 对于 Cwrpp 根同余 ρ_{cr} 和 Cwrpp 根集 $N(S)$, 有时统称它们为 S 的 Cwrpp 根.

由定义 9 知, 对任一半群 S , ρ_{cr} 总是存在的. 一般地, ρ_{cr} 不必仍是 S 的 Cwrpp 同余. 当然, 若 ρ_{cr} 仍是 S 上的 Cwrpp 同余, 那么 ρ_{cr} 是 S 上的最小 Cwrpp 同余.

定义 10 称半群 S 的 Cwrpp 根同余 ρ_{cr} 是强 Cwrpp 根, 若 ρ_{cr} 仍是 S 上的 Cwrpp 同余, 且 $N(S)$ 存在.

设半群 S 的 Cwrpp 根同余 ρ_{cr} 是强 Cwrpp 根, 则易知 $N(S)$ 可表示为

$$N(S) = \bigcap_{\alpha \in w} \{I_\alpha \mid \text{对于 } \forall \alpha \in w,$$

$$I_\alpha \text{ 是 } S \text{ 上的 Cwrpp } \rho_\alpha \text{-集}\} \quad (3)$$

在式 (3) 中, 若对于 $\forall \alpha \in w$, I_α 是 S 上的 Cwrpp ρ_α -理想, 则 $N(S)$ 也是 S 的理想, 但不必是 wrpp 半群, 于是以下概念是有意义的.

定义 11 若半群 S 有强 Cwrpp Rees 根同余 ρ_{cr} , 且根理想 $N(S)$ 是 S 的 wrpp 子半群, 则称 S 为 CRCE-半群.

设 S 为 CRCE-半群, 则由式 (2)、式 (3) 得

$$N(S) = \bigcap_{\alpha \in w} \{I_\alpha \mid \text{对于 } \forall \alpha \in w,$$

$$\text{Cwrpp } \rho_\alpha \text{-集 } I_\alpha \text{ 是 } S \text{ 的 wrpp 理想}\} \quad (4)$$

2 CRCE-半群基本性质

引理 1 设 S 为 CRCE-半群,则 S 是 wrpp 半群,且

$$S/N(S) \cong S \setminus N(S) \cup \{0\}$$

是 Cwrpp 半群.

证明 只要证 S 是 wrpp 半群,剩余部分由定义 9~11 即得.

设 $a \in S = N(S) \dot{\cup} C$, 这里 C 是 Cwrpp 半群. 往证定义 4 中条件 a 与条件 b 在 S 上成立. 若 $a \in N = N(S)$, 因 N 是 wrpp 半群, 故有幂等元 $e \in E(N)$, 使得 $e \mathcal{L}^{**} a$, $\forall f \in E(L_a^{**}(N))$ 有 $a = af$. 由性质 1, 对 $\forall x, y \in N$, $(ax, ay) \in \mathcal{R}^N \Leftrightarrow (ex, ey) \in \mathcal{R}^N$. 设对 $\forall x, y \in S$, $(ax, ay) \in \mathcal{R}^S = \mathcal{R}$, 则有 $x', y' \in S$, 使得 $ax = ayy'$, $ay = axx'$. 于是 $axN = ayy'N \subseteq ayN$, $ayN = axx'N \subseteq axN$, 从而 $axN = ayN$, 即 $(ax, ay) \in \mathcal{R}^N$. 由上式推得 $(ex, ey) \in \mathcal{R}^N$, 再由性质 1, $(ex, ey) \in \mathcal{R}^S$, 同理可证 $(ex, ey) \in \mathcal{R}^S \Rightarrow (ax, ay) \in \mathcal{R}^S$, 综合得 $(a, e) \in L^{**S}$.

设 $\forall f \in E(L_a^{**}(S))$, 因

$$E(S) \setminus \{0\} = E(N) \cup E(C^*), C^* = C \setminus \{0\}$$

若 $f \in E(L_a^{**}(N))$, 由上知 $a = af$; 若 $f = 1_\alpha \in E(C^*) (\exists \alpha \in Y)$, 由 $(f, e) \in \mathcal{L}^{**S}$ 和性质 1 得 $eS^1 = fS^1$. 另一方面, 对 $e \in N, f \in C^*$, 因为 N 是 S 的理想, 故 $eS^1 \subseteq N, fS^1 \cap C^* \neq \emptyset$, 从而 $eS^1 \neq fS^1$. 这表明不存在 $\alpha \in Y, f = 1_\alpha \in E(C^*)$ 使得 $f \in E(L_a^{**}(S))$. 故对 $a \in N$ 定义 4 中条件 a 与条件 b 在 S 上成立.

对 $a \in C$, 用以上相同方法可得定义 4 中条件 a 与条件 b 在 S 上成立.

由定义 1~11 易得以下结论:

引理 2 设 S 是 CRCE-半群, 则

- a. $N(S)$ 是 Cwrpp 根半群;
- b. 如果 I 既是 S 的 Cwrpp 理想, 又是 Cwrpp 根半群, 那么 $I = N(S)$.

引理 3 设 S 为 CRCE-半群. 若 $E(S)$ 是带, 则 $E(N(S))$ 包含子带

$$E^0 = \{e1_\alpha \hat{=} e_\alpha \mid \forall e \in E(N(S)), \alpha \in Y\} \quad (5)$$

证明 由题设条件和引理 1 得, $S/N(S) \cong S \setminus N(S) \cup \{0\}$ 是 Cwrpp 半群, 由文献[2]设 $S \setminus N(S) \cup \{0\} = \bigcup_{\alpha \in Y} L_1^{**\alpha}$ 是左 $\mathcal{R}$ -可消么半群 $L_1^{**\alpha} (\alpha \in Y)$ 的半格, 这里 Y 是半格, 1_α 是

$L_1^{**\alpha} (\alpha \in Y)$ 的恒等元. 因为 $E(S) = E(N(S)) \cup \{1_\alpha\}_{\alpha \in Y}$ 是带, $N(S)$ 是 S 的理想, 故对 $e \in E(N(S)), 1_\alpha \in C^*, e1_\alpha, 1_\alpha e \in E(N(S))$, 于是 $e1_\alpha \cdot e1_\alpha = e1_\alpha = e_\alpha, e1_\alpha f \in E(N(S))$. 则对 $\forall e_\alpha, f_\beta \in E^0, e_\alpha \cdot f_\beta = e1_\alpha \cdot f1_\beta = h1_\beta = h_\beta \in E^0 (h = e1_\alpha f)$, 即 E^0 是 $E(N(S))$ 的子带.

命题 1 对于 CRCE-半群 S , 以下结论成立.

- a. S 是 Cwrpp 当且仅当 $\{0\}$ 是 S 的一个 Cwrpp 理想.
- b. 对于 S 的任意 Cwrpp 理想 $I \supseteq N(S)$, $I/N(S)$ 是 $S/N(S)$ 的一个 Cwrpp 理想.
- c. $N(S/N(S)) = \{0\}$.

证明

- a. 是显然的.
- b. 由 $S/I \cong S/N(S)/I/N(S)$ 知 b 成立.
- c. 由式(3), $N(S) = \bigcap_{\alpha \in \omega} I_\alpha$, 其中对于 $\forall \alpha \in \omega, I_\alpha$ 是 S 的 Cwrpp 理想, 计算得

$$\begin{aligned} N(S/N(S)) &= \bigcap_{\alpha \in \omega} (I_\alpha/N(S)) \subseteq \\ &\bigcap I_\alpha/N(S) = N(S)/N(S) = \{0\} \end{aligned}$$

定义 12 称 I 为半群 S 的 $**$ -左(右)理想, 若 I 为 S 的左(右)理想且对 $\forall a \in I$ 有 $L_a^{**} \subseteq I(R_a^{**} \subseteq I)$; 若 I 既为 S 的 $**$ -左理想又为 S 的 $**$ -右理想, 称 S 的子集 I 为 S 的 $**$ -理想; 如果 I 也是 $**$ -左(右)理想, 称 S 的理想 I 为理想 $**$ -左(右)理想.

引理 4 对于 CRCE-半群 S , 以下结论成立.

- a. $(\forall e \in E(S)) S^1 e$ 是 S 的 $**$ -左理想;
- b. $(a \in S) (L^{**}(a)) J^{**}(a)$ 是 S 含元 a 的最小 $**$ -左理想理想 $**$ -左理想;
- c. 如果 $\{I_\alpha \mid \alpha \in \omega\}$ 是 S 的 $**$ -左理想的集合, 则 $\bigcap \{I_\alpha \mid \alpha \in \omega\}, \bigcup \{I_\alpha \mid \alpha \in \omega\}$ 都是 S 的(理想) $**$ -左理想.
- d. 如果 I 为 S 的理想 $**$ -左理想, 则 I 为 wrpp 半群.

证明

- a. 对 $\forall e \in E(S)$, 显然 $S^1 e$ 是 S 的左理想. 对于 $\forall a \in S^1 e$, 设 $a = xe (\exists x \in S^1)$, 从而有 $a = ae$. 设 $\forall b \in L_a^{**}$, 则对 $\forall f \in E(L_a^{**})$ 有 $b = bf, a = af$, 从而由 $a = af = ae, f \in L_a^{**}$ 推得 $fS^1 = feS^1$, 即 $f\mathcal{R}^{**} fe$. 故 $fe = fef \in E(L_a^{**})$, 且有 $f = fe, b = bf = bfe \in S^1 e$, 即 $L_a^{**} \subseteq S^1 e$, 则引理 4 知 a 成立.
- b. 先证 $J^{**}(a)$ 是 S 的理想: 设 $x, y \in J^{**}(a)$ 则 $J(x) \subseteq J^{**}(a), J(y) \subseteq J^{**}(a)$. 因为 $J(xy) \subseteq J(x)J(y) \subseteq J(x) \cap J(y) \subseteq J(x) \subseteq$

$J^{**}(a)$, 由此得 $xy \in J^{**}(a)$, 即 $J^{**}(a)$ 是 S 的子半群. 设 $s \in S, x \in J^{**}(a)$, 因 $sx \in J(x) \subseteq J^{**}(a), xs \in J(x) \subseteq J^{**}(a)$, 故 $J^{**}(a)$ 是 S 的理想.

再证 $J^{**}(a)$ 是 S 的 $*$ $*$ - 左理想: 设 $x \in J^{**}(a)$, 由 $J^{**}(a)$ 是 S 的理想得 $L_x^{**} \subseteq J_x^{**} \subseteq J^{**}(x) \subseteq J^{**}(a)$, 即 $J^{**}(a)$ 是 S 的 $*$ $*$ - 左理想.

最后证 $J^{**}(a)$ 是最小理想 $*$ $*$ - 左理想: 若有 S 的理想 $*$ $*$ - 左理想 I , 使得 $a \in I \subseteq J^{**}(a)$. 因已证得 $J^{**}(a)$ 是 S 的理想 $*$ $*$ - 左理想, 而 I 也是, 故对 $\forall x \in J^{**}(a), L_x \subseteq L_a^{**} \subseteq I$, 于是 $I = J^{**}(a)$.

同理可证 $L^{**}(a)$ 是 S 含元 a 的最小 $*$ $*$ - 左理想.

c. 由于 $\{I_\alpha | \alpha \in \omega\}$ 是 S 的 $*$ $*$ - 左理想的集合, 则 $\bigcap \{I_\alpha | \alpha \in \omega\}$ 是 S 的左理想, 且 $\forall a \in \bigcap \{I_\alpha | \alpha \in \omega\}$, 均有 $a \in I_\alpha (\forall \alpha \in \omega)$. 又由 $L_a^{**} \subseteq I_\alpha (\forall \alpha \in \omega)$ 可知 $L_a^{**} \subseteq \bigcap \{I_\alpha | \alpha \in \omega\}$, 由引理 4 知 $\bigcap \{I_\alpha | \alpha \in \omega\}$ 是 S 的 $*$ $*$ - 左理想.

$\forall a \in \bigcup \{I_\alpha | \alpha \in \omega\}, \exists \alpha \in \omega$ 使得 $a \in I_\alpha$, 则由 $L_a^{**} \subseteq I_\alpha$ 可知 $L_a^{**} \subseteq \bigcup \{I_\alpha | \alpha \in \omega\}$. 再证 $\bigcup \{I_\alpha | \alpha \in \omega\}$ 是 S 的左理想, 即可得 $\bigcup \{I_\alpha | \alpha \in \omega\}$ 是 S 的 (理想) $*$ $*$ - 左理想.

先证 $\bigcup \{I_\alpha | \alpha \in \omega\}$ 是 S 的子半群. 对 $\forall a, b \in \bigcup \{I_\alpha | \alpha \in \omega\}$ 则存在 $\alpha, \beta \in \omega$, 使得 $a \in I_\alpha, b \in I_\beta$. 由 $ab \in I_\alpha \cdot I_\beta \subseteq I_\beta \subseteq \bigcup \{I_\lambda | \lambda \in \omega\}$ 知 $\bigcup \{I_\alpha | \alpha \in \omega\}$ 是 S 的子半群.

对 $\forall a \in \bigcup \{I_\alpha | \alpha \in \omega\}, s \in S$, 存在 $\alpha \in \omega$, 使得 $a \in I_\alpha$, 由 $sa \in I_\alpha \subseteq \bigcup \{I_\alpha | \alpha \in \omega\}$ 知 $\bigcup \{I_\alpha | \alpha \in \omega\}$ 是 S 的左理想.

d. 由于 S 为 CRCE - 半群且 I 为 S 的 $*$ $*$ - 左理想, 则对 $\forall a \in I$, 有 $L_a^{**} \subseteq I$ 且 $e \in E(L_a^{**}) \subseteq E(I)$, 使得 $eL^{**}a$ 且 $a = ae$. 设 $x, y \in I$ 使得 $(ax, ay) \in \mathcal{R}^S|_I$, 由 $eL^{**}a$ 得 $(ex, ey) \in \mathcal{R}^S$. 因为 $e, x, y \in I$, 故 $(ex, ey) \in \mathcal{R}^I$. 于是由性质 1 得 $(a, e) \in \mathcal{L}^{**I}$, 则由定义 4 知 c 成立.

3 CRCE - 半群根理想扩张的性质和存在性

现讨论 CRCE - 半群关于根理想扩张的性质和存在性. 首先回忆一下理想扩张的概念 (见文献 [4]).

定义 13 设 $N, C = C^* \cup \{0\}$ 是半群, C^* 没有零元 0. 称半群 S 是 $(C$ 关于) N 的一个 (理想) 扩张, 如果 $S = C^* \dot{\cup} N$ (不交并), 且 N 是 S 的一个理想使得 $S/N \cong C$.

本文定义 Cwrpp 扩张与 (Cwrpp) 根 Cwrpp 扩张半群概念.

定义 14 称理想 I 的扩张 S 是 Cwrpp 扩张, 如果 S/I 是 Cwrpp 半群且 I 是 wrpp 半群.

定义 15 设半群 S 为其理想 I 的 Cwrpp 扩张, 若 $I = N(S)$, 则称 S 为 (Cwrpp) 根 Cwrpp 扩张半群.

由以上定义和文献 [4] 得下面结论.

引理 5 如果半群 C, I 满足以下两个条件, 则存在 C 关于 I 的扩张 S .

- a. C 不包含真零因子;
- b. I 至少包含一个幂等元.

特别地, 当 I 是 wrpp 半群, $C \cong S/I$ 是 Cwrpp 半群时, S 是 Cwrpp 扩张.

定理 2 设 $N(S) = \bigcap_{\alpha \in \omega} I_\alpha$ (见式 (4)) 是 CRCE - 半群 S 的强 Cwrpp Rees 根, 则

- a. $(\forall \alpha \in \omega) I_\alpha$ 是理想 $*$ $*$ - 左理想, 且可表示为 $I_\alpha = \bigcup_{e \in E(I_\alpha)} J^{**}(e)$;
- b. $N(S)$ 是理想 $*$ $*$ - 左理想, 且可表示为 $N(S) = \bigcup_{f \in \bigcap_{\alpha \in \omega} E(I_\alpha)} J^{**}(f)$;
- c. $(\forall \alpha \in \omega)$ 存在 Cwrpp 半群 C_α , 使得 S 是 C_α 关于 I_α 的 Cwrpp 扩张.

证明

a. 设 $e \in E(I_\alpha) (\forall \alpha \in \omega)$, 由引理 4, $J^{**}(e)$ 是理想 $*$ $*$ - 左理想. 设 $T = \bigcup_{e \in E(I_\alpha)} J^{**}(e)$, 由引理 4, T 是 $*$ $*$ - 左理想. 对 $e \in E(I_\alpha)$, 由 I_α 是 S 的理想得 $J^{**}(e) \subseteq I_\alpha$, 所以 $T \subseteq I_\alpha$. 另一方面, 设 $a \in I_\alpha$, 则存在幂等元 $e \in E(I_\alpha)$ 使得 $a \in L_e^{**}$. 由 $e \in L^{**}(e) \subseteq J^{**}(e) \subseteq T$ 和 T 是 $*$ $*$ - 左理想, 故 $L_e^{**} = L_a^{**} \subseteq T$, 即有 $a \in T$, 综合得 $I_\alpha = T$.

b. 类似于 a 的证明可得到 $N(S) = \bigcup_{f \in E(N(S))} J^{**}(f)$, 且 $N(S)$ 是一个 $*$ $*$ - 左理想. 只需再证 $E(N(S)) = \bigcap_{\alpha \in \omega} E(I_\alpha)$. 事实上

$$\begin{aligned} e \in E(N(S)) &\Leftrightarrow L_e^{**} \subseteq N(S) \Leftrightarrow \\ L_e^{**} &\subseteq I_\alpha (\forall \alpha \in \omega) \Leftrightarrow \\ e &\in E(I_\alpha) (\forall \alpha \in \omega) \Leftrightarrow \\ e &\in \bigcap_{\alpha \in \omega} E(I_\alpha) \end{aligned}$$

c. 对 $\alpha \in \omega$, 设 $C_\alpha = \{x \in S | x \notin I_\alpha\} \cup \{0\} \cong C_\alpha^* \cup \{0\}$. 定义映射 ϕ_α 如下

$$\phi_\alpha: C_\alpha \rightarrow S/I_\alpha, x\phi_\alpha = x$$

易证 ϕ_α 是从 C_α 到 S/I_α 的一个同构映射. 因此 C_α 是 S 的一个 Cwrpp 子半群, 使得 $C_\alpha \cap I_\alpha = \{0\}$, $S = I_\alpha \dot{\cup} C_\alpha^*$. 由结论 a、引理 4 和定义 14 知, S 是 C_α 关于 I_α 的 Cwrpp 扩张.

由以上引理 5、定理 2、定义 11、定义 14 即得以下定理 3~4.

定理 3 设 I 是 CRCE-半群 S 的 wrpp 子半群, 则以下条件等价:

- a. I 是 S 的 Cwrpp 理想;
- b. S 是某个 Cwrpp 子半群 C 关于理想 I 的 Cwrpp 扩张.

定理 4 设 S 是 wrpp 半群, 则以下两个条件等价:

- a. S 是 CRCE-半群;
- b. S 为其 Cwrpp 根的 Cwrpp 扩张半群.

证明 $a \Rightarrow b$. 因为 S 是 CRCE-半群, 由文献 [4] 知, S 至少包含一个 Cwrpp 理想, 且 $N(S) = \bigcap_{\alpha \in \omega} I_\alpha$ 是 S 的一个真理想. 由定理 2, 对任意的 $\alpha \in \omega$ 记 $S = I_\alpha \dot{\cup} C_\alpha^*$, 其中 C_α^* 不包含零元. 设 $C = \bigcup_{\alpha \in \omega} C_\alpha^* \cup \{0\} \triangleq C_\alpha^* \cup \{0\}$, 若 $x \in N(S) \cap C^*$, 则 $x \in N(S)$ 且 $x \in C^*$. 因此推出对所有的 $\alpha \in \omega$, $x \in I_\alpha$, 且对所有的 $\alpha \in \omega$, $x \notin C_\alpha^*$, 推出 $x \notin \bigcup_{\alpha \in \omega} C_\alpha^* = C^*$, 与 $x \in C^*$ 矛盾. 因此, $N(S) \cap C^* = \emptyset$. 计算得

$$\begin{aligned} N(S) \cup C^* &= N(S) \cup \left(\bigcup_{\alpha \in \omega} C_\alpha^* \right) = \\ &= \bigcup_{\alpha \in \omega} (N(S) \cup C_\alpha^*) = \\ &= \bigcup_{\alpha \in \omega} ((\bigcap_{\beta \in \omega} I_\beta) \cup C_\alpha^*) = \\ &= \bigcup_{\alpha \in \omega} (\bigcap_{\beta \in \omega} (I_\beta \cup C_\alpha^*)) = \\ &= \bigcup_{\alpha \in \omega} S = S; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \bigcup_{\alpha \in \omega} C_\alpha^* \cup \{0\} = \\ &= \{x \in S \mid \exists \alpha \in \omega, x \in C_\alpha^*\} \cup \{0\} = \\ &= \{x \in S \mid \exists \alpha \in \omega, x \notin I_\alpha\} \cup \{0\} = \\ &= \{x \in S \mid x \notin N(S)\} \cup \{0\} \end{aligned}$$

类似于定理 2 中 c 的证明, 得到 $C \cong S/N(S)$, 且 C 是 S 的 Cwrpp 子半群. 由 $S = N(S) \dot{\cup} C^*$ 和定义 15 知, S 为其 Cwrpp 根的 Cwrpp 扩张半群.

$b \Rightarrow a$. 设 S 为其 Cwrpp 根 $N(S)$ 的 Cwrpp 扩张半群, 则 $N(S)$ 是 S 的理想, 使得 $S = N(S) \dot{\cup} C^*$, $C^* \cup \{0\} = C \cong S/N(S)$ 是 S 的 Cwrpp 子半群. 若能证明 S 是 wrpp 半群, 由定义 11 知 S 为 CRCE-

半群. 往证 S 是 wrpp 半群.

设 $a \in S = N(S) \dot{\cup} C^*$, C^* 是 Cwrpp 半群. 分以下两种情形证明定义 4 成立.

情形 1 若 $a \in N(S)$, 因 $N(S)$ 是 wrpp 半群, 故有幂等元 $e \in E(N(S))$, 使得 $e \mathcal{L}^{* \cdot N(S)} a$. 由定义 3, 对 $\forall x, y \in N(S)$

$$(ax, ay) \in \mathcal{R}^{N(S)} \Leftrightarrow (ex, ey) \in \mathcal{R}^{N(S)}$$

设 $x, y \in S$, $(ax, ay) \in \mathcal{R}^S = \mathcal{R}$, 则有 $x', y' \in S$, 使得 $ax = ayy', ay = axx'$. 于是

$$axN(S) = ayy'N(S) \subseteq ayN(S)$$

$$ayN(S) = axx'N(S) \subseteq axN(S)$$

从而 $axN(S) = ayN(S)$, 即 $(ax, ay) \in \mathcal{R}^{N(S)}$. 由上式推得 $(ex, ey) \in \mathcal{R}^{N(S)}$, 再由性质 1 得 $(ex, ey) \in \mathcal{R}^S$. 综合得 $(a, e) \in \mathcal{L}^{* \cdot S}$.

设 $\forall f \in E(L_a^{* \cdot}(S))$, 因 $E(S) = E(N(S)) \dot{\cup} E(C^*)$, 若 $\forall f \in E(L_a^{* \cdot}(N(S)))$, 有上知 $a = af$; 若 $f = 1_\alpha \in E(C^*) (\exists \alpha \in Y)$, 由 $(f, e) \in \mathcal{L}^{* \cdot S}$ 和性质 1 得 $eS^1 = fS^1$. 另一方面, 对 $e \in N(S)$, $f \in C^*$, 因为 $N(S)$ 是 S 的理想, 故 $eS^1 \subseteq N(S)$. 又因 $fS^1 \cap C^* \neq \emptyset$, 从而 $eS^1 \neq fS^1$, 这说明不存在 $\alpha \in Y, f = 1_\alpha \in E(C^*)$, 使得 $f \in E(L_a^{* \cdot}(S))$.

情形 2 若 $a \in C^*$, 因 C^* 是 Cwrpp 半群, 由定理 1 可知, $E(C^*) = \{1_\alpha\}_{\alpha \in Y}$ 且 $\exists | e = 1_\alpha \in E(C^*) (\alpha \in Y)$, 使得 $(a, e) \in \mathcal{L}^{* \cdot C^*}$, 显然 $a = ae$. 由性质 1, $(a, e) \in \mathcal{L}^{* \cdot S}$. 若有 $f \in E(L_a^{* \cdot}(S)) \setminus E(C^*)$, 则存在 $f \in E(N(S))$, 使得 $f \mathcal{L}^{* \cdot S} a$. 从而由 $a = af$ 得 $a \in C^* \cap N(S) = \emptyset$, 矛盾.

综合之得 S 是 wrpp 半群.

4 例子

最后, 用以下实例说明 CRCE-半群的存在性, 并体现这类半群具有独特意义.

设 N 和 $C = C^* \cup \{0\}$ 是半群, C^* 是没有零元的 Cwrpp 半群, C^* 的半格分解表示由式 (1) 给出. N 是有幂等元集 $E(N)$ 的 Cwrpp 根 wrpp 半群, 其中 $E(N)$ 包含由 Y 决定的子带 E_1 如下

$$E_1 = \{e_\alpha \in E(N) \mid \text{对 } \forall \alpha, \beta \in Y \text{ 有 } e_\alpha \cdot e_\beta = e_{\alpha\beta}\}$$

因 $C^* = \bigcup_{\alpha \in Y} M_\alpha$, 故可定义从 C^* 到 N 的映射 θ 如下

$$(\forall x_\alpha \in M_\alpha) x_\alpha \theta = e_\alpha \in E_1$$

可证 θ 是一个局部同态映射 (见文献 [5]): 对 $\forall x, y \in C^*$, 则存在 $\alpha, \beta \in Y$ 使得 $x \in M_\alpha, y \in M_\beta$.

不妨记 $x = x_\alpha, y = y_\beta, x_\alpha \cdot y_\beta = z_{\alpha\beta} \in M_{\alpha\beta}$, 于是

$$(x_\alpha \cdot y_\beta)\theta = z_{\alpha\beta}\theta = e_{\alpha\beta} = e_\alpha \cdot e_\beta = x_\alpha\theta \cdot y_\beta\theta$$

故 θ 为 C^* 到 N 的局部同态映射. 令 $S = C^* \dot{\cup} N$, 在 S 上定义以下运算“ $\circ$ ”

- a. $(\forall x, y \in C^*) x \circ y = xy$ 在 C^* 中;
- b. $(\forall x \in C^*, n \in N) x \circ n = x\theta \cdot n$ 在 N 中;
- c. $(\forall x \in C^*, n \in N) n \circ x = n \cdot x\theta$ 在 N 中;
- d. $(\forall \alpha, \beta \in N) \alpha \circ \beta = \alpha\beta$ 在 N 中.

则 S 关于运算“ $\circ$ ”成 Cwrpp 根的 Cwrpp 扩张半群, 由定理 4 知 S 是一个有强 Cwrpp 根 N 的 CRCE - 半群. 这里指出: 由于

$E(S) = E(N) \dot{\cup} E(C^*) = E(N) \dot{\cup} \{1_\alpha\}_{\alpha \in Y} \neq N$
故 S 不是文献[3]中的左 Cwrpp(右 Cwrpp) - 半群, 也不是文献[5]中的完备 Wrpp 半群(见文献[3, 5 - 7]). 这说明 CRCE - 半群具有独特意义.

参考文献:

- [1] Fountain J B, Abundant semigroups [J]. Proc London Math Soc, 1982, 44(3): 103 - 129.
- [2] Tang X D, On a theorem of C-wrpp semigroup [J]. Comm Algebra, 1997, 25(5): 1499 - 1504.
- [3] Du L, Shum K P. On left C-wrpp semigroups [J]. Semigroup Forum, 2003, 67(3): 373 - 387.
- [4] Clifford A H, Preston G B. The algebraic theory of semigroups [M]. Providence: American Mathematical Society, 1961.
- [5] Guo X J, Shum K P, Guo Y Q. Perfect rpp semigroups [J]. Comm Algebra, 2001, 29(6): 2447 - 2459.
- [6] Fountain J B, Right pp monoids with central idempotent [J]. Semigroup Forum, 1996, 53(1): 229 - 237.
- [7] 高振林, 吴小宝. $C\text{-}\rho_R$ rpp 半群的结构特征[J]. 上海理工大学学报, 2012, 34(1): 48 - 50.

(上接第 54 页)

- [6] Ahmad K, Khare M, Chaudhry K K. Wind tunnel simulation studies on dispersion at urban street canyons and intersections—a review[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2005, 93(9): 697 - 717.
- [7] Huang Y D, Hu X N, Zeng N B. Impact of wedge-shaped roofs on airflow and pollutant dispersion inside urban street canyons[J]. Building and Environment, 2009, 44(12): 2335 - 2347.
- [8] Li X X, Liu C H, Leung D Y C, et al. Recent progress in CFD modeling of wind field and pollutant transport in street canyons [J]. Atmospheric Environment, 2006, 40(29): 5640 - 5658.
- [9] Yassin M F. Impact of height and shape of building roof on air quality in urban street canyons [J]. Atmospheric Environment, 2011, 45 (29): 5220 - 5229.
- [10] 黄远东, 吴文权, 范炳全, 等. 不同建筑物宽高比的街道峡谷内部气流场数值模拟[J]. 上海理工大学学报, 2005, 27(3): 203 - 206.
- [11] Kumar P, Fennell P, Britter R. Measurements of particles in the 5~1 000 nm range close to road level in an urban street canyon[J]. Science of the Total Environment, 2008, 390(2/3): 437 - 444.
- [12] Nazridoust K, Ahmadi G. Airflow and pollutant transport in street canyons [J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2006, 94 (6): 491 - 522.